

УДК 532.529.5:533.6.011.72

## СТРУКТУРА УДАРНЫХ ВОЛН В ЖИДКОСТИ С ПАРОВЫМИ ПУЗЫРЬКАМИ

ЗЬЮНГ НГОК ХАЙ, НИГМАТУЛИН Р. И., ХАБЕЕВ Н. С.

Для описания стационарной структуры ударной волны в жидкости с пузырьками пара с учетом нестационарного межфазного тепломассообмена используется одно-скоростная с двумя давлениями модель пузырьковой среды, учитывающая радиальную инерцию жидкости при изменении объема среды и распределения температур в ней [1]. При этом несущая жидкая фаза полагается несжимаемой, а изменение объема пузырьков и распределения температур вокруг пузырьков, процессы испарения и конденсации описываются в рамках сферически-симметричной схемы с использованием уравнений радиальных пульсаций пузырька и радиальной теплопроводности жидкости.

Исследование микрополей физических параметров служит для замыкания системы уравнений для усредненных характеристик.

Ударные волны в жидкости с пузырьками нерастворимого и неконденсирующегося газа теоретически и экспериментально исследовались в [2–11]. В [2–4, 7–9] исследовалась структура стационарных ударных волн. В [7, 8] проведен анализ с учетом неравновесных эффектов, обусловленных инерцией и вязкостью жидкости в радиальном движении вокруг пузырьков и поступательным движением пузырьков относительно несущей жидкости, а также конечной теплопроводностью газа (температурная неравновесность). Было показано, что структура стационарной волны в пузырьковой газожидкостной смеси с пузырьками постоянной массы имеет значительную толщину (для пузырьков радиуса  $\sim 1$  мм это толщина порядка  $1$  м) и что для не очень вязких жидкостей двухскоростные инерционные и вязкие эффекты из-за продольного движения пузырьков относительно жидкости являются малозаметными на фоне эффектов межфазного теплообмена, определяемого температуропроводностью газа. Распространение акустических возмущений в жидкости с паровыми пузырьками исследовалось в [12–14].

Цель настоящей работы – исследование влияния межфазного тепломассообмена в парожидкостной пузырьковой среде на структуру стационарной ударной волны, реализующейся при стационарном или достаточно длительном воздействии на смесь.

**1. Основные уравнения.** Рассматривается движение жидкости со взвешенными в ней паровыми пузырьками при следующих основных допущениях [1]: 1) расстояния, на которых параметры потока меняются существенно, много больше расстояний между пузырьками, которые гораздо больше размеров пузырьков (т. е. объемные содержания паровой фазы достаточно малы,  $\alpha_2 \ll 0, 1$ ); 2) смесь локально-монодисперсная, т. е. в каждом элементарном объеме все пузырьки сферические и одного радиуса  $R$ ; 3) вязкость и теплопроводность существенны лишь в процессе межфазного взаимодействия и, в частности, при пульсациях пузырьков; 4) отсутствуют процессы зарождения, дробления и коагуляции пузырьков; 5) эффекты поступательного движения пузырьков относительно жидкости не существенны. Последнее допущение, дающее возможность проведения анализа в рамках односкоростной схемы, связано с тем, что для паровых пузырьков роль межфазного теплообмена еще более возрастает по сравнению с газовыми пузырьками и двухскоростные эффекты становятся тем более малозаметными на фоне тепловой диссипации.

Для рассматриваемой смеси в рамках представлений сплошной среды запишем дифференциальные уравнения сохранения массы и импульса

всей смеси, а также уравнения изменения массы отдельного пузырька и паровой фазы в одномерном стационарном движении [1]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[(\rho_1 + \rho_2)v] &= 0, & \frac{d}{dx}[(\rho_1 + \rho_2)v^2 + p_1] &= 0 \\ v \frac{d}{dx} \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_2^\circ \right) &= 4\pi R^2 j, & \frac{d}{dx}(\rho_2 v) &= 4\pi R^2 n j \\ \rho_i &= \rho_i^\circ \alpha_i, & \alpha_1 + \alpha_2 &= 1, & \alpha_2 &= \frac{4}{3} \pi R^3 n \end{aligned} \quad (1.1)$$

где индекс  $i=1, 2$  относится к параметрам соответственно жидкости и пара;  $\alpha_i, p_i, \rho_i, \rho_i^\circ$  — объемное содержание, давление, приведенная и истинная плотность  $i$ -той фазы;  $v$  — скорость;  $n$  — количество пузырьков в единице объема смеси;  $j$  — скорость фазовых переходов с единицы межфазной поверхности.

Примем уравнения состояния фаз:

$$\rho_i^\circ = \text{const}, \quad p_2 = B \rho_2^\circ T_2 \quad (1.2)$$

где  $B$  — газовая постоянная,  $T$  — температура.

Предполагается, что параметры внутри пузырька однородны, находятся на линии насыщения и подчиняются уравнению Клапейрона — Клаузиуса

$$\frac{dT_2}{dp_2} = \frac{T_2}{l \rho_2^\circ} \left( 1 - \frac{\rho_2^\circ}{\rho_1^\circ} \right) \quad (1.3)$$

Здесь  $l$  — удельная теплота парообразования. Однородность давления внутри пульсирующих пузырьков имеет место, когда размер пузырька значительно меньше длины звуковой волны в паровой фазе. При монотонных режимах изменения радиуса пузырька условие гомобаричности может быть записано в виде [1]  $(w_0/a)^2 \ll 1$ , где  $w_0$  — характерное значение радиальной скорости пузырька,  $a$  — скорость звука в паре. Учет неоднородности распределения температуры и плотности в пузырьках при нормальных условиях ( $p \sim 1$  бар) не приводит к заметному влиянию на их динамику [1, 15].

Для описания нестационарного процесса межфазного теплообмена применяется уравнение теплопроводности для жидкости вокруг пузырьков:

$$c_1 \rho_1^\circ \left( v \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{w_{1R} R^2}{r^2} \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda_1 r^2 \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) \quad (1.4)$$

где  $c_1$  — теплоемкость жидкости,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $w_{1R}$  — массовая скорость жидкости на поверхности пузырька,  $r$  — сферическая эйлерова координата, отсчитываемая от центра пузырька. Предполагается, что граница раздела пар — жидкость находится в термодинамическом равновесии, а жидкость является термостатом и сохраняет на достаточном расстоянии от поверхности пузырьков начальную температуру. В рамках представлений ячеистой модели [1] граничное условие вдали от пузырька можно ставить, например, на поверхности эквивалентной сферической ячейки, окружающей пузырек,  $r = R \alpha_2^{-1/3}$ ,  $T_1 = T_0$ .

Скорость фазовых переходов с единицы межфазной поверхности в равновесном приближении может быть определена из граничных условий на поверхности пузырька

$$r = R, \quad j l = \lambda_1 \left( \frac{\partial T_1}{\partial r} \right)_R - q_R, \quad T_1 = T_2 \quad (1.5)$$

В случае однородного равновесного пузырька тепловой поток с его поверхности в паровую фазу  $q_R$  идет на изменение температуры насыщения пара из-за изменения давления

$$q_R = \frac{R}{3} \left[ \frac{c_{p_2} T_2}{l} \left( 1 - \frac{\rho_2^\circ}{\rho_1^\circ} \right) - 1 \right] v \frac{dp_2}{dx} \quad (1.6)$$

где  $c_{p_2}$  — теплоемкость пара при постоянном давлении. Уравнение (1.6) может быть получено интегрированием по объему пузырька уравнения притока тепла для паровой фазы [15]. Для определения давления второй фазы удобно пользоваться уравнением, являющимся следствием уравнения изменения массы одиночного пузырька

$$\left( 1 - C_{2*} \frac{T_2}{T_0} \right) v \frac{dp_2}{dx} = \frac{3p_2}{R} \left[ \frac{j}{\rho_2^\circ} \left( 1 - \frac{\rho_2^\circ}{\rho_1^\circ} \right) - w_{1R} \right] \\ C_{2*} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{c_{p_2} T_0}{l} \quad (1.7)$$

где  $\gamma$  — показатель адиабаты пара.

Давления фаз и размер пузырьков должны быть связаны условием совместного деформирования. Таким условием в данном случае является уравнение Рэлея, соответствующее пульсациям одиночного пузырька в безграничной жидкости. Для рассматриваемого случая оно имеет вид

$$Rv \frac{dw_{1R}}{dx} + \frac{3}{2} w_{1R}^2 + \frac{4\nu_1 w_{1R}}{R} = \frac{p_2 - p_1 - 2\sigma/R}{\rho_1^\circ} \\ v \frac{dR}{dx} = w_{1R} + \frac{j}{\rho_1^\circ} \quad (1.8)$$

где  $\nu_1$  и  $\sigma$  — кинематический коэффициент вязкости жидкости и коэффициент поверхностного натяжения.

Система уравнений (1.1)–(1.8) замкнута. Перейдем к безразмерным переменным и параметрам

$$\zeta = \frac{r}{R}, \quad \theta_i = \frac{T_i}{T_0}, \quad P_i = \frac{p_i}{p_0}, \quad p_0 = p_{10} \quad (1.9)$$

$$W = \frac{w_{1R}}{a_*}, \quad a_* = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_1^\circ}}, \quad a_e = \frac{a_*}{\sqrt{\alpha_{10} \alpha_{20}}}, \quad V = \frac{v}{a_e}$$

$$X = \frac{x}{R_0} \sqrt{\alpha_{10} \alpha_{20}}, \quad S = \frac{2\sigma}{R_0 p_0}, \quad \kappa = \frac{\nu_1}{R_0 a_*}$$

$$M_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad M_{20} = \frac{\rho_{20}}{\rho_{10}}, \quad Z_i = \frac{\rho_i^\circ}{\rho_{10}^\circ}, \quad R_* = \frac{R}{R_0}$$

$$J = \frac{j}{\rho_{20}^\circ a_*}, \quad N = \frac{n}{n_0}, \quad Pe = \frac{R_0 a_*}{D_1}, \quad D_1 = \frac{\lambda_1}{\rho_1^\circ c_1}$$

где  $D_1$  — коэффициент температуропроводности жидкости,  $Pe$  — число Пекле. Индекс 0 внизу относится к равновесному состоянию перед волной.

Система имеет первые интегралы, следующие из (1.1)

$$\alpha_1 V (1 + M_2) = \alpha_{10} V_0 (1 + M_{20}), \quad NV = V_0 \\ \frac{V_0 V}{\alpha_{20}} (1 + M_{20}) + P_1 = \frac{V_0^2}{\alpha_{20}} (1 + M_{20}) + 1 \quad (1.10)$$

Далее для сокращения выкладок будем пренебрегать капиллярными эффектами, эффектами вязкости, массовым содержанием пара и плотностью жидкости

$$S \ll 1, \kappa \ll 1, M_2 \ll 1, \rho_2^\circ / \rho_1^\circ \ll 1 \quad (1.11)$$

Тогда система уравнений в безразмерных переменных примет вид

$$\begin{aligned} V \frac{dR_*}{dX} &= W, & R_* V \frac{dW}{dX} &= P_2 - P_1 - \frac{3}{2} W^2 \\ V \frac{dP_2}{dX} &= - \frac{3\gamma P_2}{\gamma_*(P_2) R_*} (W + Q) \\ V \frac{\partial \theta_1}{\partial X} &= \frac{W(\xi^3 - 1)}{R_* \xi^2} \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} + \frac{1}{\text{Пе} R_*^2 \xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} \right) \\ \xi &= 1, & \theta_1 &= \theta_2(P_2); & \xi &= \alpha_2^{-1/2}, & \theta_1 &= 1 \\ \gamma_*(P_2) &= 1 + \frac{1}{(\gamma - 1)} [\gamma(1 - C_{2*} \theta_2) - 1]^2 \\ Q &= - \frac{C_{1*}}{\text{Пе} R_* Z_2} \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} \right)_{\xi=1}, & C_{1*} &= \frac{\rho_1^\circ}{\rho_{20}^\circ} \frac{c_1 T_0}{l}, & Z_2 &= \frac{P_2}{\theta_2(P_2)} \\ V &= V_0(\alpha_{10} + \alpha_{20} R_*^3), & P_1 &= 1 + V_0^2(1 - R_*^3) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Входящая в уравнение зависимость  $\theta_2(P_2)$  в соответствии с уравнением Клапейрона – Клаузиуса удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\theta_2}{dP_2} = \frac{C_{2*} \theta_2^2}{P_2} \quad (1.13)$$

Если  $C_{2*} = \text{const}$ , то решение этого уравнения имеет вид

$$\theta_2 = - \left[ C_{2*} \ln \left( \frac{P_2}{P_{2*}} \right) \right]^{-1} \quad \left( P_{2*} = \exp \left( \frac{1}{C_{2*}} \right) \right) \quad (1.14)$$

Полученная аппроксимация описывает практические зависимости  $\theta_2 = \theta_s(P_2)$  для разных веществ на довольно значительных интервалах давлений.

Таким образом, теплофизические свойства фаз входят в полученные уравнения через четыре безразмерных параметра:  $\gamma$ , Пе,  $C_{1*}$ ,  $C_{2*}$ . При принятых допущениях  $\gamma$  и Пе являются постоянными а  $C_{1*}$  и  $C_{2*}$  медленно возрастающими функциями давления  $P_2$ , так что при не очень больших перепадах давления  $C_{1*}$  и  $C_{2*}$  также можно считать постоянными.

Структура плоской стационарной ударной волны определяется граничными условиями перед и за ударной волной. Равновесные параметры перед волной обозначим индексом 0, за волной –  $e$ . Состояние за волной определяется конечными соотношениями

$$V_e = \alpha_{10} V_0, P_e = 1 + V_0^2, R_{*e} = 0, \alpha_{2e} = 0 \quad (1.15)$$

В случае смеси газовых пузырьков с несжимаемой жидкостью связь интенсивности волны со скоростью  $V_0$  имела вид [7, 8]  $P_e = V_0^2$ . Отметим, что из (1.12), (1.15) можно получить оценку  $P_1 = P_e - (P_e - 1) R_*^3 \leq P_e$ . Это означает, что внутри стационарной волны в жидкости с паровыми пузырьками давление в жидкости  $P_1(X)$  не может превышать давление за волной  $P_e$ . В несжимаемой жидкости с газовыми пузырьками постоянной массы внутри стационарной волны возможно незначительное усиление

первоначально инициированных ударных волн за счет того, что при колебаниях пузырьки могут проскакать конечное равновесное состояние. Из оценки, которую можно получить из (1.12) и  $P_e = V_0^2$

$$P_1 = P_e + 1 - R_*^3 P_e \leq P_e + 1 \quad (1.16)$$

видно, что давление жидкости внутри стационарной ударной волны не может превышать давление за ударной волной на величину начального давления. Однако это усиление может становиться более заметным в нестационарных волнах в зоне их инициирования. В работе [16] расчеты структуры стационарной ударной волны в смеси несжимаемой жидкости с пузырьками постоянной массы выявили очень сильное повышение давления жидкости в первом пике волны (при  $P_e \approx 6$ ,  $P_1 \approx 2P_e > P_e + 1$ ). Из полученной оценки (1.16) следует, что такое усиление в указанных условиях возникло, по-видимому, из-за того, что полученное в [16] модельное уравнение справедливо лишь для достаточно слабых волн  $(P_e - 1)^2 \ll 1$ .

**2. Расчет структуры ударной волны.** Для исследования асимптотического поведения системы в окрестности начального равновесного состояния система линеаризуется относительно значений параметров в точке 0 и решение ищется в виде затухающей при  $X \rightarrow -\infty$  экспоненты

$$V = V_0 + A_V \exp(hX), \quad W = A_W \exp(hX) \quad (2.1)$$

$$P_i = P_{i0} + A_{P_i} \exp(hX), \quad R_* = 1 + A_R \exp(hX)$$

$$\theta_i = 1 + A_{\theta_i}(\xi) \exp(hX)$$

$$i = 1, 2 \quad (\text{Re } h > 0, V_0 > 0)$$

После линеаризации для постоянных  $A_R$ ,  $A_W$ ,  $A_{P_1}$ ,  $A_{P_2}$  получим алгебраические уравнения, а для функции  $A_{\theta_i}(\xi)$  — дифференциальное уравнение с граничными условиями

$$hV_0 A_W = A_{P_2} - A_{P_1}, \quad A_{P_1} = -3V_0^2 A_R$$

$$hV_0 A_{P_2} = \frac{3\gamma}{\gamma_*} \left[ \frac{C_1}{\text{Pe}} \left( \frac{\partial A_{\theta_1}}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} - A_W \right] \quad (2.2)$$

$$hV_0 A_{\theta_i} = \frac{1}{\text{Pe} \xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi^2 \frac{\partial A_{\theta_i}}{\partial \xi} \right) \quad (2.3)$$

$$\xi = 1, \quad A_{\theta_i} = \frac{d\theta_2}{dP_2} A_{P_2} = C_2^* A_{P_2}; \quad \xi = \infty, \quad A_{\theta_i} = 0 \quad (2.4)$$

Решение этой краевой задачи имеет вид

$$A_{\theta_i} = \frac{C_2^* A_{P_2}}{\xi} \exp[H \text{Pe}^{1/2} (1 - \xi)], \quad H = \sqrt{hV_0} \quad (2.5)$$

откуда входящая в (2.2) производная равна

$$\left( \frac{\partial A_{\theta_1}}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} = -C_2^* A_{P_2} (1 + H \text{Pe}^{1/2})$$

Численная проверка показала, что различие между решениями уравнения (2.3), удовлетворяющими граничным условиям (1.12) и (2.4), в случае, когда  $\alpha_2 \leq 0,1$ , ничтожно мало.

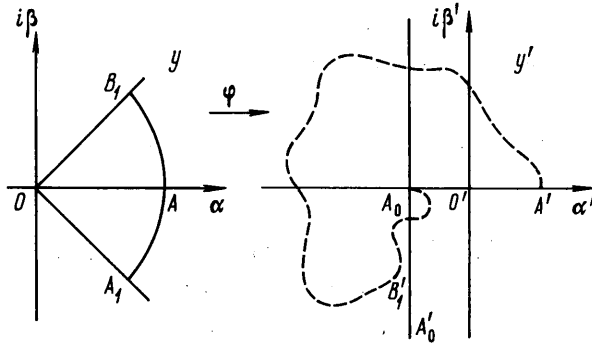
Получено однопараметрическое семейство решений (амплитуды возмущений всех параметров можно выразить через одну из амплитуд). Условие существования нетривиального решения системы линейных уравнений

приводит к алгебраическому уравнению шестого порядка относительно  $H$

$$\varphi(H) = \sum_{i=0}^6 a_i H^i = 0 \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} a_6 &= \gamma_*, & a_5 &= 3\gamma C_{1*} C_{2*} \text{Pe}^{-1/2} \\ a_4 &= 3\gamma C_{1*} C_{2*} \text{Pe}^{-1}, & a_3 &= 0, & a_2 &= 3(\gamma - \gamma_* V_0^2) \\ a_1 &= -9\gamma C_{1*} C_{2*} \text{Pe}^{-1/2} V_0^2, & a_0 &= -9\gamma C_{1*} C_{2*} \text{Pe}^{-1} V_0^2 \end{aligned}$$

Для решения типа (2.1) удовлетворяют лишь корни  $h$  с положительной действительной частью. Кроме того, из (2.4), (2.5) следует, что  $H$  также должно иметь положительную действительную часть. Поэтому для ре-



Фиг. 1

шения этого типа подходят лишь корни  $H$  уравнения (2.6), удовлетворяющие условиям  $\text{Re } H > 0$ ,  $\text{Re } H^2 > 0$ , т. е. лежащие в угле  $B_1 O A_1$  комплексной плоскости  $y$  (фиг. 1). Докажем существование и единственность такого корня уравнения (2.6).

Рассмотрим функцию комплексного переменного, для которой выполнены следующие условия:

$$\varphi(y) = \sum_{i=0}^6 a_i y^i \quad (2.7)$$

$$\text{sign } a_6 = \text{sign } a_5 = \text{sign } a_4 = 1, \quad a_3 \geq 0$$

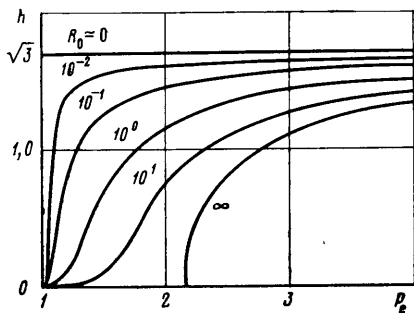
$$\text{sign } a_1 = \text{sign } a_0 = -1 \quad (V_0^2 = \text{Pe} - 1 > 0)$$

Рассмотрим, куда отображается этой функцией полуконтур  $AB_1 O$ . При достаточно большом радиусе  $OA$ , в силу того что  $a_6 > 0$ ,  $y'_{A'} = \varphi(y_A)$  будет положительным действительным числом, т. е.  $A'$  будет лежать на положительной действительной полуоси  $\alpha'$ . Точка  $O$  при этом отображается в точку  $A_0$ , которая лежит на отрицательной действительной полуоси  $\alpha'$  в силу того, что  $a_0 < 0$ . Луч  $OB_1$  отображается на линию  $A_0 B_1'$  комплексной плоскости  $y'$

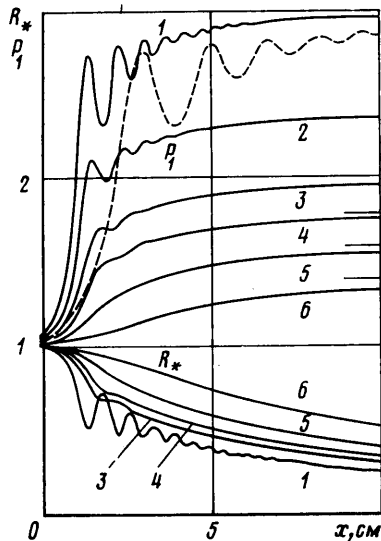
$$\varphi(d+id) = (a_0 + a_1 d - 2a_3 d^3 - 4a_4 d^4 - 4a_5 d^5) + i(a_1 d + 2a_2 d^2 + 2a_3 d^3 - 4a_4 d^4 - 8a_5 d^5) \quad (d > 0)$$

Отсюда видно, что в силу (2.7) всегда имеет место неравенство  $\text{Re } \varphi(d+id) < 0$ , и при достаточно большом  $d$   $\text{Im } \varphi(d+id) < 0$ , т. е. образ луча  $OB_1$  полностью лежит на полуплоскости с отрицательной действительной частью комплексной плоскости  $y'$ . Функция  $\varphi(y)$  является полиномом шестого порядка, для которого выполняются условия (2.7), поэтому любая точка  $y = b \exp(i\delta)$  дуги  $B_1 A$  при достаточно большом  $b$  не может отображаться этой функцией в точку четверти  $A_0' A_0 \alpha'$  комплексной плоскости, т. е. вся дуга  $B_1 A$  отображается функцией  $\varphi$  на кривую  $B_1' A'$ , которая целиком лежит в трех четвертях  $A_0' A_0 \alpha'$  комплексной плоскости (см. фиг. 1).

Второй полукоонтур  $AA_1O$  отображается этой функцией симметрично относительно оси  $\alpha'$  по отношению к образу полукоонтур  $AB_1O$ . При достаточно большом радиусе  $OA$  дуги  $A_1AB$  приращение аргумента радиус-вектора, проведенного из точки  $O'$ , при обходе образа коонтур  $OA_1AB_1O$  равно  $2\pi$ . При стремлении радиуса дуги  $A_1AB_1$  к бесконечности внутренней частью, охватываемой коонтуром  $OA_1AB_1O$ , является угол  $A_1OB_1$ . Отсюда следует [17], что число нулей этой функции или, иначе, число решений уравнения (2.6) в угле  $A_1OB_1$  равно единице. Так как для любого комплексного решения полинома с действительными коэффициентами сопряженное число также должно являться решением, то единственное решение уравнения (2.6) в угле  $A_1OB_1$  действительно.



Фиг. 2



Фиг. 3

Таким образом доказано, что при наличии тепломассообмена корень  $h$  существует и является единственным для всех  $Pe > 1$ , т. е. существует единственное решение типа (2.1) линеаризованной задачи (2.2)–(2.4). Решение уравнения (2.6) находилось численно.

На фиг. 2 приведены зависимости корня  $h$  от интенсивности волны  $Pe$  при различных радиусах пузырька в мм. Вариации начального радиуса  $R_0$  соответствуют вариациям числа Пекле согласно формуле  $Pe = R_0/R_\lambda$ . Здесь рассмотрен случай пароводяной смеси ( $p_0 = 1$  бар,  $T_0 = 373$  К,  $R_\lambda = D_1/a_* = 1,65 \cdot 10^{-5}$  мм.) В адиабатическом случае уравнение (2.6) переходит в квадратное уравнение относительно  $hV_0$

$$(hV_0)^2 = 3(P_e - P_*), \quad P_* = (\gamma + \gamma_*)/\gamma_*$$

Отсюда видно, что в этом случае указанный корень существует лишь при  $Pe > P_*$  (при  $p_0 = 1$  бар,  $T_0 = 373$  К имеем  $P_* = 2,14$ ).

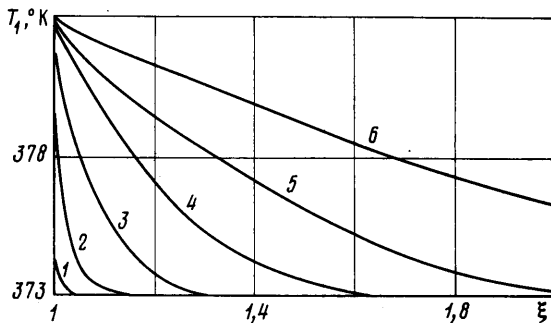
Интегральные кривые системы основных уравнений допускают смещение вдоль оси  $X$ . Поэтому фиксируем при  $X=0$  некоторое значение безразмерного радиуса пузырька  $R_*$ , причем  $R_*$  надо взять достаточно близким к 1, чтобы в области  $X < 0$  выполнялось линейное решение. Из (2.2)–(2.5) по амплитуде возмущения радиуса пузырька и значению корня уравнения (2.6) можно определить значения остальных амплитуд при  $X=0$ . Эти величины определяют начальные условия для численного решения нелинейной задачи в области  $X > 0$ .

Задача решалась конечно-разностным методом в эйлеровых переменных, при этом область вне пузырька разбивалась на сферические слои, число которых выбиралось из условия, чтобы его увеличение практически не влияло на результаты. Предварительно были проведены отладочные расчеты, соответствующие случаю отсутствия фазовых переходов [8]. Результаты расчетов проверялись также путем

сравнения с результатами решения задачи о динамике одиночного парового пузырька в переменном поле давления  $P_1$  [15]. Равновесным состояниям перед и за ударной волной соответствуют точки 0 и  $\epsilon$ , являющиеся особыми точками системы дифференциальных уравнений. Исследование асимптотики при  $X \rightarrow -\infty$  было необходимо для выхода из особой точки.

Рассчитывались различные варианты структуры ударной волны в воде, содержащей пузырьки пара и находящейся на линии насыщения при атмосферном давлении  $p_0=1$  бар. Использовались следующие значения термодинамических параметров [18]:  $\rho_{10}^0=958,6$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_{20}^0=0,597$  кг/м<sup>3</sup>,  $T_0^0=373$  К,  $\nu_1=2,913 \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/кг,  $c_1=4,216$  кДж/кг·град;  $c_{p2}=2,034$  кДж/кг·град;  $\gamma=1,283$ ;  $\lambda_1=0,68$  Вт/м·град  $l=2215$  кДж/кг;  $\sigma=58 \cdot 10^{-3}$  Н/м.

На фиг. 3 приведены рассчитанные структуры волн со следующими значениями параметров, определяющих исходное состояние смеси:  $R_0=1$  мм;  $\alpha_{20}=0,05$ ;  $a_*=10,22$  м/с;  $p_0=1$  бар. Кривые 1–6 соответствуют следующим



Фиг. 4

значениям интенсивности волны  $P_e=3,0; 2,4; 2,0; 1,8; 1,6; 1,4$ . Для слабых волн, имеющих монотонную структуру,  $P_2 \approx P_1$ . В случае осцилляционных волн давление в паровой фазе колеблется синхронно с давлением в жидкой фазе  $P_1$ , но с заметно большей амплитудой. Видно, что в отличие от ударных волн в жидкости с пузырьками нерастворимого газа [7, 8], когда стационарные волны с интенсивностью  $P_e \gg \gamma$  имели осцилляционную структуру, наличие массообмена заметно усиливает тенденцию волн к монотонной структуре и расширяет диапазон интенсивностей, при которых такая структура реализуется. Очевидно, в случае паровых пузырьков этот диапазон существенно зависит от степени диспергированности паровой фазы (начального размера пузырьков  $R_0$ ). На фиг. 3 показано также влияние начального объемного паросодержания на структуру волны. Пунктирная кривая соответствует значению  $\alpha_{20}=0,01$  при  $P_e=3,0$ . Сравнение с кривой 1 показывает, что уменьшение объемной концентрации пузырьков приводит к заметному увеличению длины осцилляционных волн из-за увеличения скорости ударной волны.

На фиг. 4 представлено распределение температуры в жидкости вокруг пузырьков в волне  $P_e=1,4$  на различных расстояниях. Кривые 1–6 соответствуют следующим значениям  $x$ : 1,5; 5,5; 11,5; 18; 24,5; 38,5 см. Видно, что часто используемое при расчете динамики паровых пузырьков упрощающее допущение о тонкости теплового пограничного слоя в жидкости становится неоправданным при схлопывании пузырька, когда его радиус достигает значений  $R_* \leq 0,4$ . На фиг. 5 приведена рассчитанная структура волны в пароводяной смеси с существенно более мелкими пузырьками  $R_0=0,01$  мм;  $\alpha_{20}=0,05$ ;  $P_e=3,0$ ;  $a_*=10,22$  м/с;  $p_0=1$  бар. В этом случае межфазная поверхность, на которой происходят фазовые переходы, достаточн



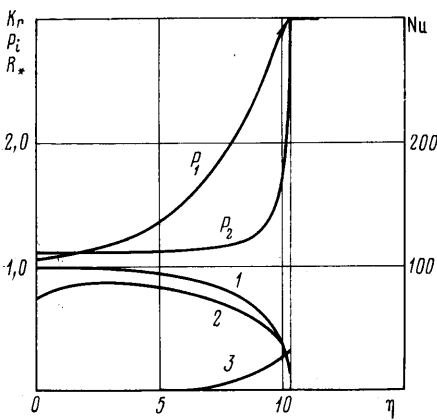
велика, и пузырьки довольно быстро выходят на режим инерционного схлопывания. Кривые 1–3 на фиг. 5 иллюстрируют поведение радиуса пузырька, числа Нуссельта и кинетической энергии мелкомасштабного движения [1]

$$Nu = \frac{2R(\partial T_1/\partial r)_{r=R}}{T_0 - T_2}, \quad k_r = 1,5 \frac{\alpha_2 w_{1R}^2}{\alpha_1} (1 - \alpha_2^{1/2}), \quad \eta = \frac{x}{R_0}$$

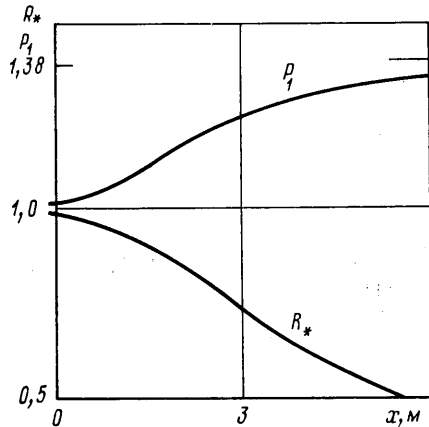
где  $K_r = k_r/k_r^{(p)}$  обезразмерена по отношению к кинетической энергии мелкомасштабного движения в случае схлопывания пузырьков в режиме Рэлея. Число Нуссельта при  $X \rightarrow -\infty$  стремится к конечному значению

$$X \rightarrow -\infty, \quad Nu \rightarrow 2(1 + H Pe^{1/2})$$

а при схлопывании паровых пузырьков как в тепловом (фиг. 3, 4), так и в инерционном режиме (фиг. 5) уменьшается, стремясь к нулю на конечной стадии смыкания. Кинетическая энергия мелкомасштабного движения



Фиг. 5



Фиг. 6

при схлопывании паровых пузырьков в тепловом режиме (фиг. 3, 4) уменьшается, стремясь к нулю на конечной стадии смыкания, а в инерционном режиме, как показано на графике (кривая 3 фиг. 5), увеличивается, стремясь к конечному значению. Максимальный предел, к которому может стремиться кинетическая энергия мелкомасштабного движения, реализуется при схлопывании пузырьков в рэлеевском режиме

$$k_r^{(p)} = \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \frac{p_e - p_0}{\rho_1^0}$$

Если предполагать, что при схлопывании пузырьков эта энергия превращается в тепло, то повышение давления за счет теплового расширения жидкости незначительно. В случае схлопывания пузырьков в рэлеевском режиме при  $P_e = 3,0$  увеличение давления за счет нагрева жидкости составляет несколько тысячных долей начального давления. Поведение кривых на фиг. 5 показывает, что при  $R \rightarrow 0$  скорость поверхности пузырька  $w_{1R}$  резко нарастает, жидкость из-за конечной теплопроводности не в состоянии при этом быстро отводить тепло, выделяющееся при конденсации, и обеспечивать выполнение условия  $p_2 = p_s(T_0) = \text{const}$ .

В результате давление в пузырьке растет, что может приводить к неполному схлопыванию пузырька и последующим его колебаниям. В этом случае ударная волна может иметь пикообразную осцилляционную струк-

туру, обнаруженную в экспериментах [19] для сильных ударных волн ( $P_e \gg 6$ ) в жидкости с пузырьками газа.

Результаты расчетов показали определяющее влияние межфазного теплообмена на структуру ударных волн в парожидкостных средах. По сравнению с ударными волнами в жидкости, содержащей пузырьки нерастворимого и неконденсирующегося газа, толщина стационарной предельной ударной волны в жидкости с паровыми пузырьками определяется температуропроводностью жидкости, а не газа. Для паровых пузырьков в воде с  $R_0 \sim 1$  мм при  $p_0 = 1$  бар толщина стационарной ударной волны имеет порядок нескольких сантиметров, в то время как в случае газовых пузырьков такого же размера она может достигать  $\sim 1$  м. Однако увеличение начального давления может приводить к заметному утолщению стационарной волны. На фиг. 6 показана структура ударной волны в кипящей воде с паровыми пузырьками при  $p_0 = 5$  бар;  $R_0 = 1,4$  мм;  $P_e = 1,38$ ;  $\alpha_{20} = 0,018$ . Видно, что в этом случае толщина стационарной волны увеличивается до  $\sim 6$  м. Это связано не только с увеличением скорости волны, но и с увеличением начальной массы пузырьков при фиксированном начальном радиусе, что приводит к заметному увеличению характерного времени смыкания пузырьков в тепловом режиме с ростом  $p_0$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
2. Wijngaarden L. van. One-dimensional flow of liquids containing small gas bubbles. — In: Annu. Rev. Fluid Mech., v. 4, Palo Alto, Calif., 1972, p. 369–396.
3. Noordzij L. Shock waves in mixtures of liquids and air bubbles. Ph. D. Thesis. Twenthl, Twenthl Univ., 1973.
4. Кутателадзе С. С., Бурдуков А. П., Кузнецов В. В., Накоряков В. Е., Покусеев Б. Г., Шрейбер И. Р. О структуре слабой ударной волны в газожидкостной среде. — Докл. АН СССР, 1972, т. 207, № 2, с. 313–315.
5. Гельфанд Б. Е., Губин С. А., Козарко Б. М., Козарко С. М. Исследование волн сжатия в смеси жидкости с пузырьками газа. — Докл. АН СССР, 1973, т. 213, № 5, с. 1043–1046.
6. Накоряков В. Е., Соболев В. В., Шрейбер И. Р. Волны конечной амплитуды в двухфазных системах. — В кн.: Волновые процессы в двухфазных системах. Новосибирск, 1975, с. 5–53.
7. Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С., Шагапов В. Ш. Об ударных волнах в жидкости с пузырьками газа. — Докл. АН СССР, 1974, т. 214, № 4, с. 779–782.
8. Нигматулин Р. И., Шагапов В. Ш. Структура ударных волн в жидкости, содержащей пузырьки газа. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 6, с. 30–41.
9. Айдагулов Р. Р., Хабеев Н. С., Шагапов В. Ш. Структура ударной волны в жидкости с пузырьками газа с учетом нестационарного межфазного теплообмена. — ПМТФ, 1977, № 3, с. 67–74.
10. Губайдуллин А. А., Ивандеев А. И., Нигматулин Р. И. Нестационарные волны в жидкости с пузырьками газа. — Докл. АН СССР, 1976, т. 226, № 6, с. 1299–1302.
11. Губайдуллин А. А., Ивандеев А. И., Нигматулин Р. И. Исследование нестационарных ударных волн в газожидкостных смесях пузырьковой структуры. — ПМТФ, 1978, № 2, с. 78–86.
12. Trammell G. T. Sound waves in water containing vapor bubbles. — J. Appl. Phys., 1962, v. 33, № 5, p. 1662–1670.
13. Акуличев В. А. Ультразвуковые волны в жидкостях с паровыми пузырьками. — Акуст. ж., 1975, т. 21, № 3, с. 351–359.
14. Накоряков В. Е., Шрейбер И. Р. Модель распространения возмущений в парожидкостной смеси. — Теплофизика высоких температур, 1979, № 4, с. 798–803.
15. Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С. Динамика паровых пузырьков. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 3, с. 59–67.
16. Гасенко В. Г., Накоряков В. Е., Шрейбер И. Р. Усиление ударной волны в жидкости с пузырьками газа. — Докл. АН СССР, 1980, т. 253, № 6, с. 1330–1332.
17. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1973, 736 с.
18. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 720 с.
19. Джекнис Б. К. Распространение умеренно сильных ударных волн в двухфазной среде. — Изв. АН ЛатвССР. Сер. физ. и техн., 1978, № 1, с. 75–81.

Москва

Поступила в редакцию  
16.II.1981