

УДК 532.526.75:518.61

РАСЧЕТ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ДИСКАМИ

МАТВЕЕВ Ю. Я., ПУСТОВАЛОВ В. Н.

Приводятся результаты численного исследования ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости с теплообменом от периферии к центру между двумя вращающимися дисками. Данная система представляет собой упрощенную модель одного из элементов охлаждающего тракта газовой турбины. Полные уравнения Навье – Стокса в переменных вихрь скорости – функция тока решались по явной консервативной схеме с аппроксимацией конвективных членов дивергентного типа направленными разностями. Расчеты проводились в широком диапазоне изменения безразмерных определяющих параметров задачи. Наблюдается хорошее совпадение результатов с известными экспериментальными данными.

Одна из главных трудностей, возникающих при определении термонапряженного состояния роторов турбомашин, заключается в правильной постановке граничных условий теплоотдачи. В работах [1–4] приведен обзор основных теоретических и экспериментальных исследований, относящихся к этой проблеме. В связи с трудоемкостью физического эксперимента в этой области возрастает значимость численного моделирования [4].

Ряд предыдущих расчетных исследований основывался на математических моделях, использующих усеченные уравнения Навье – Стокса параболического типа, что значительно упрощало задачу, но исключало возможность расчета потоков с возвратными течениями. Однако реальные каналы, примыкающие к поверхностям роторов, особенно в газовых турбинах, характеризуются потоками, имеющими и рециркуляционные области [5]. Поэтому, хотя настоящая работа посвящена исследованию течения в системе, в которой возвратные течения, по-видимому, отсутствуют, исходя из общих задач развития численного эксперимента для определения граничных условий теплоотдачи в турбомашинах, здесь применяются полные уравнения Навье – Стокса.

1. Математическая модель. Метод решения. Геометрия течения и система координат представлены на фиг. 1, где использованы следующие обозначения: z – осевая координата; r – радиальная координата; r_1 – внешний радиус дисков; r_0 – внутренний радиус дисков; пусть S – ширина зазора между дисками, v_{z1} , v_{r1} , $v_{\phi 1}$ – осевая, радиальная и окружная компоненты вектора скорости на входе в зазор; Ω – частота вращения дисков; t_{g1} , t_{g2} – температуры поверхностей первого и второго дисков соответственно; t_{c1} – температура среды на входе.

Уравнения установившегося осесимметричного течения вязкой несжимаемой жидкости, а также уравнение энергии без учета вязкой диссипации в цилиндрической системе координат r , ϕ , z в безразмерной форме имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial R}(RV_r) + \frac{\partial}{\partial Z}(RV_z) = 0$$
$$V_r \frac{\partial V_r}{\partial R} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial Z} - \frac{V_\phi^2}{R} = -\frac{\partial p}{\partial R} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\nabla^2 V_r - \frac{V_r}{R^2} \right)$$
$$V_r \frac{\partial V_\phi}{\partial R} + V_z \frac{\partial V_\phi}{\partial Z} + \frac{V_\phi V_r}{R} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\nabla^2 V_\phi - \frac{V_\phi}{R^2} \right)$$

$$V_r \frac{\partial V_z}{\partial R} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial Z} = - \frac{\partial p}{\partial Z} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 V_z \quad (1.1)$$

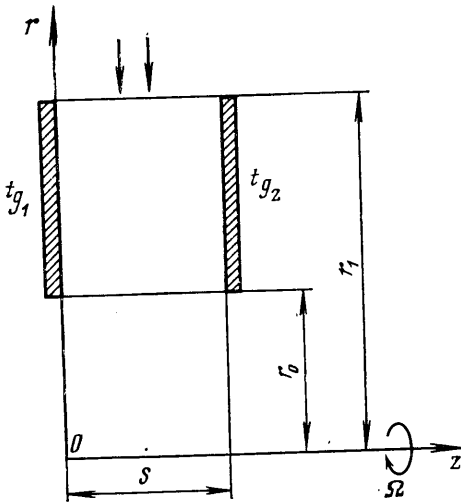
$$V_r \frac{\partial T}{\partial R} + V_z \frac{\partial T}{\partial Z} = \frac{1}{\text{Re Pr}} \nabla^2 T$$

$$R = \frac{r}{r_1}; \quad Z = \frac{z}{r_1}; \quad V_r = \frac{v_r}{r_1 \Omega}; \quad V_z = \frac{v_z}{r_1 \Omega}; \quad V_\varphi = \frac{v_\varphi}{r_1 \Omega}$$

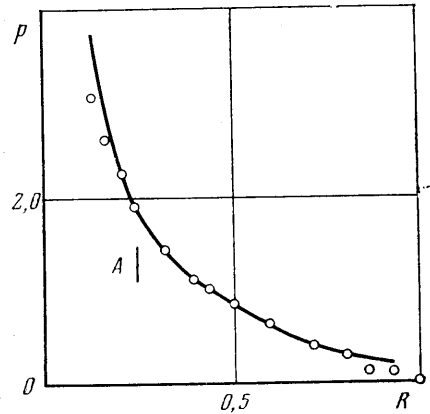
$$P = \frac{p}{\rho r_1^2 \Omega^2}; \quad \nabla^2 = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}; \quad T = \frac{t - t_{g2}}{t_{g1} - t_{g2}}$$

$$\text{Re} = \frac{\Omega r_1^2}{\nu}; \quad \text{Pr} = \frac{\mu C_p}{\lambda}$$

В последних выражениях p — давление; ρ — плотность; C_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении; λ — коэффициент теплопроводности; μ — динамическая вязкость.



Фиг. 1



Фиг. 2

Вводя функцию тока ψ и тангенциальную компоненту завихренность ω :

$$R V_r = - \frac{\partial \psi}{\partial Z}, \quad R V_z = \frac{\partial \psi}{\partial R}; \quad \omega = \frac{\partial V_r}{\partial Z} - \frac{\partial V_z}{\partial R}$$

преобразуем исходные уравнения (1.1) к системе четырех дифференциальных уравнений, имеющих идентичную структуру:

$$a \left\{ \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R} \left(b \frac{\partial}{\partial R} (c \Phi) \right) \right] + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2} \right\} - \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R} (R V_r \Phi) + \frac{\partial}{\partial Z} (R V_z \Phi) \right] + d = 0 \quad (1.2)$$

где в качестве искомой функции Φ рассматриваются ω/R , RV_φ , T , ψ . Значения коэффициентов a , b , c , d определяются конкретным видом Φ :

Φ	a	b	c	d
$\frac{\omega}{R}$	$\frac{1}{Re}$	$\frac{1}{R}$	R^2	$\frac{1}{R^4} \frac{\partial(RV_\varphi)^2}{\partial Z}$
RV_φ	$\frac{1}{Re}$	R^3	$\frac{1}{R^2}$	0
ψ	1	R^3	$\frac{1}{R^2}$	$R^2 \left(\frac{\omega}{R}\right)$
T	$\frac{1}{Re Pr}$	R	1	0

Полагая профили скоростей и температур на входе в зазор между дисками прямоугольными, сформулируем граничные условия задачи:

$$R=1: \frac{\omega}{R} = 0, \quad RV_\varphi = \xi_0, \quad T=0, \quad \psi = -\frac{Z}{K_V}, \quad \xi_0 = \frac{v_{\varphi 1}}{\Omega r_1}, \quad K_V = \frac{\Omega r_1}{v_{r1}}$$

$$Z=0: \quad RV_\varphi = R^2, \quad T=1, \quad \psi=0; \quad Z = \frac{S}{r_1}: \quad RV_\varphi = R^2, \quad T=0, \quad \psi = -\frac{S}{K_V r_1}$$

Здесь ξ_0 — начальная закрутка потока, K_V — кинематический фактор. Граничные условия для вихря скорости на поверхностях дисков определялись при помощи процедуры, предложенной в [6].

Для численного решения системы дифференциальных уравнений (1.1) была использована монотонная, консервативная конечно-разностная схема [7], модифицированная в [8]. Ее особенность состоит в том, что конвективные члены в уравнениях (1.1) аппроксимировались несимметричными направленными разностями, что оказывало стабилизирующее влияние на устойчивость вычислительного процесса.

Использованная разностная схема имеет аппроксимационную вязкость, зависящую от скорости жидкости в конкретной точке течения. Влияние аппроксимационной вязкости значительно уменьшается, если одно семейство линий разностной сетки параллельно линиям тока и в пространственном распределении величины Φ определяющую роль играет конвекция, а не молекулярная диффузия [7, 9]. В радиальном конфузоре эти условия выполняются в большом диапазоне изменения режимных параметров.

Для конечно-разностных схем с аппроксимацией конвективных членов «вверх по потоку» условия в выходном сечении канала мало влияют на решение уравнений (1.1) в основной области течения [7], поэтому на выходе можно было задать так называемые «мягкие» граничные условия:

$$R = \frac{r_0}{r_1}: \quad \frac{\partial(\omega/R)}{\partial R} = \frac{\partial(RV_\varphi)}{\partial R} = \frac{\partial T}{\partial R} = \frac{\partial \psi}{\partial R} = 0$$

Расчеты проводились на последовательности вложенных сеток [10] с максимальным числом узлов 21×41 . Итерационный процесс прекращался, если абсолютная величина максимальной разности между двумя последовательными итерациями в области интегрирования для каждой из независимых переменных не превышала 10^{-4} . Для расчета одного варианта, определяемого комбинацией чисел подобия Re , K_V и ξ_0 , затраты машинного времени на ЭВМ БЭСМ-6 составляли приблизительно 15 мин.

2. Результаты. Особенностью течения во вращающемся радиальном конфузоре [11–15] является то, что, начиная с некоторого радиуса, в нем устанавливается так называемое асимптотическое поле скоростей, не зависящее от входных условий и определяемое только кинематическим фактором и числом Рейнольдса.

В [11] приведены результаты численного решения задачи о ламинарном течении между вращающимися дисками при подводе несжимаемой жидкости с периферии. Решение было получено на основе усеченных уравнений Навье — Стокса, преобразованных к параболическому виду в пред-

положении малости величины относительного зазора между дисками. В пределах принятых допущений этот расчет хорошо согласуется с решениями и экспериментальными данными других авторов в области «асимптотического» течения, поэтому его можно использовать в качестве теста для оценки работы программы и использованной методики. Данные расчеты проводились при $S/r_1=0,1$ для режимов течения, характеризующихся следующими комбинациями чисел подобия: $K_v=-10$; $Re=300, 700, 5000, 50\,000$; $\xi_0=0,8; 1; 1,1; 2$. Было получено хорошее совпадение профилей радиальной и окружной составляющих скорости, несмотря на то, что в работе [11] использовалась сетка с гораздо большим числом узлов: 21×1500 для половины зазора между дисками.

Далее была поставлена задача расчетного определения изменения давления по радиусу канала. Поскольку давление определяется как функция производных компонент скорости течения, оно является параметром более чувствительным к погрешностям расчетного метода, чем профили скоростей. Расчетная формула была следующей:

$$\Delta P = \int_1^R \frac{\partial P}{\partial R} dR = \int_1^R \left(R + \frac{1}{R Re} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial Z^3} \right) \right) dR$$

Производная, стоящая под знаком интеграла, вычислялась на пятиточечном шаблоне, а само значение интеграла — по формуле Симпсона.

С целью возможности сравнения расчетов с результатами экспериментов [12] вычисления производились при $S/r_1=0,0075$ и следующих комбинациях чисел подобия:

K_v	-4,2771	-1,9138	-6,4143	-7,1479
ξ_0	0,7793	1,7415	0,5196	0,3886
Re	76284,436	35239,107	38643,551	126312,87

На фиг. 2 показано сравнение рассчитанного (сплошная кривая) и экспериментального распределения давления на поверхности дисков при $K_v=-7,1479$; $\xi_0=0,3886$; $Re=126\,312$. На асимптотическом участке наблюдается хорошее совпадение результатов. Рассогласование на малых радиусах ($R < A$) объясняется влиянием граничных условий, принятых в выходном сечении канала.

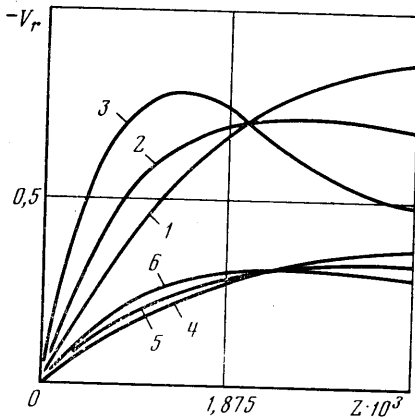
Численные расчеты течений вязкой жидкости, основанные на уравнениях Навье — Стокса, могут быть формально проведены и при режимных факторах, соответствующих в натуре турбулентному режиму течения. В связи с этим возникает вопрос о том, какие изменения в рассчитанных профилях скоростей могут служить указанием на то, что в натурном потоке режим течения изменился. В работе [11] высказано предположение, что переход происходит вблизи значений радиусов, где имеет место перегиб в осевом распределении радиальной скорости потока. В [13] указывалось, что такое предположение является недостаточно обоснованным, однако предлагаемый при этом критерий перехода, не учитывающий влияние вращения, противоречит более поздним экспериментам [14].

В данной работе рассмотрено изменение характера профиля радиальной скорости при различных сочетаниях кинематического фактора и числа Рейнольдса, соответствующих различным режимам течения в эксперименте [14].

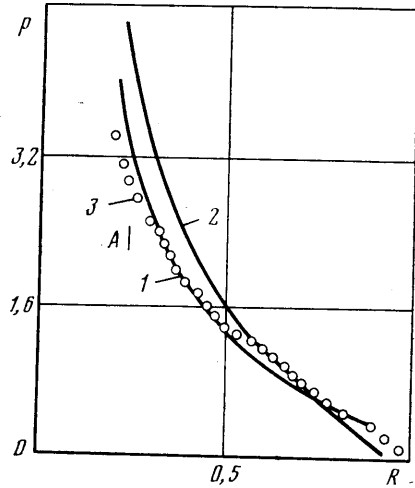
Расчеты показали, что при ламинарном режиме деформация профиля радиальной скорости отсутствует на всех внутренних радиусах. При переходном режиме, начиная с некоторого радиуса, происходит перестройка параболического профиля радиальной составляющей скорости. При тур-

булентном режиме профиль изменяется уже на очень малом расстоянии от входа в зазор между дисками и при всех меньших радиусах все более деформируется. Результаты расчета при $S/r_1=0,0075$; $K_v=-5,18$; $\xi_0=1,42$; $Re=35\ 556$ (ламинарный режим); $106\ 667$ (переходный режим); $165\ 289$ (турбулентный режим) приведены на фиг. 3. Цифры 1, 2, 3 отмечают профили V_r для ламинарного, переходного и турбулентного режимов течения на радиусе $R=0,32$, кривые 4, 5, 6 относятся соответственно к радиусу $R=0,80$.

Таким образом, численное исследование указывает на зависимость характера расчетного профиля радиальной составляющей скорости от режима течения жидкости в радиальном вращающемся конфузоре. Однако



Фиг. 3



Фиг. 4

для окончательного суждения о границах этого соответствия требуются дополнительные данные.

Сравним расчетное распределение давления на поверхности дисков по радиусу с измеренным для режимных параметров, соответствующих турбулентному течению в эксперименте. Такое сопоставление, в частности, провели авторы работы [14], используя интегральный метод [15]. Для идентификации режима течения в [14] использовалась струйка подкрашенной жидкости. На фиг. 4 приведены результаты расчета при $S/r_1=0,0075$; $K_v=-5,18$; $\xi_0=1,42$; $Re=165\ 288$ (кривая 1). Здесь же показаны теоретическое и экспериментальное распределения давления [14] (кривые 2, 3). Как и в [14], наблюдается качественное согласование с экспериментом. Объяснение этому, по-видимому, следует искать в особенностях течения в рассматриваемой системе, для которой характерны сильное ускорение потока в направлении оси вращения и малая величина зазора между дисками, что в совокупности приводит к некоторому подавлению турбулентных эффектов. Расхождение с теоретическими результатами [14], вероятно, обусловлено использованием более точной математической модели.

Настоящая работа не ставила своей целью детальный анализ процессов теплообмена в рассматриваемой системе. Однако в каждом из исследованных вариантов рассчитывалось поле температур и вычислялись тепловые потоки на вращающихся дисках при $Pr=0,7$. Соответствующими экспериментальными данными авторы в настоящее время не располагают, но

можно предположить, что хорошее согласование расчетного и экспериментального распределения давления дает уверенность в том, что и в этом случае расхождение между расчетом и экспериментом не будет значительным.

Приведенные выше результаты исследований показывают, что при помощи использованного метода можно эффективно рассчитывать характеристики гидродинамики и теплообмена во вращающемся радиальном конфузоре с параллельными стенками в широком диапазоне изменения режимов.

Авторы приносят благодарность В. М. Капиносу за обсуждение и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дорфман Л. А. Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел. М.: Физматгиз, 1960. 260 с.
2. Крейц Ф. Конвективный теплообмен во вращающихся системах.— В кн.: Успехи теплопередачи. М.: Мир, 1971, с. 144–279.
3. Дорфман Л. А. Тепло- и массообмен вблизи вращающихся поверхностей.— Инж.-физ. ж., 1972, т. 22, № 2, с. 350–362.
4. Дорфман Л. А. Численные методы в газодинамике турбомашин. Л.: Энергия, 1974. 270 с.
5. Швец И. Т., Дыбан Е. П. Воздушное охлаждение деталей газовых турбин. Киев: Наукова думка, 1974. 487 с.
6. Полежаев В. И., Грязнов В. Л. Метод расчета граничных условий для уравнений Навье – Стокса в переменных «вихрь, функция тока».— Докл. АН СССР, 1974, т. 219, № 2, с. 301–304.
7. Госмен А. Д., Пан В. М., Ранчел А. К., Сполдинг Д. Б., Вольфштейн М. Численные методы исследования течений вязкой жидкости. М.: Мир, 1972. 324 с.
8. De Socio L. M., Sparrow E. M., Eckert E. R. G. The contrived transient-explicit method for solving steady-state flows: Application to a rotating recirculating flow.— Computers and Fluids, 1973, v. 1, № 3, p. 273–287.
9. Rithby G. D. A critical evaluation of upstream differencing applied to problems involving fluid flow.— Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng., 1976, v. 9, p. 75–103.
10. Тарунин Е. Л. Метод последовательности сеток для задач свободной конвекции.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1975, т. 15, № 2, с. 436–445.
11. Бойд, Райс. Ламинарное течение между вращающимися дисками при подводе несжимаемой жидкости с периферии.— Прикл. механика, 1968, № 2, с. 22–31.
12. Адамс, Райс. Экспериментальное исследование течения между совместно вращающимися дисками.— Тр. амер. об-ва инж.-мех. Сер. Е. Прикл. мех., 1970, т. 37, № 3, с. 272–277.
13. Ламинарное течение между вращающимися дисками при подводе несжимаемой жидкости с периферии. Обсуждение работы [11].— Тр. амер. об-ва инж.-мех. Сер. Е. Прикл. мех., 1969, т. 36, № 2, с. 238–239; Прикл. мех., 1970, № 3, с. 312.
14. Pater L. L., Growther E., Rice W. Flow regime definition for flow between co-rotating disks.— ASME Pap., № 1, WA/FE-9, 1973, p. 29–34.
15. Бойак, Райс. Интегральный метод анализа течения между совместно вращающимися дисками.— Тр. амер. об-ва инж.-мех. Сер. Д. Теорет. основы инж. расчетов, 1971, т. 93, № 3, с. 15–20.

Харьков

Поступила в редакцию
6.VI.1980