

УДК 532.529

## О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ДВУХФАЗНОЙ ГАЗОДИНАМИКИ

ГАНЖЕЛО А. Н.

В работе рассматривается задача о построении в одномерном приближении контура оптимального сопла, разгоняющего двухфазную среду. В [1] рассматривалась задача такого типа, когда находили оптимальное по тяге сопло. В отличие от [1] в настоящей работе используется более полная модель двухфазной среды, а сопла оптимизируются по к.п.д., скорости газа, скорости взвешенных частиц.

При решении задачи используется формализм теории оптимального управления [2, 3]. Учитывается изменение концентрации пара и фазовые переходы. Предложен и реализован на ЭВМ метод численного решения этой задачи.

Данный метод может применяться при решении аналогичных задач для более сложной модели двухфазной среды.

1. Система дифференциальных уравнений, описывающая течение двухфазной среды в одномерном приближении, независимо от сложности используемой модели имеет следующий вид:

$$dx_i/dz = f_i(x_1, \dots, x_n)u + g_i(x_1, \dots, x_n); \quad i=1, \dots, n \quad (1.1)$$

$$u = d \ln p/dz, \quad x_n = p \quad (1.2)$$

Здесь  $x_i$  соответствуют параметрам двухфазного потока,  $z$  — продольная безразмерная координата,  $p$  — давление. Уравнение (1.2) входит в систему (1.1).

При решении вариационной задачи варьируется функция  $u(z)$ , которую в дальнейшем будем называть управлением. На  $u(z)$  накладываются следующие ограничения:

$$-k \leq u(z) \leq 0; \quad 0 \leq z \leq l, \quad k > 0 \quad (1.3)$$

Здесь  $l$  — длина сопла,  $k$  — заданная положительная константа. О необходимости ограничений такого вида указывалось ранее в [1, 4]. Параметры  $x_i$  удовлетворяют краевым условиям

$$x_i(0) = x_{i+}; \quad p(l) = p_-; \quad i=1, \dots, n \quad (1.4)$$

В настоящей работе рассматривается типичная задача Майера, которая формулируется так: найти оптимальное управление  $u(z)$ , дающее минимум функционала  $\Phi(x_1(l), \dots, x_n(l))$ , при условии, что  $x_i(z)$  и  $u(z)$  удовлетворяют уравнениям (1.1), ограничениям (1.3) и краевым условиям (1.4). Функция  $u(z)$  находится с помощью принципа максимума Понтрягина

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \psi_i(z) \{f_i[x_1(z), \dots, x_n(z)]u(z) + g_i[x_1(z), \dots, x_n(z)]\} = \\ & = \max_{u \in [-k, 0]} \sum_{i=1}^n \psi_i(z) \{f_i[x_1(z), \dots, x_n(z)]u + g_i[x_1(z), \dots, x_n(z)]\} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь  $\psi_i(z)$  — сопряженные функции, которые определяются из следующей сопряженной системы уравнений с краевыми условиями в точке  $l$  ( $H$  — функция Гамильтона):

$$\frac{d\psi_i}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\sum_{j=1}^n \psi_j \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i} u + \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.6)$$

$$\psi_i(l) = -\frac{\partial \Phi(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}, \quad H = \sum_{j=1}^n \psi_j (f_j u + g_j), \quad i=1, \dots, n-1 \quad (1.7)$$

Если длина сопла не фиксирована, то вводится дополнительное условие

$$H|_{z=l} = 0 \quad (1.8)$$

Таким образом, задача о нахождении экстремали  $u(z)$  сводится к решению краевой задачи для двух систем дифференциальных уравнений (1.1) и (1.6), при этом неизвестные функции  $x_i(z)$  и  $\psi_i(z)$  должны удовлетворять краевым условиям (1.4), (1.7), (1.8), а искомая экстремаль  $u$  удовлетворяет условию (1.5). Формулировка вариационной задачи приводится в общем виде, так как конкретная система дифференциальных уравнений в зависимости от сложности используемой модели может иметь довольно громоздкие правые части и любую размерность. Поскольку данная работа посвящена оптимизации сопел, выделим основные черты, характерные для таких задач.

На входе в сопло заданы все параметры течения, а на срезе сопла задано давление. Функционал  $\Phi(x_1, \dots, x_n)$  является произвольной дифференцируемой функцией  $n$  переменных. В работе рассматриваются следующие выражения для  $\Phi$ :

$$\Phi = -x(l)v_1^2(l) - (1-x(l))v_2^2(l) \quad (1.9)$$

$$\Phi = -v_1(l), \quad \Phi = -v_2(l) \quad (1.10)$$

Здесь  $x$  — отношение расхода пара к расходу двухфазной смеси,  $v_1$  — скорость паровой фазы, а  $v_2$  — скорость взвешенной фазы. Выражение (1.9) соответствует оптимизации сопла по к. п. д., а выражения (1.10) — оптимизации по скорости газовой и жидкой фазы соответственно.

Характерной особенностью системы (1.1) является то, что управление  $u$  входит в нее линейно. Конкретизируем принцип максимума Понтрягина следующим образом:

$$L(z) < 0, \quad u = -k; \quad L(z) > 0, \quad u = 0; \quad L = 0, \quad u \in \Gamma \quad (1.11)$$

$$L(z) = \sum_{i=1}^n \psi_i(z) f_i[x_1(z), \dots, x_n(z)]$$

Здесь  $\Gamma$  соответствует участку двустороннего экстремума. Условие  $L=0$  служит для определения  $u(z)$  на участке двустороннего экстремума.

Управление  $u$  не входит в выражение для  $L$ . Можно показать, что этим свойством обладает и  $dL/dz$ . Поэтому  $u$  определяется из уравнения

$$\frac{d^2 L}{dz^2} = \sum_{i=1}^{n-1} A_i(x_1, \dots, x_n) \psi_i + u(z) \sum_{i=1}^{n-1} B_i(x_1, \dots, x_n) \psi_i = 0 \quad (1.12)$$

Конкретные выражения для функций  $A_i, B_i$  получаются после двукратного дифференцирования  $L$  и замены производных  $dx_i/dz$  и  $d\psi_i/dz$

их значениями с помощью систем (1.4) и (1.6). Отметим, что  $\psi_n$ , соответствующая  $p$ , не входит в выражения для  $dL/dz$  и  $d^2L/dz^2$ .

2. В настоящей работе используется модель взаимопроникающего движения двух фаз [5]. Рассматриваемая среда представляет собой пар со взвешенными в нем каплями. Предполагается, что капли друг с другом не взаимодействуют и в данной точке пространства имеют одинаковый размер. Каждая из фаз принимается как континуум. Вязкостью в газовой фазе пренебрегаем. Взаимодействие между фазами учитывается за счет массообмена, теплообмена и обмена количеством движения. В безразмерных переменных этой модели в одномерном приближении соответствует система обыкновенных дифференциальных уравнений [6, 7]

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dz} &= \frac{3(1-x)}{\rho_2^\circ v_2 r_3^2} K_1^\circ, & \frac{dv_2}{dz} &= -\frac{pu}{\rho_2^\circ v_2} + F_1 \\ \frac{dv_1}{dz} &= -\frac{(\gamma-1)}{\gamma v_1} E_1 u + \frac{3}{r_3^2} \frac{(1-x)}{x} \frac{(v_2-v_1)}{\rho_2^\circ v_2} K_1^\circ - \\ & - \frac{(1-x)}{x} F_1 - \frac{\xi v_1}{4R} \left[ 1 + \frac{1-x}{x} \frac{\rho_1^\circ v_1}{\rho_2^\circ v_2} \right] \\ \frac{de_2}{dz} &= -(h_{21}-h_2) \frac{3K_1^\circ}{\rho_2^\circ v_2 r_3^2} + \frac{Q_1}{\rho_2^\circ v_2}, & \frac{dp}{dz} &= pu \\ K_1^\circ &= \gamma p (\gamma-1)^{-1} D [p_s (pnE_2)^{-1} - E_1^{-1}] (1+0,3\text{Re}^{1/2}\text{Sc}^{1/2}) \\ F_1 &= \frac{1}{16} (\rho_2^\circ v_2)^{-1} r_3^{-2} (v_1-v_2) \mu (24+4,4\text{Re}^{1/2}+0,32\text{Re}) \\ Q_1 &= 3a_1 r_3^{-2} (E_1 - nE_2) (1+0,3\text{Re}^{1/2}\text{Pr}^{1/2}) \\ \gamma &= c_{P1}/c_{V1}, n = c_{P1}/c_2; m = c_{V1}/c_2, E_+ = p_+/\rho_+ \\ E_1 &= c_{P1}' T_1'/E_+', E_2 = c_2' T_2'/E_+', E_{2+} = c_2' T_+'/E_+' \\ E_1 &= h_1 + E_{2+} - p/\rho_2^\circ - r_4 + E_3, E_2 = e_2 + E_{2+} \\ E_3 &= (n-1) [E_{2+}^{-1} - (\gamma-1) m r_4^{-1} \ln p]^{-1} \\ p_s &= \exp[r_4 m^{-1} (\gamma-1)^{-1} (E_{2+}^{-1} - E_2^{-1})] \\ h_1 &= x^{-1} [AG^{-1} - 1/2 x v_1^2 - (1-x) (e_2 + p/\rho_2^\circ + 1/2 v_2^2)] \\ r_3 &= r_{3+} [(1-x)/(1-x_+)]^{1/2} \\ R &= (G/\pi)^{1/2} [x/(\rho_1^\circ v_1) - (1-x)/(\rho_2^\circ v_2)]^{1/2} \\ \rho_1^\circ &= \gamma p (\gamma-1)^{-1} E_1^{-1}, h_2 = e_2 + p/\rho_2^\circ, \text{Sc} = \nu/D \\ D &= D' (R_{1+}')^{-1} (p_+'/\rho_+)^{-1/2}; h_{21} = r_4 + p/\rho_2^\circ - E_3 + ne_2 + (n-1) E_{2+} \\ a_1 &= \lambda' (R_1' c_{P1}')^{-1} (\rho_+' p_+)^{-1/2}; \text{Pr} = \mu' c_{P1}'/\lambda' \\ \text{Re} &= \rho_1^\circ (v_1 - v_2) 2r_3 \mu^{-1}; \mu = \mu' (R_{1+}')^{-1} (\rho_+' p_+)^{-1/2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $A$  и  $G$  — постоянные величины,  $\rho_i^\circ$ ,  $h_i$  и  $e_i$  — истинная плотность, энтальпия и внутренняя энергия  $i$ -той фазы;  $r_3$  — радиус капли,  $R$  — текущий радиус поперечного сечения сопла,  $c_{V1}$  — удельная теплоемкость пара при постоянном объеме,  $c_{P1}$  — удельная теплоемкость пара при постоянном давлении,  $c_2$  — удельная теплоемкость воды,  $\xi$  — коэффициент гидравлического сопротивления,  $\eta$  — коэффициент полезного действия сопла,  $F$  — площадь поперечного сечения сопла,  $G$  — расход

двухфазной среды,  $Re$  — число Рейнольдса,  $Sc$  — диффузионное число Шмидта,  $Pg$  — число Прандтля,  $D$  — коэффициент диффузии пара,  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости пара,  $\mu$  — динамический коэффициент вязкости пара,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности пара,  $r_i$  — теплота испарения воды,  $R_{1+}'$  — характерный размер на входе в сопло,  $T_i$  — температура фаз,  $\rho_+'$ ,  $p_+'$ ,  $T_+'$  — соответственно плотность, давление, температура паровой фазы на линии насыщения во входном сечении сопла. Для получения безразмерных величин в качестве характерных масштабов давления, скорости, энтальпии, внутренней энергии и длины использовались величины  $p_+'$ ,  $(p_+'/\rho_+')^{1/2}$ ,  $p_+'/\rho_+'$ ,  $R_{1+}'$  соответственно. Индексами  $S$ ,  $1$  и  $2$  помечены параметры на линии насыщения, параметры паровой и взвешенной фазы; штрих сверху соответствует размерным величинам, а звездочка, плюс и минус снизу соответствуют параметрам в горловине сопла, на входе в сопло и на срезе сопла. Предполагается, что  $\rho_2'$ ,  $r_i$ ,  $c_{v1}$ ,  $c_{p1}$ ,  $c_2$ ,  $D$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\lambda$  — постоянные величины.

Для определения коэффициента сопротивления трения о стенки сопла  $\xi$  использовались формулы

$$\xi = y^2; \quad y = \varepsilon [x_{10}(\varepsilon) + \varepsilon x_1(\varepsilon) + \varepsilon^2 x_2(\varepsilon) + \varepsilon^3 x_3(\varepsilon)] \quad (2.2)$$

$$x_{10}(\varepsilon) = (1 + 2\varepsilon \lg \varepsilon)^{-1}, \quad \varepsilon = (2 \lg Re_3)^{-1}$$

$$Re_3 = \rho_1' v_1 2R\mu^{-1}, \quad x_1(\varepsilon) = 2x_{10}^2(0,4 - \lg x_{10})$$

$$x_2(\varepsilon) = 4x_{10}^3(0,4 - \lg x_{10})(0,4 - \lg x_{10} - (\ln 10)^{-1})$$

$$x_3(\varepsilon) = -x_{10}^3 x_{10}^{-2} + 2x_1 x_2 x_{10}^{-1} - (2x_2 x_{10} - x_1^2)(\ln 10)^{-1}$$

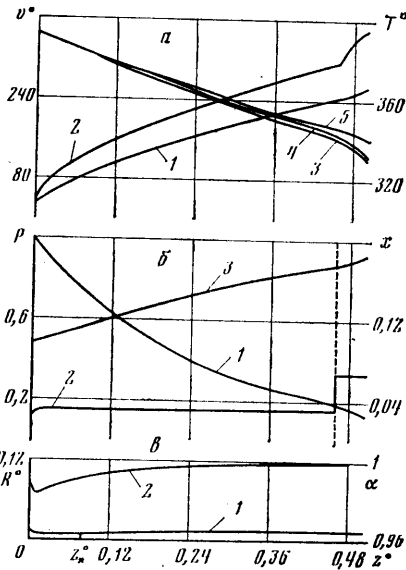
которые являются асимптотическим решением уравнения Никурадзе

$$\xi^{-1/2} = -0,8 + 2 \lg Re_3 + \lg \xi$$

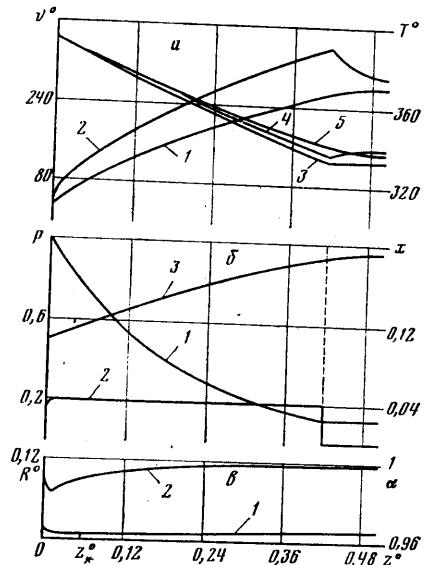
Система дифференциальных уравнений (2.1) вместе с соотношениями (2.2) полностью описывает в одномерном приближении течение двухфазной среды в канале переменного сечения. Для построения алгоритма численного решения данной вариационной задачи было проведено численное исследование системы (2.1) вместе с сопряженной системой вида (1.6), которое показало, что оптимальное сопло при перепадах давления  $p_-/p_+ \sim 0,1$  и меньше имеет участок двустороннего экстремума, заключенный между участками краевого экстремума, как и в [4]. Начальный участок краевого экстремума или не существует, или имеет пренебрежимо малую длину аналогично [8], а  $u$  на участке двустороннего экстремума изменяется очень медленно. Если  $p_-/p_+ > 0,5$ , то существуют решения вариационной задачи, оптимальное управление которых состоит лишь из двух участков краевого экстремума. Исходя из этого, был построен алгоритм численного решения данной вариационной задачи для  $p_-/p_+ < 0,5$ , когда фиксировалась длина сопла.

При этом начальный участок краевого экстремума не учитывался, а для получения нулевого приближения принималось, что  $u(z) = \text{const}$  на участке двустороннего экстремума. На участке двустороннего экстремума находили  $u = \text{const}$ , дающую минимум заданному функционалу  $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ . Эта константа и является нулевым приближением для  $u(z)$  на участке двустороннего экстремума. На участке краевого экстремума  $u$  равняется 0 или  $-k$  в зависимости от вида функционала. Используя нулевое приближение для  $u$ , решаем (2.1) слева направо при начальных условиях вида (1.4). При этом запоминаются значения параметров в узлах отрезка  $[0, l]$ .

По значениям  $x(l)$ ,  $v_1(l)$ ,  $v_2(l)$ ,  $e_2(l)$ ,  $p(l)$  находим, используя (1.7),  $\psi_i(l)$ ,  $i=1, \dots, n-1$ . Полагаем  $u(z)=0$  или  $-k$  в зависимости от вида  $\Phi$  и решаем систему вида (1.6) справа налево до тех пор, пока  $dL/dz$  не поменяет знак. Поскольку правые части системы (1.6) при  $i=1, \dots, n-1$  не зависят от  $\psi_n$ , то интегрируем только первые  $n-1$  уравнений. В точке, где  $dL/dz$  меняет знак, определяем  $\psi_n$  из уравнения  $L=0$ . Начиная с этой точки,  $u$  определяется из уравнения (1.12) и запоминается в уз-



Фиг. 1



Фиг. 2

лах отрезка  $[0, l]$ . При интегрировании системы вида (1.6) справа налево используются значения параметров  $x_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , полученные при интегрировании системы (2.1) слева направо, как и в [1]. Решение системы (2.1) с  $u$ , полученной на предыдущем этапе, определяет следующее приближение и т.д.

Изложенный алгоритм применим к любой системе вида (1.1), моделирующей течение двухфазной среды.

3. При использовании указанного алгоритма были рассчитаны сопла, оптимальные по к.п.д., скорости газовой фазы, скорости капель. Коэффициент полезного действия  $\eta$  определяется по формуле

$$\eta = [x(l)v_1^2(l) + (1-x(l))v_2^2(l)]v_1^{-2}$$

Здесь  $v_1^2$  — квадрат скорости смеси, соответствующий изэнтропическому расширению двухфазной среды;  $v_1^2$  зависит только от  $p_+$  и  $p_-$ . На фиг. 1 изображены кривые, соответствующие соплу, оптимальному по к.п.д. Для всех фигур единицами измерения скорости, длины, температуры являются соответственно м/с, м, °К.

Оптимизация проводилась при следующих значениях параметров:  $r_3' = 0,12 \cdot 10^{-4}$  м,  $k = 0,06654$ ,  $R_{1+}' = 8 \cdot 10^{-3}$  м,  $x_+ = 0,0967$ ;  $G' = 0,20678$  кг/с;  $l' = 0,5$  м;  $p_+' = 2$  кг/см<sup>2</sup>;  $p_-' = 0,25$  кг/см<sup>2</sup>;  $R_+' = 0,015$  м. Кривая 1 фиг. 1,  $\delta$  соответствует безразмерному давлению  $p$  в зависимости от размерной продольной координаты  $z^*$ , а кривая 2 — величине  $(-u)$ . Кривой 2 соответствует правая шкала  $x$ .

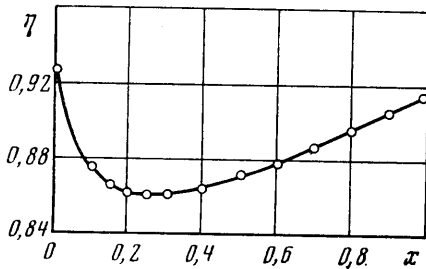
Видно, что  $u(z)$  на участке двустороннего экстремума является практически постоянной величиной, за исключением малой окрестности начала координат. При переходе с участка двустороннего экстремума на участок краевого экстремума  $u$  скачком достигает величины  $-k$ .

Ясно, что участки с малыми  $|u|$  соответствуют более медленному, а значит, и более близкому к равновесному расширению, чем участки с большими  $|u|$ . Но поскольку длина сопла фиксирована и получить заданный перепад давления нельзя только с малым  $|u|$ , оптимальное управление состоит из комбинации участков медленного и быстрого изменения параметров. Благодаря участку краевого экстремума — участку быстрого изменения параметров — на заданной длине получаем максимальное значение к.п.д.  $\eta=0,8745$ .

Кривая 1 фиг. 1,  $\sigma$  представляет изменение радиуса поперечного сечения сопла вдоль его оси. Видно, что, за исключением небольшого входного участка, поперечное сечение сопла изменяется очень медленно, а в области горловины практически не изменяется. Кривые 1 и 2 фиг. 1,  $a$  соответствуют скоростям взвешенной и газовой фазы. Видно, что только в окрестности начала координат разность  $v_1-v_2$  резко возрастает, на остальной части участка двустороннего экстремума  $v_1-v_2$  изменяется очень медленно, что отвечает минимальным потерям за счет трения двух фаз. И только на небольшом участке краевого экстремума  $v_1$  и  $v_2$  быстро достигают значений, соответствующих оптимуму. Кривая 3 фиг. 1,  $b$  показывает изменение  $x$ , а кривая 2 фиг. 1,  $\sigma - \alpha$ . Видно, что  $x$  и  $\alpha$  значительно увеличиваются по длине сопла за счет испарения, а  $\alpha$  в начальном участке сопла имеет значительный градиент. Кривые 4, 5, 3 фиг. 1,  $a$  представляют температуру газовой фазы, капель и температуру насыщения при текущем давлении  $p$ . Видим, что пар и капли являются перегретыми. На участке краевого экстремума, соответствующем сильной неравновесности, разность температур фаз сильно возрастает.

Сопло, оптимальное по скорости газа, рассчитывалось, при тех же параметрах, что и предыдущее, за исключением  $x_+$  и  $G$ , которые набирались следующими:  $x_+=0,1$ ;  $G^\circ=0,2$  кг/с. Результаты расчетов слабо отличаются от кривых на фиг. 1, поэтому в статье не представлены. Поскольку сопло оптимизировалось по скорости газовой фазы, неравновесность здесь менее важна, чем в предыдущем сопле, поэтому участок краевого экстремума здесь больше, чем в предыдущем случае. Соответственно на участке двустороннего экстремума  $|u|$  достигает значений меньших, чем для сопла, оптимального по к.п.д. Результаты расчетов показали, что чем меньше  $|u|$  на участке двустороннего экстремума, тем дальше от входного сечения находится горловина сопла. Так, у сопла, оптимального по к.п.д., горловина расположена ближе к началному сечению, чем у сопла, оптимального по  $v_1(l)$ . Несмотря на эти отличия, геометрия обоих сопел очень близка. Фиг. 2, соответствующая соплу, оптимальному по скорости капель, значительно отличается от фиг. 1. Нумерация кривых здесь прежняя, а параметры соответствуют предыдущему соплу. В этом случае оптимальное управление  $u(z)$  имеет качественно другой характер. Оно состоит из участка двустороннего экстремума и участка краевого экстремума  $u=0$ , тогда как в первых двух случаях на участке краевого экстремума  $u=-k$ . В связи с этим  $|u|$  на участке двустороннего экстремума достигает значений, превышающих  $|u|$  в первых двух случаях, а значит, и горловина сопла расположена ближе к входу, чем в предыдущих случаях. Процессы, протекающие в сопле, оптимальном по  $v_2(l)$ , характеризуются более сильной неравновесностью по сравнению с первыми двумя случаями. Смысл оптимизации заключается в том, чтобы за счет большого  $|u|$  максимально увеличить отставание частиц от газа, одновре-

менно увеличивая скорость их, а затем за счет возросшей силы взаимодействия выравнивать скорости обеих фаз на участке сопла с нулевым градиентом давления. Отметим, что к. п. д. сопла, оптимального по  $v_1(l)$ , равняется  $\eta=0,8687$ , а к. п. д. сопла, оптимального по  $v_2(l)$ , —  $\eta=0,8232$ . Все



Фиг. 3

три рассматриваемых сопла имеют одни и те же входные данные и давления на срезе. Для того чтобы выявить предельные возможности оптимизации сопел по к. п. д., был проведен ряд расчетов оптимальных сопел, имеющих ту же длину и давления на входе и срезе, что и ранее рассмотренные сопла. Считалось, что на входе в сопло среда находится в динамическом и тепловом равновесии, соответствующем состоянию насыщения. При расчетах меняли  $x_+$  и  $G$  так, чтобы  $v_{1+}=v_{2+}$  оставались постоянными, равными 0,06195. Эти же входные скорости имели и ранее рассмотренные сопла. На фиг. 3 точками представлены результаты расчетов, а кривая, соединяющая точки, представляет собой зависимость к. п. д. оптимального сопла от  $x_+$ . Эта кривая характеризует возможности оптимизации по к. п. д. сопла при заданных  $l$ ,  $R_+$ ,  $p_+$ ,  $p_-$ ,  $v_{1+}=v_{2+}$ . При этих параметрах результаты расчетов по используемой модели сопел с любой геометрией будут лежать ниже этой кривой. На фиг. 3 видно, что минимум предельного к. п. д.  $\eta=0,86$  дает  $x_+=0,25$ . При увеличении  $x_+$  до 1 или уменьшении до 0 предельный к. п. д. значительно возрастает. Это объясняется тем, что увеличивается концентрация одной из фаз и неравновесность уменьшается. Результаты расчетов показали, что при оптимизации достаточно длинного сопла можно ограничиться нулевым приближением, так как дальнейшее уточнение решения дает незначительное изменение варьируемого функционала. Это важно при использовании сложных моделей двухфазной среды, математическая формулировка которых имеет громоздкий вид, так как определение нулевого приближения связано только с системой вида (1.1).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Крайко А. Н., Старков В. К., Стернин Л. Е. Решение в одномерном приближении вариационной задачи о построении сопла максимальной тяги при течении газа с инородными частицами. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 4, с. 52.
2. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
3. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971. 424 с.
4. Крайко А. Н. Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.
5. Нигматуллин Р. И. Методы механики сплошной среды для описания многофазных смесей. — ПММ, 1970, вып. 34, № 6, с. 1097.
6. Циклаури Г. В., Данилин В. С., Селезнев Л. И. Адиабатные двухфазные течения. — М.: Атомиздат, 1973. 447 с.
7. Стернин Л. Е. Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. М.: Машиностроение, 1974. 212 с.
8. Галюн Н. С., Крайко А. Н. Об одной вариационной задаче одномерной неравновесной газовой динамики. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 2, с. 27.

Москва

Поступила в редакцию  
17.VI.1980