

УДК 533.6.011

## АКУСТИЧЕСКИЕ, ЭНТРОПИЙНЫЕ И ВИХРЕВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В КАНАЛЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

ЛЕБЕДИНСКИЙ Е. В., НАТАНЗОН М. С., ЯРЛЫКОВА Н. И.

Рассмотрена задача о распространении бесконечно малых возмущений в газовом потоке, движущемся в канале переменного сечения, когда течение нельзя считать изэнтропическим и потенциальным. Решение ограничено рамками линейной теории течения идеального газа и квазиодномерным «гидравлическим» приближением для стационарного режима. Для потенциальных и изэнтропических возмущений в сопле эта задача рассмотрена в [1-4]. В работе [1] приведено обобщение задачи в направлении учета энтропийных возмущений в сопле для случая продольных колебаний. В данной работе рассмотрен случай произвольных мод колебаний в сопле с учетом отличных от нуля не только энтропийных, но и вихревых возмущений в движущемся потоке. Представлено разложение решений для каждого из трех типов возмущений: акустических, энтропийных и вихревых в ряды по цилиндрическим функциям. Показано, что в рассматриваемом приближении каждая мода колебаний может быть проанализирована независимо от остальных. В частном случае течения в сопле Лавала дано обобщение широко используемого в акустике понятия импеданса (проводимости) на случай учета энтропийных и вихревых возмущений. Приведены численные оценки вклада в динамику потока акустических, энтропийных и вихревых возмущений для продольных и поперечных мод колебаний.

1. Примем следующие упрощающие допущения: канал будем считать осесимметричным, жидкость идеальной, невозмущенный (стационарный) поток изэнтропическим, потенциальным, обладающим осевой симметрией. Нестационарные процессы рассмотрим в линейном приближении, считая независимость всех динамических переменных от времени гармонической. Эксперименты авторов и работы [5] показывают, что линейное приближение справедливо при амплитудах пульсаций давления, не превышающих 5-10% от среднего уровня.

Система уравнений, описывающих в линейном приближении нестационарные процессы, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho'}{\rho_0} \right) + \mathbf{v}_0 \nabla \left( \frac{\rho'}{\rho_0} \right) + \operatorname{div} \mathbf{V}' + \left( \mathbf{v} \frac{\nabla \rho_0}{\rho_0} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}' + \operatorname{grad} \left( V_0 \cdot \mathbf{V}' + \frac{P'}{\rho_0} \right) &= - [\operatorname{rot} \mathbf{V}' \times \mathbf{v}_0] - \frac{S'}{c_p} \left( \frac{\nabla P_0}{\rho_0} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} S' + (\mathbf{v}_0 \nabla S'') &= 0; \quad \frac{S'}{c_p} = \frac{1}{c_0^2} \left( \frac{P'}{\rho_0} \right) - \left( \frac{\rho'}{\rho_0} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

В соотношениях (1.1) индекс штрих обозначает зависящее от времени возмущение, а индекс 0 — стационарное значение соответствующей величины,  $c_p$  — теплоемкость при постоянном давлении.

На поверхности канала должно выполняться граничное условие

$$\mathbf{v}_n' = 0 \quad (r=R(x)) \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к поверхности, а  $R=R(x)$  — текущий радиус поперечного сечения канала. Вопрос о задании граничных условий на левом и правом концах канала будет рассмотрен несколько позже.

Введем в рассмотрение функции тока  $\eta$  и потенциал  $\xi$  стационарного течения, определив последние при помощи соотношений

$$r\rho_0 V_{0x} = \frac{\partial \eta}{\partial r}; \quad r\rho_0 V_{0r} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad V_{0x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}; \quad V_{0r} = \frac{\partial \xi}{\partial r}$$

Здесь  $V_{0x}$ ,  $V_{0r}$ ,  $V_{0\varphi}$  — компоненты вектора скорости ( $V_0$ ) в цилиндрической системе координат. Перейдем от цилиндрической системы координат  $(x, r, \varphi)$  к криволинейной системе координат  $(\xi, \eta, \varphi)$ , у которой  $\xi$  — координата, отсчитываемая вдоль линии тока, а  $\eta$  — координата, отсчитываемая вдоль эквипотенциальной линии в меридиональной плоскости  $\varphi = \text{const}$ .

Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho'}{\rho_0} \right) + V_0^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\rho'}{\rho_0} \right) + V_0^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \delta u + V_0^2 \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho_0^2 r^2 \vartheta') + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{w'}{r^2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( V_0^2 \delta u + \frac{P'}{\rho_0} \right) &= -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{S'}{c_p} \right) \frac{\partial P_0}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \vartheta'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( V_0^2 \delta u + \frac{P'}{\rho_0} \right) + V_0^2 \Omega_{\varphi}' &= -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{S'}{c_p} \right) \frac{\partial P_0}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial t} w' + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( V_0^2 \delta u + \frac{P'}{\rho_0} \right) - V_0^2 \Omega_{\eta}' &= 0 \\ \frac{\partial S'}{\partial t} + V_0^2 \frac{\partial S'}{\partial \xi} &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\delta u = \frac{V_{\xi}'}{V_0}, \quad \vartheta' = \frac{V_{\eta}'}{\rho_0 V_0 r}, \quad w' = r V_{\varphi}'$$

$$\Omega_{\xi}' = \frac{q_{\xi}'}{\rho_0 V_0} = \frac{\partial w'}{\partial \eta} - \frac{\partial \vartheta'}{\partial \varphi}, \quad \Omega_{\eta}' = \frac{r q_{\eta}'}{V_0} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \delta u - \frac{\partial}{\partial \xi} w'$$

$$\Omega_{\varphi}' = \frac{q_{\varphi}'}{\rho_0 V_0^2 r} = \frac{\partial}{\partial \xi} \vartheta' - \frac{\partial}{\partial \eta} \delta u, \quad \mathbf{q}' = \text{rot } \mathbf{V}'$$

Воспользуемся квазиодномерным (гидравлическим) приближением для описания стационарного течения:

$$V_0 = V_0(\xi), \quad \rho_0 = \rho_0(\xi), \quad \eta = \frac{1}{2} \rho_0 V_0 r^2 \quad (1.4)$$

Тогда, используя (1.4), а также гармоническую зависимость переменных от времени ( $X' = X' \exp(i\omega t)$ ) из (1.3), получим следующую систему уравнений для комплексных амплитуд колебаний:

$$i\omega \left( \frac{\rho'}{\rho_0} \right) + V_0^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\rho'}{\rho_0} \right) + V_0 \frac{\partial}{\partial \xi} \delta u + \rho_0 V_0 \left[ 2 \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta \vartheta') + \frac{1}{2\eta} \frac{\partial}{\partial \varphi} w' \right] = 0 \quad (1.5)$$

$$i\omega S' + V_0^2 \frac{\partial S'}{\partial \xi} = 0 \quad (1.6)$$

$$i\omega u' + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( V_0^2 \delta u + \frac{P'}{\rho_0} \right) = h = \frac{S'}{c_p} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{V_0^2}{2} \right)$$

$$i\omega \vartheta' + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( V_0^2 \delta u + \frac{P'}{\rho_0} \right) = -V_0^2 \Omega_{\varphi}' \quad (1.7)$$

$$i\omega w' + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( V_0'^2 \delta u + \frac{P'}{\rho_0} \right) = V_0'^2 \Omega_\eta'$$

Поскольку в рассматриваемой криволинейной системе координат поверхность канала является одной из линий тока, граничное условие (1.2) запишем в виде

$$\vartheta' = 0 \quad \left( \eta = \eta_0 = \frac{1}{2} \rho_0 V_0 R^2 \right) \quad (1.8)$$

2. Найдем решение, связанное с энтропийными ( $S'$ ) и вихревыми ( $\Omega'$ ) возмущениями в канале. С учетом (1.3) из уравнений (1.7) следует

$$i\omega \Omega_\xi' + V_0'^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \Omega_\xi' = 0 \quad (2.1)$$

$$i\omega \Omega_\eta' + \frac{\partial}{\partial \xi} (V_0'^2 \Omega_\eta') = \frac{\partial h}{\partial \varphi}, \quad i\omega \Omega_\varphi' + \frac{\partial}{\partial \xi} (V_0'^2 \Omega_\varphi') = -\frac{\partial h}{\partial \eta} \quad (2.2)$$

В результате интегрирования уравнений (1.6), (2.1)–(2.2) получим

$$S' = S_l' \exp \left[ -\int_0^\xi \frac{i\omega}{V_0'^2} d\xi \right], \quad \Omega_\xi' = (\Omega_\xi')_l \exp \left[ -\int_0^\xi \frac{i\omega}{V_0'^2} d\xi \right] \quad (2.3)$$

$$(V_0'^2 \Omega_\eta') = \left\{ (V_0'^2 \Omega_\eta')_l + \frac{1}{2} (V_0'^2 - V_{0l}^2) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{S'}{c_p} \right)_l \right\} \exp \left[ -\int_0^\xi \frac{i\omega}{V_0'^2} d\xi \right] \quad (2.4)$$

$$(V_0'^2 \Omega_\varphi') = \left\{ (V_0'^2 \Omega_\varphi')_l - \frac{1}{2} (V_0'^2 - V_{0l}^2) \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{S'}{c_p} \right)_l \right\} \exp \left[ -\int_0^\xi \frac{i\omega}{V_0'^2} d\xi \right]$$

Индекс  $l$  — обозначает принадлежность переменной к начальному сечению.

Формулы (2.3), (2.4) показывают, что вихревые возмущения в канале обусловлены наличием в начальном сечении вектора вихря и возмущения энтропии. Второй источник возмущений способен порождать вихревые возмущения в результате взаимодействия неоднородных в поперечном направлении энтропийных возмущений с переменными в осевом направлении параметрами стационарного потока. В частности, для течения в цилиндрическом канале, когда  $V_0 = V_{0l}$ , этот источник вихревых возмущений равен нулю.

В начальном сечении три компоненты вектора вихря должны удовлетворять соотношению  $\text{div } \Omega' = 0$ , или

$$\frac{i\omega}{V_{0l}^2} (\Omega_\xi')_l = \frac{\partial}{\partial \eta} (\Omega_\eta')_l + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\Omega_\varphi')_l \quad (2.5)$$

3. Введем в рассмотрение функцию  $\Psi(\xi, \eta, \varphi)$  (квазипотенциал) соотношением (3.1). Тогда из (1.7) имеем

$$\frac{P'}{\rho_0} + V_0'^2 \delta u = i\omega \Psi \quad (3.1)$$

$$\delta u = -\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{h}{i\omega}, \quad \vartheta' = -\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} - \frac{V_0'^2}{i\omega} \Omega_\varphi', \quad w' = -\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} + \frac{V_0'^2}{i\omega} \Omega_\eta' \quad (3.2)$$

Если  $S'=0$  и  $\Omega'=0$ , то, согласно (3.2), квазипотенциал будет совпадать с потенциалом, описывающим акустическое поле скоростей. Подставив (3.2) в (3.1) и (1.5), получим

$$\frac{P'}{\rho_0} = i\omega \Psi + V_0^2 \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} - \frac{V_0^2}{i\omega} h \quad (3.3)$$

$$V_0^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \left( 1 - \frac{V_0^2}{c_0^2} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right] - 2i\omega \frac{V_0^2}{c_0^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \left[ \frac{\omega^2}{c_0^2} - i\omega V_0^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{c_0^2} \right) \right] \Psi + \rho_0 V_0 \Delta \Psi = Q \quad (3.4)$$

$$Q = \left\{ -\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{V_0^2}{2} \right) + \frac{V_0^2}{i\omega} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \left( 1 - \frac{V_0^2}{c_0^2} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{V_0^2}{2} \right) \right] \right\} \times \quad (3.5)$$

$$\times \left( \frac{S'}{c_p} \right)_l \exp \left[ -\int_0^{\xi} \frac{i\omega}{V_0^2} d\xi \right] + \rho_0 V_0 \left\{ \frac{1}{2i\omega} (V_0^2 - V_{0l}^2) \times \right.$$

$$\left. \times \Delta \left( \frac{S'}{c_p} \right)_l - L_l \right\} \exp \left[ -\int_0^{\xi} \frac{i\omega}{V_0^2} d\xi \right]$$

$$L_l = \frac{V_{0l}^2}{i\omega} \left\{ -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\Omega_\eta')_l + 2 \frac{\partial}{\partial \eta} [\eta (\Omega_\varphi')_l] \right\}. \quad (3.6)$$

Уравнение для квазипотенциала (3.4) аналогично неоднородному уравнению Гельмгольца с правой частью, которая свидетельствует о наличии в потоке источников дополнительных акустических возмущений. Согласно (3.5) и (3.6), такими источниками являются энтропийные и вихревые возмущения. При этом энтропийные возмущения порождают акустические, только при условии их взаимодействия с переменными в осевом направлении параметрами стационарного потока. Если кроме однородности стационарного течения наложить еще и условие потенциальности течения, то уравнение (3.4) совпадает с уравнением для потенциала в [6].

4. Для того чтобы найти решение уравнения (3.4) в виде ряда и удовлетворить граничному условию (1.8), в дальнейшем удобно считать заданными в начальном сечении канала функции  $S'_l$ ,  $(\Omega_\xi')_l$ ,  $L_l$ . Связь двух последних функций с входящими в решения (2.4) функциями  $(\Omega_\eta')_l$  и  $(\Omega_\varphi')_l$  устанавливается при помощи соотношений (2.5) и (3.6).

Решение системы уравнений (2.5), (3.6) можно искать в виде

$$\frac{V_{0l}^2}{i\omega} (\Omega_\eta')_l = -\frac{\partial D}{\partial \varphi} + 2\eta \frac{\partial E}{\partial \eta}, \quad \frac{V_{0l}^2}{i\omega} (\Omega_\varphi')_l = \frac{\partial D}{\partial \eta} + \frac{1}{2\eta} \frac{\partial E}{\partial \varphi} \quad (4.1)$$

Подставив (4.1) в (2.5) и (3.6), найдем

$$\Delta E = (\Omega_\xi')_l, \quad \Delta D = L_l \quad (4.2)$$

Представим функции  $E$  и  $D$  в виде ряда

$$E = \sum_{mn} E_{mn} I_m \left( v_{mn} \sqrt{\frac{\eta}{\eta_0}} \right) \cos m\varphi, \quad D = \sum_{mn} D_{mn} I_m \left( v_{mn} \sqrt{\frac{\eta}{\eta_0}} \right) \cos m\varphi \quad (4.3)$$

где  $I_m$  — функция Бесселя от переменной  $\sqrt{\eta}$ , а  $\nu_{mn}$ ,  $\nu_{mn}^\circ$  — соответственно корни уравнений  $I_m(\nu_{mn})=0$ ,  $I_m(\nu_{mn}^\circ)=0$ . Тогда функции  $L_i$ ,  $(\Omega'_i)_i$  допускают представление

$$L_i = -\frac{1}{2} \sum_m \frac{\nu_{mn}^2}{\eta_0} D_{mn} I_m \left( \nu_{mn} \sqrt{\frac{\eta}{\eta_0}} \right) \cos m\varphi \quad (4.4)$$

$$(\Omega'_i)_i = -\frac{1}{2} \sum_{mn} \frac{(\nu_{mn}^\circ)^2}{\eta_0} E_{mn} I_m \left( \nu_{mn}^\circ \sqrt{\frac{\eta}{\eta_0}} \right) \cos m\varphi$$

Будем искать решение для квазипотенциала  $\Psi$  и энтропии  $S'$  в виде

$$\Psi = \sum_{mn} \Psi_{mn}(\xi) I_m \left( \nu_{mn} \sqrt{\frac{\eta}{\eta_0}} \right) \cos m\varphi, \quad S' = \sum_{mn} S_{mn}'(\xi) I_m \left( \nu_{mn} \sqrt{\frac{\eta}{\eta_0}} \right) \cos m\varphi \quad (4.5)$$

Согласно соотношениям (3.1), (3.2), аналогичные разложения можно провести также для пульсаций давления и пульсаций осевой компоненты вектора скорости. Подставив (4.4), (4.5) в уравнение (3.4), получим

$$H\Psi_{mn} = Q_{mn}, \quad H = V_0^2 \frac{d}{d\xi} \left[ \left( 1 - \frac{V_0^2}{c_0^2} \right) \frac{d}{d\xi} \right] - \quad (4.6)$$

$$-2i\omega \frac{V_0^2}{c_0^2} \frac{d}{d\xi} + \frac{\omega^2}{c_0^2} - i\omega V_0^2 \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{c_0^2} \right) - \frac{1}{2} \rho_0 V_0 \left( \frac{\nu_{mn}}{\eta_0} \right)^2$$

Здесь  $Q_{mn}$  — коэффициент разложения в ряд по цилиндрическим функциям выражения (3.5). Решение, соответствующее фиксированным значениям индексов  $m$  и  $n$ , в дальнейшем называется модой колебаний. Как видно из уравнения (4.6), для любой фиксированной моды колебаний можно найти решение независимо от остальных мод.

Если подставить соотношения (4.5), (4.3), (4.1) в уравнение (3.2) для  $\phi'$ , то нетрудно показать, что благодаря использованному выбору корней  $\nu_{mn}$  и  $\nu_{mn}^\circ$  функций Бесселя,  $\phi'$  на стенке канала обращается в нуль, т. е. построенное решение удовлетворяет граничному условию (1.8).

5. Будем считать, что на входе в канал помимо компонент вектора вихря  $(\Omega'_i)_i$  и  $L_i$  заданы также пульсации давления и осевой составляющей вектора скорости. Тогда в силу соотношений

$$(\Psi_{mn})_i = \frac{1}{i\omega} \left[ \left( \frac{P_{mn}'}{\rho_0} \right)_i + V_0^2 (\delta u_{mn})_i \right],$$

$$\left( \frac{d\Psi_{mn}}{d\xi} \right)_i = -(\delta u_{mn})_i + \frac{d}{d\xi} \left( \frac{V_0^2}{2} \right) \left( \frac{S_{mn}'}{c_p} \right)_i \quad (5.1)$$

которые следуют из (3.1) и (3.2), можно считать заданными в начальном сечении  $(\Psi_{mn})_i$ ,  $((d/d\xi)\Psi_{mn})_i$ .

Будем искать решение уравнения (4.6) в виде

$$\Psi_{mn}(\xi) = Y_1(\xi) (\Psi_{mn})_i + Y_2(\xi) \left( \frac{d\Psi_{mn}}{d\xi} \right)_i + Y_3(\xi) D_{mn} + Y_4(\xi) \left( \frac{S_{mn}'}{c_p} \right)_i \quad (5.2)$$

Записав (5.2) и производную от этого выражения в начальном сечении, а также подставив (5.2) в (4.6), получим следующую систему уравнений и граничных условий для определения четырех новых функций  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,

$Y_3, Y_4:$

$$\begin{aligned} HY_1=0 \quad (\xi=0; Y_1=1; \dot{Y}_1=0); \quad HY_2=0 \quad (\xi=0; Y_2=0; \dot{Y}_2=1) \\ HY_3=Q_L \quad (\xi=0; Y_3=0; \dot{Y}_3=0); \quad HY_4=Q_s \quad (\xi=0; Y_4=0; \dot{Y}_4=0) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Решение каждого из уравнений (5.3) можно найти численно. Располагая решением (5.2), можно установить связь пульсирующих параметров потока в любом сечении канала с пульсирующими параметрами в начальном сечении

$$\delta P_{mn} = \frac{P'_{mn}}{P_0} = a_{11}(\delta P_{mn})_i + a_{12}(\delta u_{mn})_i + a_{13}(L_{mn})_i + a_{14}(\delta S_{mn})_i \quad (5.4)$$

$$\delta u_{mn} = a_{21}(\delta P_{mn})_i + a_{22}(\delta u_{mn})_i + a_{23}(L_{mn})_i + a_{24}(\delta S_{mn})_i$$

$$\delta S_{mn} = \frac{S'_{mn}}{c_p} = (\delta S_{mn})_i \exp \left[ - \int_0^{\xi} \frac{i\omega}{V_0^2} d\xi \right]$$

$$L_{mn} = (L_{mn})_i \exp \left[ - \int_0^{\xi} \frac{i\omega}{V_0^2} d\xi \right] = D_{mn} \exp \left[ - \int_0^{\xi} \frac{i\omega}{V_0^2} d\xi \right]$$

Поскольку вращение частиц вокруг оси  $\xi$  не должно давать вклада в осевую компоненту вектора скорости, то параметр  $\Omega_{\xi}'$ , характеризующий угловую скорость этого вращения, не вошел в систему уравнений (5.4) в качестве внешнего воздействия.

Соотношения (5.4) показывают, что пульсации давления или пульсации осевой компоненты скорости на расстоянии  $\xi$  от начального сечения трубы могут быть вызваны не только пульсациями давления и скорости в начальном сечении канала, но и пульсациями энтропии и завихренности потока. В силу линейной постановки задачи итоговый результат от всех внешних воздействий получается суммированием. Каждый из коэффициентов матрицы  $\|a_{ik}\|$  имеет простой физический смысл. Так, например, коэффициент  $a_{12}$  характеризует величину пульсаций давления в сечении  $\xi$  канала, если пульсации скорости  $(\delta u_{mn})_i$  в начальном сечении равны единице, а пульсации давления, энтропии и вихревого возмущения равны нулю. Соотношения типа (5.4) широко встречаются в теории цепей [7] и позволяют охарактеризовать канал переменного сечения с точки зрения динамики как своеобразную линию передачи трех типов возмущений: акустических, энтропийных и вихревых.

6. Представление решения в виде (5.2) справедливо до тех пор, пока в каком-либо сечении канала не достигнута скорость потока, равная местной скорости звука ( $V_0=c_0$ ). В этом случае уравнение (4.6) в сечении ( $V_0=c_0$ ) имеет особенность. Поскольку в работе рассматриваются достаточно малые возмущения в системе, то приемлемым с физической точки зрения решением уравнения (4.6) в окрестности особой точки должно быть решение, не имеющее особенности. Требование отсутствия особенности в критическом сечении канала равносильно выполнению следующей функциональной связи между переменными в этом сечении:

$$\begin{aligned} (\delta u_{mn})_* = \alpha_* \left( \frac{\delta P_{mn}}{\gamma} \right)_* + \varepsilon_* (\delta S_{mn})_* + \mu_* (L_{mn})_* \quad (6.1) \\ \alpha_* = \frac{\sigma^2 - v_{mn}^2 \lambda^2 - i\sigma(\gamma-1)\dot{u}_*}{\sigma^2 + v_{mn}^2 \lambda^2 - 2i\sigma\dot{u}_*} \end{aligned}$$

$$\varepsilon_* = \frac{i\sigma\dot{u}_* - (1-u_l^2)v_{mn}^2\lambda^2}{-\sigma^2 - v_{mn}^2\lambda^2 + 2i\sigma\dot{u}_*}, \quad \mu_* = \frac{-i\sigma\lambda^2 v_{mn}^2}{\sigma^2 + v_{mn}^2\lambda^2 - 2i\sigma\dot{u}_*}$$

$$\sigma = \frac{\omega L_*}{c_*}, \quad \lambda = \frac{L_*}{R_*}, \quad u = \frac{V_0}{c_*}, \quad \dot{u}_* = L_* \left( \frac{du}{dx} \right)_{i*}$$

Здесь  $L_*$  — длина канала до критического сечения. Связь между переменными в критическом сечении (6.1) приводит к тому, что пульсирующие параметры на входе в канал теперь не могут задаваться произвольно.

Связь между ними можно установить, если подставить в уравнение (6.1) соотношения (5.4)

$$(\delta u_{mn})_i = \alpha_i (\delta P_{mn}/\gamma)_i + \varepsilon_i (\delta S_{mn})_i + \mu_i (L_{mn})_i \quad (6.2)$$

где коэффициенты  $\alpha_i$ ,  $\varepsilon_i$ ,  $\mu_i$  являются частотными характеристиками в начальном сечении канала с воздействиями соответственно по давлению, энтропии и завихренности [7]. Уравнение (6.2) в дальнейшем называется основным импедансным соотношением. Оно является обобщением широко используемого в акустике условия, состоящего в задании на граничной поверхности проводимости  $(\delta u = \alpha \delta P/\gamma)$  на случай течения с отличными от нуля энтропийными и вихревыми возмущениями. Если соотношение (6.2) определяется на входе в дозвуковую часть сопла, то оно характеризует динамические свойства дозвуковой части сопла.

Иногда бывает целесообразно выразить пульсации давления через пульсации расхода в изэнтропическом случае  $(\delta j = \delta u + \delta P/\gamma)$ , пульсации энтропии и пульсации завихренности.

Тогда основное импедансное соотношение примет свою вторую форму

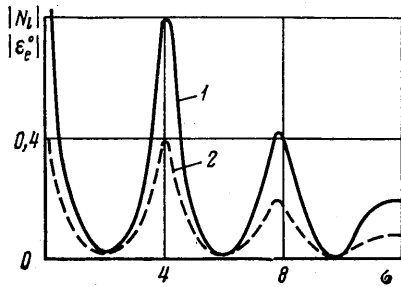
$$(\delta P_{mn})_i = N_i (\delta j_{mn})_i + \gamma \varepsilon_i (\delta S_{mn})_i + \mu_i (D_{mn})_i$$

Как уже отмечалось, по определению, частотные характеристики  $\alpha_i$  и  $N_i$  являются отношениями

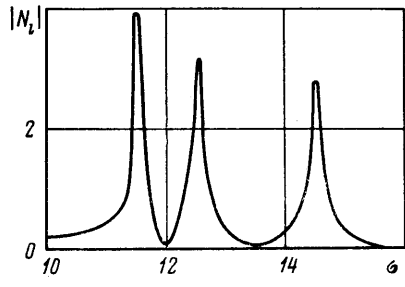
$$\alpha_i = \gamma \left( \frac{\delta u_{mn}}{\delta P_{mn}} \right)_i; \quad N_i = \left( \frac{\delta P_{mn}}{\delta j_{mn}} \right)_i \quad (\delta S_{mn} = 0; D_{mn} = 0)$$

т. е. соответствуют условиям течения для изэнтропического, потенциального потока. Поэтому  $\alpha_i$ ,  $N_i$  должны совпадать с соответствующими характеристиками, содержащимися в [1-4].

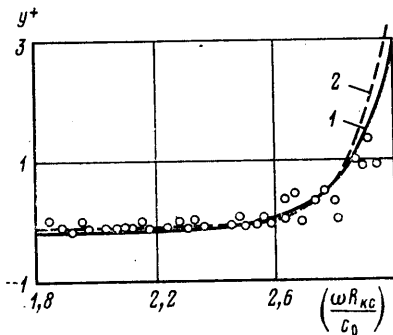
7. Изложенную методику определения динамических свойств потока проиллюстрируем несколькими численными примерами. Рассмотрим два наиболее часто встречающиеся в каналах переменного сечения моды колебаний: продольную ( $m=0$ ;  $n=0$ ;  $v_{00}=0$ ) и первую тангенциальную ( $m=1$ ;  $n=0$ ;  $v_{10}=1.84$ ). На фиг. 1 приведены амплитудные частотные характеристики канала: 1 — с воздействием по расходу, 2 — с воздействием по энтропии в функции безразмерной частоты  $\sigma = \omega(L+l)/c_*$  для случая продольных колебаний. Канал имел цилиндрический участок длиной  $L=490$  мм и радиусом  $R=120$  мм, конфузорную часть сопла длиной  $l=190$  мм и радиусом критического сечения  $R_*=45$  мм. Число Маха в цилиндрической части канала составляло  $\approx 0.09$  (при показателе адиабаты  $\gamma=1.4$ ). Амплитудная частотная характеристика  $|N_i|$  имеет вид резонансной кривой. Частоты, при которых  $|N_i|$  имеет максимум, называются резонансными, а частоты, при которых  $|N_i|$  имеет минимум, — антирезонансными. Как видим, в рассчитанном диапазоне частот наблюдаются три резонансных максимума на амплитудной частотной характеристике. С ростом частоты величины резонансных максимумов падают, т. е. резонансные свойства потока уменьшаются. Частоты резонансных максимумов близки к собственным частотам цилиндрической трубы длиной  $L_*=L+l$  с закрытыми обоими концами, однако несколько меньше их. Последнее означает, что эффективное отражение акустических возмущений от дозвуковой части сопла происходит в сечении, несколько отодвинутом от критического сечения. Амплитудная  $|\varepsilon_i|$  частотная характеристика того же канала в случае продольных колебаний повторяет график функции  $|N_i|$  с той лишь разницей, что он сжат по вертикали примерно в 2 раза. Приведенный пример показывает, что в случае продольных колебаний, когда величина пульсаций энтропии порядка величины пульсаций давления, их вклад в динамические свойства потока может оказаться существенным.



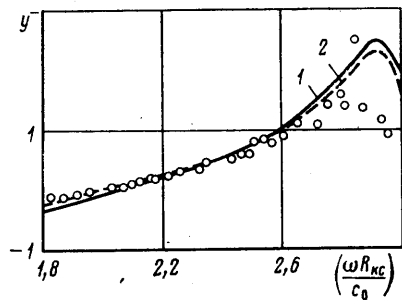
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 2 приведена амплитудная частотная характеристика канала с воздействием по расходу  $|N_1|$  для первой тангенциальной моды поперечных колебаний. Две остальные частотные характеристики канала — с воздействием по энтропии и по завихренности потока — для случая поперечных колебаний имеют те же особенности, что и частотная характеристика канала с воздействием по энтропии в случае продольных колебаний, однако максимальные значения частотной характеристики  $|\epsilon_1^\circ|$  на порядок, а частотной характеристики  $|\mu_1^\circ|$  на два порядка меньше максимальных значений частотной характеристики  $|N_1|$ . Таким образом, если величина пульсаций энтропии и завихренности потока будет одного порядка с величиной пульсации давления, то в случае поперечных мод колебаний влиянием энтропийных и вихревых возмущений на динамические свойства потока в канале можно пренебречь.

Фигуры 3, 4 иллюстрируют сопоставление с результатами экспериментов [5] результатов расчетов проводимости сопла ( $y = y^+ \rightarrow iy^- = M\alpha$ ) для первой тангенциальной моды поперечных колебаний в частном случае потенциального потока по двум методикам: данной работы (1) и работы [4] (2). Как видим, получилось удовлетворительное совпадение результатов обеих методик как между собой, так и с экспериментами.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Крокко Луиджи, Чжен Синь. Теория неустойчивости горения в жидкостных ракетных двигателях. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 351 с.
2. Руденко А. Н., Шлыкова И. С., Эпштейн В. Л. Акустическая проводимость сверхзвуковых сопел с конической входной частью при продольных и продольно-поперечных колебаниях. — Акуст. ж., 1974, т. 20, в. 4, с. 608—615.
3. Осипов А. А., Крайко А. Н. Исследование отражения возмущений от дозвуковой части сопла Лаваля. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 1, с. 84—93.
4. Linn B. T., Savell C. T. A theoretical study of three-dimensional combustion instability in liquid-propellant rocket engines. — In: 2<sup>nd</sup> Sympos. Internat. Combustion. Poitiers, 1968. Abstrs papers. Pittsburg, Pa; Combust. Inst. a. o., p. 21—23.
5. Цинн, Белл, Даниэл, Смит мл. Экспериментальное определение трехмерной акустической проводимости сопел ЖРД. — Ракетная техника и космонавтика, 1973, т. 11, № 3, с. 15—25.
6. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. М.—Л.: Гостехиздат, 1946. 220 с.
7. Агабеков Г. И. Основы теории цепей. М.: Энергия, 1969. 424 с.

Москва

Поступила в редакцию  
23.VII.1980