

УДК 533.6.011

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ГИПЕРЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ ТЕЛ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ОТРЫВА ТОНКОГО УДАРНОГО СЛОЯ

АБРАМОВСКИЙ Е. Р., ЛЫЧАГИН Н. Н.

Рассматривается задача о гиперзвуковом обтекании невязким потоком совершенного газа выпуклого тела с непрерывно меняющейся кривизной. Решение ищется в рамках асимптотической теории сильно сжатого газа [1-4] при числе $M_\infty \rightarrow \infty$ и показателе адиабаты $\gamma \rightarrow 1$.

Возмущенный поток при заданных предположениях расположен в тонком ударном слое между телом и скачком. В точке, где давление, найденное по формуле Ньютона - Буземана, обращается в нуль, происходит отрыв течения и образование свободного слоя, который примыкает к ударной волне [1-4].

Особенность асимптотических разложений по параметру $\varepsilon_1 = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$, связанная с отрывом предельно сжатого слоя, исследовалась ранее различными методами [3-9]. Локальные решения задачи, пригодные в окрестности особенности, получены для некоторых простых тел [3-7]. Другие решения [7, 9] устраняют особенность, но не дают переходного решения целиком.

В настоящей работе строится асимптотическое решение, описывающее переход от присоединенного слоя к свободному для достаточно широкого класса течений.

1. Исходная система уравнений состоит из уравнения неразрывности и уравнения движения в проекции на нормаль к линиям тока

$$\frac{\partial \cos \theta}{\partial \psi} = \frac{\sin^3 \theta}{1 + \varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\varepsilon_1 q^2 - \varepsilon_0}{y^j q p \sin \theta} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial \psi} = \frac{\partial (q \cos \theta)}{y^j \partial y} \quad (1.1)$$

Здесь p — давление, отнесенное к удвоенному скоростному напору; q — скорость газа, отнесенная к скорости набегающего потока; θ — угол наклона линии тока к оси x , которая совпадает с осью симметрии тела и имеет начало в его вершине; y — расстояние от данной точки течения до оси x ; $j=0$ или 1 для плоского или осесимметричного течения соответственно. Параметр $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 + (1 - \varepsilon_1) M_\infty^{-2}$ представляет собой отношение плотностей на прямом скачке уплотнения. Скорость газа предполагается известной функцией энтропии и давления.

В основе предлагаемого метода решения лежит предположение о том, что главный член для давления в ударном слое не обращается в нуль, если он выражен через допредельную форму ударной волны. Это позволяет выписать высшие члены разложений по параметрам $\varepsilon_0, \varepsilon_1$, в которых нет явно выраженной особенности. Сохранение допредельной формы скачка в высших членах разложений было предложено в работе [10] и применялось в ряде других работ. Аналогично [11] решение исходной системы ищется методом последовательных приближений. За нулевое приближение берется предельное решение

$$\theta_0 = \sigma(y), \quad q_0 = \cos \sigma(\xi), \quad p_0 = \sin^2 \sigma - \frac{1}{y^j R} \int_{\xi}^y q_0 \xi^j d\xi \quad (1.2)$$

Здесь σ — угол наклона скачка к оси x ; $\xi^{1+j} = (1+j)\psi$.

Подставляя (1.2) в правые части (1.1) и интегрируя поперек ударного слоя в направлении от скачка к телу, получим первое приближение в виде асимптотических разложений по параметрам ϵ_0 и ϵ_1 . Из уравнений неразрывности следует

$$\cos \theta = \cos \sigma + \epsilon_0 \varphi_0 + \epsilon_1 \varphi_1 \quad (1.3)$$

$$\varphi_0 = \sin^3 \sigma \int_{\xi}^y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\xi^j d\xi}{y^j q_1 p_0 \sin \sigma} \right) + \frac{1}{\cos \sigma}, \quad \varphi_1 = -\sin^3 \sigma \int_{\xi}^y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q_0 \xi^j d\xi}{y^j p_0 \sin \sigma} \right) - \cos \sigma \quad (1.4)$$

$$q_1^2 = q_0^2(\xi) - 2\epsilon_0 \ln p_0 \quad (1.5)$$

В выражении для скорости (1.5) оставлен допредельный член, который учитывает влияние энтропийного слоя и устраняет расходимость интеграла в первом соотношении (1.4) в окрестности точки торможения [11].

Аналогичным образом можно получить второе и последующие приближения, представив их в виде составных асимптотических разложений типа (1.3). Коэффициенты этих разложений выражаются в виде квадратур [1, 11] и в данном случае определяются только формой скачка. Таким образом, разложение (1.3) дает решение обратной задачи. Имея допредельные члены в таком разложении, можно перейти к решению прямой задачи, потребовав выполнения условия безотрывного обтекания на поверхности тела. Это приводит к необходимости решать интегродифференциальное уравнение для формы скачка, которое следует из (1.3) при $\psi=0$:

$$\cos \theta_T = \cos \sigma + \epsilon_0 \varphi_{0T} + \epsilon_1 \varphi_{1T} \quad (1.6)$$

где индекс T означает значение величины на поверхности тела.

В работе [10] уравнение для формы скачка упрощалось в окрестности точки торможения. Ниже приводится упрощение уравнения (1.6) на основе локального асимптотического исследования последних слагаемых в окрестности точки отрыва.

Допредельные члены в соотношении (1.6) представляют собой неопределенности типа $0 \cdot \infty$ в упомянутой окрестности [8]. Для раскрытия данной неопределенности необходимо найти главные члены асимптотики коэффициентов φ_0 , φ_1 , когда давление на поверхности тела $p_T \rightarrow 0$. Вид этой асимптотики зависит от формы носка тела. Ниже рассматриваются тела, имеющие степенной носок вида $x \sim By^n/n$ ($n \geq 1$).

Из соотношений (1.2), (1.4), (1.5) в окрестности точки отрыва следует

$$p_0 \approx p_T + \frac{B \xi^{n+j}(n+j)}{y^j R}, \quad p_T = \sin^2 \sigma - \frac{1}{y^j R} \int_0^y q_0 \xi^j d\xi \quad (1.7)$$

$$\varphi_0 \approx \frac{\sin^3 \sigma}{y^j} \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{\sin \sigma} \int_0^{y^*} (B^2 \xi^{2n-2} - 2\epsilon_0 \ln p_0)^{-1/2} \frac{\xi^j d\xi}{p_0} \right]$$

$$\varphi_1 \approx \sin^3 \sigma \frac{d}{dy} \left(\frac{R \ln p_T}{\sin \sigma} \right) \quad (1.8)$$

Здесь и ниже звездочка означает значение величины в точке отрыва ударного слоя.

Дальнейшее упрощение коэффициента φ_0 при $p_T \rightarrow 0$ возможно, если ограничить изменение параметра n некоторым диапазоном.

2. Рассмотрим следующие случаи. Пусть тело имеет острый носок с углом полураствора θ_{T_0} ($n=1$). Из (1.8) получим

$$\varphi_0 \simeq -\frac{\sin^3 \sigma}{\cos^2 \theta_{T_0}} \frac{d}{dy} \left(\frac{R \ln p_T}{\sin \sigma} \right) \quad (2.1)$$

Тело имеет тупой носок, но влиянием энтропийного слоя на распределение скорости можно пренебречь ($1 < n < 2+j$)

$$\varphi_0 \simeq \frac{B^{d-2}}{(n+j)} \int_0^\infty \frac{t^{-d} dt}{1+t} \frac{\sin^3 \sigma}{y^{jd}} \frac{d}{dy} \left(\frac{R^{1-d}}{p_T^d \sin \sigma} \right), \quad d=2 \frac{n-1}{n+j}$$

Здесь не рассматриваются значения n , близкие к единице.

В остальных случаях необходим учет влияния энтропийного слоя. При $n > 2+j$ можно пренебречь влиянием центробежных сил, вызывающих изменение давления p_0 поперек ударного слоя вблизи особенности. Тогда из (1.8) получим

$$\varphi_0 = \frac{IB^{2\lambda-1} \sin^3 \sigma}{y_*^j} \frac{d}{dy} \left[\frac{(-2\varepsilon_0 \ln p_T)^{-\lambda}}{p_T \sin \sigma} \right], \quad \lambda = \frac{n-j-2}{2(n-1)},$$

$$I = \int_0^\infty (1+t^{2n-2}) t^j dt$$

Последние два предположения являются априорными и могут быть проверены после решения задачи. Некоторая малая окрестность значения $n=2+j$ исключается из рассмотрения, поскольку указанные допущения здесь не выполняются. При $n=2+j$ асимптотика для φ_0 имеет вид, аналогичный приведенному выше, если положить $\lambda=0$, $I=0,5(1+j)^{-1} \ln(p_T/\varepsilon_0)$.

Уравнение (1.6) с учетом сделанных упрощений запишем при $n=1$ в виде

$$(\cos \sigma - \cos \theta_T) p_T = \varepsilon \operatorname{tg}^2 \theta_{T_0} R \sin^2 \sigma \frac{dp_T}{dy}, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + (M_\infty \sin \theta_{T_0})^{-2} \quad (2.2)$$

Уравнения (2.2), (1.7) образуют систему относительно неизвестных величин p_T и $\cos \sigma$ с малым параметром ε , стоящим при производной. Решение последней ищется методом сращиваемых разложений.

Внешнее решение следует из указанной системы при $\varepsilon=0$ и содержит два известных решения: присоединенный слой ($\sigma=\theta_T$) и свободный слой, форма которого определяется из (1.7), когда $p_T \equiv 0$ [2-4]. Правая часть уравнения (2.2) описывает переход от первого решения ко второму в некоторой промежуточной области, где все выписанные в (2.2) члены имеют один порядок малости.

Внутреннее разложение имеет вид

$$\cos \sigma = \cos \theta_{T*} + \mu \eta / R_{T*} + \mu^2 \Omega(\eta), \quad p_T = \mu p_i(\eta) \quad (2.3)$$

Здесь $\mu = \varepsilon^{1/2}$, $\eta = (y - y_*) / \mu$.

Подставим разложения (2.3) в систему (1.7), (2.2). Сохраняя члены одного порядка малости и исключив функцию Ω , получим уравнение для давления в переходной области

$$p_i = \left(\frac{dP}{dy} \right)_* \eta + A \frac{d^2}{d\eta^2} \left(\ln \frac{1}{p_i} \right), \quad A = \operatorname{tg}^2 \theta_{T_0} R_{T*}^2 \sin^4 \theta_{T*} \quad (2.4)$$

где давление P рассчитывается по формуле Ньютона — Буземана.

Граничные условия следуют из условия срачивания внутреннего решения с внешним и для величины p_i имеют вид

$$p_i \rightarrow \left(\frac{dP}{dy} \right)_* \eta \quad (\eta \rightarrow -\infty), \quad p_i \rightarrow 0 \quad (\eta \rightarrow \infty) \quad (2.5)$$

Если решение задачи (2.4), (2.5) существует, то аналогично [5] можно показать, что форма скачка в переходной области срачивается с формой свободного слоя. Поскольку указанная задача требует численного решения, удобно перейти к функции $z(t)$ по формулам

$$p_i = Cz(t), \quad t = - \left(\frac{dP}{dy} \right)_* \frac{\eta}{C}, \quad C = \left[A \left(\frac{dP}{dy} \right)_*^{2-\alpha} \right] \quad (2.6)$$

где $\alpha = 1/3$, а функция $z(t)$ определяется из решения задачи

$$z = -t + [F(z)]'', \quad z \rightarrow -t \quad (t \rightarrow -\infty), \quad z \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad (2.7)$$

где $F(z) = -\ln z$, а штрих означает дифференцирование по t .

Окончательно давление на наветренной части поверхности тела можно выразить формулами

$$p_T = P - P_i + p_* \frac{z(t)}{z(0)}, \quad 0 \leq y \leq y_* \quad (2.8)$$

$$p_T = p_* \frac{z(t)}{z(0)}, \quad y > y_*, \quad p_* = Cz(0)\mu, \quad t = - \frac{z(0)}{p_*} P_i$$

В этих формулах P_i — линейный член разложения в ряд формулы Ньютона — Буземана в точке отрыва; p_* — асимптотическое значение давления в указанной точке.

Для других значений показателя n соотношения (2.6)–(2.8) сохраняют тот же вид. Меняются лишь выражения для коэффициента A и показателя степени α в (2.6), для функции F в уравнении (2.7), а также вид порядковой функции μ в (2.8)

$$1 < n < 2+j, \quad \alpha = 1/(3+d), \quad \mu = \varepsilon_0^d, \quad F = z^{-d}$$

$$A = \int_0^\infty \frac{s^{-d} ds}{1+s} \frac{\sin^4 \theta_{T*}}{y_*^{jd} (n+j)^d} \left(\frac{R_{T*}}{B} \right)$$

$$n = 2+j, \quad \alpha = 1/4, \quad a = \sin^4 \theta_{T*} y_*^{-j} R_{T*}/B, \quad F = z^{-1}$$

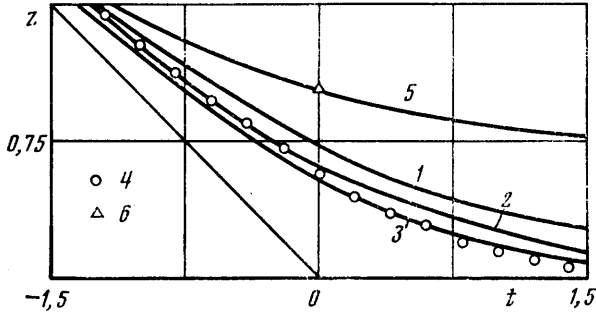
$$A = 0,5a/(1+j), \quad \mu = (-\varepsilon_0 \ln \varepsilon_0)^\alpha$$

$$n > 2+j, \quad A = aIB^{2\lambda} [(1-\lambda)/2]^{-\lambda}, \quad \mu = \varepsilon_0^{(1-\lambda)/4} (-\ln \varepsilon_0)^{-\lambda/4}$$

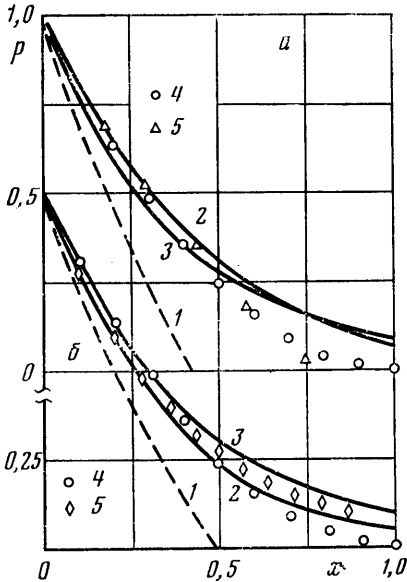
Из приведенных решений вытекает свойство подобия течений в рассматриваемой переходной области. При $n > 2+j$ подобие соблюдается для всех n .

Решение задачи, изложенное выше, может быть легко обобщено на трехмерные течения. Для этого достаточно записать известные предельные решения через геометрические параметры скачка и получить уравнения, определяющие допредельную форму ударной волны. Упрощения, аналогичные проделанным выше, приводят также к соотношениям типа (2.6)–(2.8) [12, 13]. Например, в случае обтекания конических тел с гладким

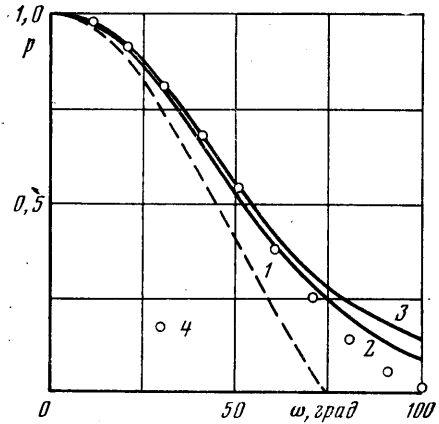
контуrom в указанных соотношениях следует положить: $F=z^{-1/2}$, $\alpha=2/7$, $\mu=\varepsilon^2$. Основная трудность при переходе к трехмерным течениям заключена в определении коэффициента C , который зависит от геометрии поверхности тела на участке от носка до линии отрыва и определяется из предельного решения [4, 13]. Свойство локального подобия течений в окрестности указанной линии сохраняется, за исключением тех ее точек, где параметр C принимает большие значения.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

3. Задачу по определению зависимости $z(t)$ надо решать численно, однако свойство подобия позволяет построить эту функцию заранее для достаточно широкого класса течений.

На фиг. 1 представлены решения задачи (2.7) для случаев: $F=z^{-1}$ (кривая 1), $F=z^{-1/2}$ (кривая 2), $F=z^{-1/2}$ (кривая 3) и $F=-\ln z$ (точки 4). Кривая 2 соответствует классу осесимметричных течений возле тел с конечным радиусом кривизны в носке.

Легко убедиться, что решение Фримена для сферы [5], содержится в полученном здесь решении как частный случай. Кривая 5 представляет решение для сферы из работы [7], в которой использовался метод деформированных координат. Результат работы [9] представлен точкой 6.

На фиг. 2, а приведены результаты расчетов давления на цилиндре p , отнесенное к давлению в точке растекания газа. Здесь сравниваются данные расчетов по формулам Ньютона — Буземана (кривая 1), Ньютона (точки 4), работы [10] (точки 5), по формулам (2.8) (кривая 3) с точным численным решением [14] (кривая 2) при $M_\infty=20$, $\gamma=1,4$. Аналогичные сравнения в случае обтекания сферы приведены на фиг. 2, б.

В качестве примера трехмерных течений рассчитывалось обтекание кругового конуса с углом полураствора 10° под углом атаки 30° . На фиг. 3 приведены сравнения расчетов, аналогичные фиг. 2. Точное численное решение взято из [16].

Сравнения показывают, что решение, описывающее переход от присоединенного слоя к свободному, не только качественно устраняет особенность, но и дает количественно верные результаты, которые всегда точнее предельных. При $\gamma=1,4$ асимптотические решения еще недостаточно точны. Во многих случаях погрешность формул (2.8) может быть уменьшена, если верхний предел интегралов, фигурирующих в выражениях для коэффициента A , оставлять конечным, поскольку он имеет низкий порядок малости (для сферы — $O(p_*^{-1/2})$). Тогда соотношение для расчета p_* представляет собой уравнение, из которого указанная величина определяется итерациями. При этом уже первая итерация значительно уточняет все решение. На фиг. 2, б представлен результат такого уточнения на примере обтекания сферы (точки 5).

γ	N_1	N_2	N_3
1,4	0,92	0,48	0,77
1,1	0,80	0,57	0,93
1,05	0,70	0,60	0,97

В таблице приводятся сравнения отношений давления в точке отрыва на сфере, взятого из численных решений работы [15], к теоретическим значениям (N_1 — по теории Ньютона, N_2 — по результатам работ [7, 9], N_3 — по формулам (2.8) для p_* с учетом первой итерации). Из таблицы видно, что при $\gamma \rightarrow 1$ согласованность численного и асимптотического (2.8) решений улучшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
2. Лунев В. В. Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975. 327 с.
3. Hayes W. D., Probstein R. F. Hypersonic flow theory. N. Y. and London: Acad. Press, 2nd ed., 1966.
4. Гиро Ж. Основные вопросы теории гиперзвуковых течений. М.: Мир, 1965. 299 с.
5. Freeman N. On a singular point in the Newtonian theory of hypersonic flow.— J. Fluid Mech., 1960, v. 8, pt 1, p. 109–122.
6. Bausch H. Die Singularitätsstelle in der Grennschichtmethode der Hyperschallgasdynamik.— ZAMM, 1962, B. 42, № 12, S. 557–564.
7. Ockendon J. R. The separation of Newtonian shock layers.— J. Fluid Mech., 1966, v. 26, pt 3, p. 563–572.
8. Абрамовский Е. Р., Лычагин Н. Н. Об уточнении теории Ньютона — Буземана в окрестности точки отрыва ударного слоя на телах вращения.— В кн.: Прикладная аэродинамика космических аппаратов. Киев, 1977, с. 88–94.
9. Баранцев Р. Г., Энгельгарт В. Н. Асимптотическое решение вблизи точки отрыва ударного слоя при гиперзвуковом обтекании затупленных тел.— Вестн. ЛГУ. Матем.; мех., астрон., 1979, вып. 4, № 19, с. 61–66.

10. Гонор А. Л., Остапенко Н. А. Аналитическое исследование гиперзвукового обтекания затупленных тел.— Научн. тр. Ин-та мех. МГУ, 1974, № 32, с. 109–121.
11. Баранцев Р. Г., Петров В. П., Цигелов И. М. Асимптотика по $\gamma \rightarrow 1$ в задаче гиперзвукового обтекания затупленных тел.— Вестн. ЛГУ. Матем., механ., астрон., 1970, № 13, вып. 3, с. 83–91.
12. Лычагин Н. Н. Об особенности теории тонкого ударного слоя в окрестности линии отрыва для некоторых трехмерных течений. Днепропетровск, 1979, 18 с. Деп. ВИНТИ, 1980, № 23–80.
13. Абрамовский Е. Р., Лычагин Н. Н. Некоторые аналитические решения задачи о гиперзвуковом обтекании трехмерных тел.— В кн.: Актуальные проблемы механики деформируемых сред. Днепропетровск: Днепропетровск. ун-т, 1979, с. 38–42.
14. Любимов А. Н., Русанов В. В. Течение газа около тупых тел. Ч. 2. М.: Наука, 1970, 379 с.
15. Запьянов З. Д. Численное исследование сверхзвукового обтекания плоских и осесимметричных затупленных тел при $M = \infty$ и $\gamma \rightarrow 1$.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 4, с. 164–168.
16. Базжин А. П., Трусова О. Н., Челышева И. Ф. Расчет течений совершенного газа около эллиптических конусов при больших углах атаки.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 4, с. 45–51.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
12.V.1980