

УДК 532.526

ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА КРУГОВОМ СЕКТОРЕ

ШАЛЬМАН Е. Ю.

Конечно-разностным методом исследованы ламинарный и турбулентный пограничные слои на плоской поверхности при круговых линиях тока внешнего потока. Показано, что при больших углах поворота потока поведение пограничного слоя на конечном круговом секторе качественно отличается от бесконечного сектора. Исследовано влияние числа Маха, угла поворота потока и температуры обтекаемой поверхности на вторичные течения в пограничном слое.

1. При исследовании трехмерного пограничного слоя конечно-разностными методами основное внимание уделялось течениям, возникающим при обтекании различных тел. Часто встречающееся на практике течение в пограничном слое на участке поворота потока теоретически почти не исследовалось. Даже простейшая задача о пограничном слое на бесконечном круговом секторе изучена недостаточно. В [1] для ламинарных течений получено решение вблизи передней кромки сектора, а в [2] интегральным методом исследован турбулентный пограничный слой.

В настоящей работе численным методом исследуется пограничный слой на круговом секторе для течения сжимаемого газа. Описан способ задания необходимых для расчета начальных условий. Получены решения линеаризованных уравнений пограничного слоя вблизи внешней границы. Предложены простые зависимости, описывающие влияние параметров внешнего невязкого потока и температуры обтекаемой поверхности на вторичные течения в пограничном слое.

2. Рассмотрим пограничный слой, индуцируемый на круговом секторе потенциальным вихрем с циркуляцией Γ . Выберем цилиндрическую систему координат θ, y, r . θ — угол, отсчитываемый от передней кромки сектора, r — расстояние до оси вихря. Ось y направлена перпендикулярно плоскости сектора по оси вихря. Обозначим: u, v, w — компоненты вектора скорости, ρ — плотность, H — полная энтальпия, μ, ϵ — коэффициенты ламинарной и турбулентной вязкости, индексом e — значения параметров в невязком потоке. Для рассматриваемого течения

$$u_e = \Gamma/r, \quad w_e = 0 \quad (2.1)$$

Исследование и расчет пограничного слоя удобно вести в преобразованных переменных, аналогичных переменным Лиза — Дородницына:

$$\eta = \sqrt{\frac{\rho_e \mu_e u_e}{\chi \Delta r}} \int_0^y \frac{dy}{\mu}, \quad R = \frac{r}{L} \quad (2.2)$$

Здесь χ — функция от θ , R , выбор которой зависит от рассматриваемой задачи, Δ определяется из условия $u/u_e = 0,99$ при $\eta = 2/3$, L — характерный размер.

Введем новые искомые функции:

$$f = u/u_e, \quad \varphi = w/w_*, \quad g = H/H_e \quad (2.3)$$

где w_* — функция от θ и R .

Уравнение неразрывности проинтегрируем от стенки. В результате получим из системы уравнений трехмерного турбулентного пограничного

слоя:

$$\begin{aligned}
 & ((1+\varepsilon_*)f')' + Vf' = \chi\Delta N \left(f \frac{\partial f}{\partial \theta} + R \frac{w_*}{u_e} \varphi \frac{\partial f}{\partial R} \right) \\
 & ((1+\varepsilon_*)\varphi')' + V\varphi' + \Delta N (b_1(\rho_e/\rho - f^2) - b_2f\varphi - b_3\varphi^2) = \\
 & = \chi\Delta N \left(f \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + R \frac{w_*}{u_e} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) \\
 & \left(\frac{1+\varepsilon_*}{\sigma_*} g' \right)' + Vg' + 2U \left(\frac{\sigma_* - 1}{\sigma_*} (\varepsilon_* + 1) \left(ff' + \left(\frac{w_*}{u_e} \right)^2 \varphi \varphi' \right) \right)' = \\
 & = \chi\Delta N \left(f \frac{\partial g}{\partial \theta} + R \frac{w_*}{u_e} \varphi \frac{\partial g}{\partial R} \right)
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$V = \sqrt{\frac{\chi\Delta}{\rho_e \mu_e u_e}} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sqrt{\chi\Delta \rho_e \mu_e u_e} F) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{w_*}{u_e} \sqrt{\chi\Delta \rho_e \mu_e u_e} \Phi \right) \right)$$

$$F = \int_0^\eta N f d\eta, \quad \Phi = \int_0^\eta N \varphi d\eta, \quad U = \frac{u_e^2}{2H_e}, \quad b_1 = \chi \frac{u_e}{w_*}$$

$$b_2 = \frac{\chi}{w_*} \frac{\partial w_*}{\partial \theta}, \quad b_3 = R \frac{\chi}{u_e} \frac{\partial w_*}{\partial R}, \quad N = \frac{\rho \mu}{\rho_e \mu_e} (1 + \varepsilon_*)$$

$$\varepsilon_* = \frac{\varepsilon}{\mu}, \quad \frac{1}{\sigma_*} = \left(\frac{1}{\sigma} + \frac{\varepsilon_*}{\sigma_t} \right) / (1 + \varepsilon_*)$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по η ; σ , σ_t — ламинарное и турбулентное числа Прандтля.

Граничные условия для (2.4) имеют вид

$$f = \varphi = 0, \quad g = g_w \quad (y=0) \quad f \rightarrow 1, \quad \varphi \rightarrow 0, \quad g \rightarrow 1 \quad (y \rightarrow \infty) \tag{2.5}$$

Для решения уравнений пограничного слоя необходимо задать начальные условия на некоторой поверхности, ортогональной плоскости сектора и пересекающей все линии тока в пограничном слое. Из анализа зон зависимости следует, что их достаточно задать на поверхностях $\theta=0$ (передняя кромка сектора) и $R=R_0$ (боковая кромка). На бесконечном секторе $R_0=\infty$.

Задание начальных условий на передней кромке сектора не представляет затруднений. Если на ней толщина пограничного слоя равна нулю, то вблизи передней кромки реализуется такое же течение, как на пластине. (Выбором $\chi \sim \theta$ при $\theta \ll 1$ начальные условия на передней кромке пластины получаем из решения уравнений (2.4) при $\theta=0$.) Если толщина пограничного слоя при $\theta=0$ отлична от нуля, то предположим, что профиль компоненты скорости u такой же, как на пластине (u/u_e — профиль Блазиуса для ламинарных течений и по закону одной седьмой для турбулентных), а $w \equiv 0$ при $\theta=0$.

Остановимся на вопросе задания начальных условий при $R \rightarrow \infty$ на бесконечном круговом секторе. Рассмотрим сначала течение несжимаемой жидкости. В этом случае $U=0$. Положим $\chi=2\theta$, $w_* = u_e$. Тогда b_1 , b_2 , b_3 от R не зависят. Пусть $\varepsilon_* = \varepsilon_*(S_1, S_2, S_3, S_4)$

$$S_1 = \frac{\rho y^2}{\mu} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2}, \quad S_2 = \frac{y}{\delta}, \quad S_3 = \frac{\rho y^2}{\mu} \tau_w$$

$$S_4 = \frac{\rho u_e}{\mu} \int_0^{\infty} \left(1 - \sqrt{u^2 + w^2}/u_e\right) dy$$

где τ_w — напряжение трения на стенке, δ — толщина пограничного слоя.
В преобразованных переменных

$$S_4 = \frac{\sqrt{2\theta} \Delta r u_e \rho_e \mu_e \rho \mu_e}{\rho_e \mu^2} \sqrt{(f')^2 + (\varphi')^2} \left(\int_0^{\eta} \frac{\mu}{\mu_e} d\eta \right)^2$$

Следовательно, в переменных (2.2) S_4 в несжимаемой жидкости явно не зависит от R (так как $ru_e = \Gamma$). Можно показать, что S_2, S_3, S_4 также не зависят от R . Итак, в уравнениях (2.4) коэффициенты перед членами, не содержащими производные по R , от R не зависят. Следовательно, если в несжимаемой жидкости начальные и граничные условия от R не зависят, то и решение уравнений (2.4) не зависит от R .

Для ламинарных течений этот результат был получен в [3] из анализа групповых свойств уравнений пограничного слоя. Полученные результаты позволяют, вернувшись к переменным θ, y, r , определить характер зависимости от радиуса характеристик пограничного слоя несжимаемой жидкости на бесконечном круговом секторе. Так, толщина пограничного слоя и все интегральные толщины пропорциональны r , а коэффициенты трения

$$c_{f\theta} = \frac{2\mu (\partial u / \partial y)|_{y=0}}{\rho_e u_e^2}, \quad c_{fr} = \frac{2\mu (\partial w / \partial y)|_{y=0}}{\rho_e u_e^2}$$

и угол β между пристенной линией тока и линией тока внешнего потока от r не зависят.

Сформулируем теперь начальные условия для течения сжимаемого газа. Так как $u_e = \Gamma/r$, то $u_e \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Следовательно, решение уравнений (2.4) должно стремиться к независящему от R решению для несжимаемой жидкости. При проведении численных расчетов это условие задавалось при таком R , что $\lambda_e = u_e/a_* \leq 0,3$ (a_* — критическая скорость звука).

3. Для расчетов использовался численный метод работы [4], модифицированный для расчета течений турбулентного пограничного слоя в цилиндрической системе координат. Турбулентная вязкость вблизи стенки описывалась на основе гипотезы пути смешения, а во внешней части — по формуле Клаузера.

Для ламинарных течений результаты расчета величины

$$\delta_2 = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\rho_e u_e r}{\mu_e}} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\sqrt{u^2 + w^2}}{u_e}\right) dy$$

представлены на фиг. 1. Кривая 1 — несжимаемая жидкость, кривая 4 — $\lambda_e = 1,2$, $g_w = 0,5$. При θ , близких к одному радиану, наблюдается резкий рост толщины пограничного слоя. При этом $c_{f\theta} \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 90^\circ$. Возникает такое же течение, как на конечном диске во вращающемся над ним потоке [5].

Результаты расчета турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости на бесконечном круговом секторе сравним с экспериментальными данными работы [6], в которой измерены параметры пограничного слоя на средней линии торцевой стенки криволинейного канала, образованного двумя стоящими на пластине коаксиальными цилиндрами. Так как ширина канала была много меньше радиусов цилиндров, то линии тока внешнего невязкого потока в эксперименте почти не отличались от круговых. Начальная толщина при $\theta = 0$ задавалась путем аппроксимации экспериментальных данных.

Построенная по результатам расчета толщина вытеснения в миллиметрах

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} (1 - u/u_e) dy$$

изображена на фиг. 2. Там же нанесены экспериментальные точки. При $\theta < 0,5$, совпадение результатов расчета и эксперимента удовлетворительное. Отличие результатов при больших θ связано с влиянием вогнутой стороны канала на характеристики пограничного слоя на торцевой стенке.

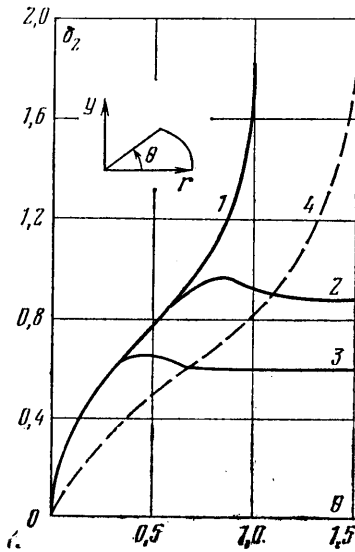
4. Рассмотрим ламинарный пограничный слой на конечном круговом секторе. Пусть $R=R_0$ — уравнение боковой кромки сектора. Тогда, как следует из задачи о центробежной форсунке [7], толщина пограничного слоя $\delta \sim (R_0 - R)^{1/4}$, а $w \sim \sqrt{R_0 - R}$ при $(R_0 - R)/R_0 \ll 1$. На передней кромке сектора ($\theta=0$) $\delta \sim \theta$. Выберем функции χ и w_* следующим образом:

$$\chi = \begin{cases} \sqrt{R_0/R - 1}, & R \geq R_0/(1+4\theta^2) \\ 2\theta, & R < R_0/(1+4\theta^2) \end{cases}$$

$$w_* = u_e \sqrt{R_0/R - 1}$$

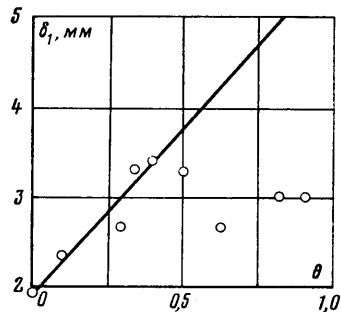
Тогда начальные условия на передней и боковой кромках получаются из решения уравнений (2.4) при $\theta=0$ и при $R=R_0$ соответственно.

Результаты расчета течения несжимаемой жидкости при $R_0=2$ представлены на фиг. 1. Кривая 2 соответствует $R=1,3$, кривая 3 — $R=1,7$.



Фиг. 1

Рассмотрим более подробно поведение решений уравнений пограничного слоя вдоль линии $R = \text{const}$. При малых θ пограничный слой ведет себя так же, как на бесконечном круговом секторе. После того как рассматриваемой линии достигает влияние боковой



Фиг. 2

кромки сектора, скорость изменения параметров начинает убывать и, наконец, реализуется режим течения, при котором параметры пограничного слоя практически не зависят от θ .

В соответствии с выводами работы [8] пограничный слой вблизи линии пересечения вогнутой стороны канала с торцевой стенкой ведет себя так же, как на конечном круговом секторе. Поэтому рассмотренная в настоящем разделе задача описывает трехмерный пограничный слой на торцевой стенке криволинейного канала, если толщина пограничного слоя на

входе в канал равна нулю. Следовательно, можно сделать вывод, что сформулированные в [8] условия необходимо учитывать для правильного определения характеристик пограничного слоя на торцевой стенке криволинейного канала.

5. Рассмотрим поведение решений уравнений пограничного слоя вблизи внешней границы. Введем поточную систему координат: ось x направим вдоль линии тока внешнего потока, ось y — по нормали к обтекаемой поверхности, а ось z — перпендикулярно осям x и y . Обозначим $F = 1 - u/u_e$, $\varphi = w/u_e$, $G = 1 - H/H_e$. Рассмотрим поведение решений уравнений пограничного слоя достаточно далеко от обтекаемой поверхности, так что можно считать, что $F, \varphi, G \ll 1$. Кроме того, ограничимся случаем, когда $\sigma = \sigma_t = 1$, а внешнее невязкое течение — плоское безвихревое. Подставив в уравнения движения и энергии u, w, H через F, φ, G , после линеаризации получим

$$L(F) - 2b_1(F - 0,5G) = u_e^2 \partial F / \partial x \quad (5.1)$$

$$L(\varphi) - 2b_2(F - 0,5G) - b_3\varphi = u_e^2 \partial \varphi / \partial x$$

$$L(G) = u_e^2 \partial G / \partial x$$

$$b_1 = \frac{u_e}{1-U} \frac{\partial u_e}{\partial x}, \quad b_2 = \frac{\rho_e u_e}{1-U} \frac{\partial u_e}{\partial z}$$

$$b_3 = \frac{u_e}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial x}, \quad U = \frac{u_e^2}{2H_e}$$

$$L(f) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left((\mu + \varepsilon) \frac{\partial f}{\partial y} \right) - v \frac{\partial f}{\partial y}$$

Если ввести $\Phi = F - 0,5G$, то G из первых двух уравнений системы (5.1) исключится. Будем искать решение получающихся уравнений в виде $\varphi = A(x, z)\Phi + \varphi_1$. Подставим это выражение в (5.1) и заменим во втором уравнении $L(\Phi) - u_e^2 \partial \Phi / \partial x$ с помощью первого уравнения. В результате получим

$$L(\Phi) - 2b_1\Phi = u_e^2 \partial \Phi / \partial x \quad (5.2)$$

$$(2b_1A - 2b_2 - b_3A - u_e^2 \partial A / \partial x) \Phi + L(\varphi_1) = u_e^2 \partial \varphi_1 / \partial x$$

Функцию A выберем так, чтобы коэффициент перед Φ в последнем уравнении обратился в ноль. Если еще потребовать, чтобы $A(x_0, z) = 0$, то второе уравнение (5.2) будет описывать развитие начальных (при $x = x_0$) вторичных течений. Если $\varphi_1 = 0$ при $x = x_0$, то $\varphi_1 = 0$.

Учитывая выражения b_1, b_2, b_3 , через скорость и плотность внешнего потока найдем решение получающегося для A линейного дифференциального уравнения в виде

$$A = \frac{2u_e^2}{(1-U)\rho_e} \int_{x_0}^x \frac{\rho_e}{u_e^2} \frac{\partial u_e}{\partial z} dx = - \frac{2u_e^2}{(1-U)\rho_e} \int_0^\beta \frac{\rho_e d\beta}{u_e^2} \quad (5.3)$$

Здесь β — угол между направлением скорости внешнего потока в точках x и x_0 . Последний интеграл в (5.3) берется вдоль линии тока.

Возвращаясь к u, w, H , получим

$$\frac{w}{u_e} = A \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{H}{H_e} \right) - \frac{u}{u_e} \right) \quad (5.4)$$

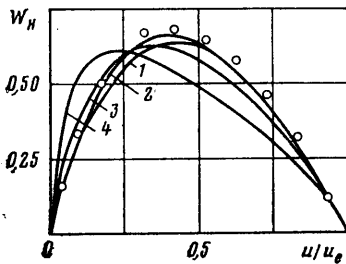
Следовательно, вторичные течения в пограничном слое зависят не только от профиля продольной скорости, но и от профиля температуры.

Если градиенты давления не очень велики и нет резкого изменения граничных условий на обтекаемой поверхности, то, предположив подобие профилей скорости и полной энтальпии, получим из (5.4)

$$\frac{2}{1+H_w/H_e} \frac{w}{u_e} = A \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) \quad (5.5)$$

В том случае, когда скорость вдоль линии тока меняется слабо, получим, заменяя в выражении для A интеграл произведением подынтегрального выражения на длину пути интегрирования

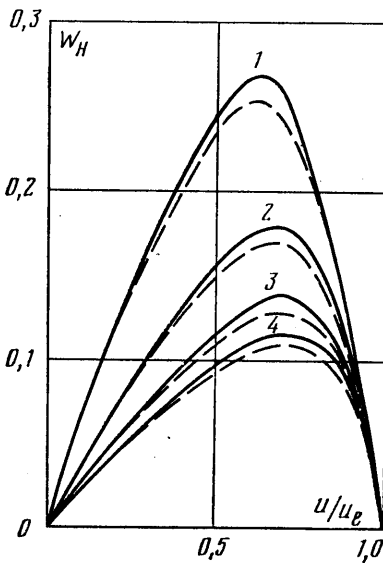
$$\frac{2}{1+H_w/H_e} \frac{w}{u_e} = -2\beta \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2\right) \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) \quad (5.6)$$



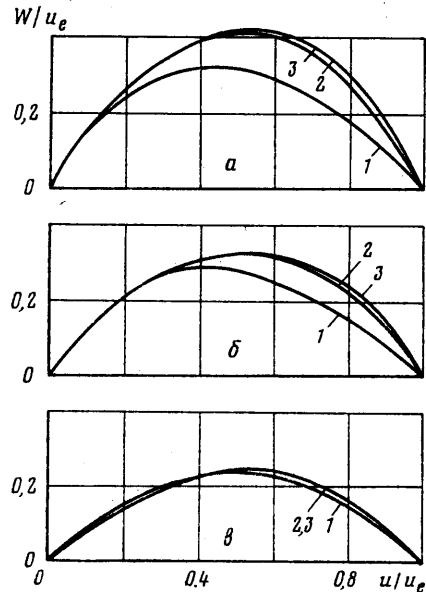
Фиг. 3

Для течения несжимаемой жидкости на теплоизолированной поверхности формулы (5.4) и (5.6) переходят в известные зависимости, полученные в работе [9] в предположении о невязком характере течения во внешней части пограничного слоя.

Так как максимум вторичного течения расположен при $u/u_e = 0,5-0,7$, то полученные асимптотические формулы позволяют оценить влияние параметров внешнего потока на весь годограф скорости. При сделанных



Фиг. 4



Фиг. 5

предположениях величина

$$W_H = \frac{-2}{1+H_w/H_e} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2\right)^{-1} \frac{w}{\beta u_e}$$

не должна зависеть от числа Маха, угла поворота потока и температуры обтекаемой поверхности.

Проверим этот вывод на основе расчетов пограничного слоя на круговых секторах. На фиг. 3 изображена зависимость величины w_H от u/u_e для ламинарного пограничного слоя на бесконечном круговом секторе при $\lambda_e=1,2$. Кривые 1 соответствуют $\theta=0,25$, 2 - 0,5, 3 - 0,75, 4 - 1,0. Точками нанесены результаты расчета при $\lambda_e=0$.

Такая же зависимость, построенная по результатам расчета турбулентного пограничного слоя на бесконечном круговом секторе, представлена на фиг. 4. Сплошные кривые соответствуют $\lambda_e=0$, $g_w=1,0$, штриховые - $\lambda_e=1,25$, $g_w=0,5$; 1 - $\theta=6^\circ$, 2 - $\theta=18^\circ$, 3 - $\theta=36^\circ$, 4 - $\theta=54^\circ$.

Представленные результаты показывают, что полученные формулы хорошо описывают влияние числа Маха и температуры обтекаемой поверхности на вторичные течения в пограничном слое.

Годографы скорости в ламинарном пограничном слое на конечном круговом секторе представлены на фиг. 5. Кривые 1-3 соответствуют $\theta=0,5$; 1,0; 1,5. На фиг. 5, а $R=1,3$, 5, б - 1,5, в - 1,7. При больших θ угол подхода годографа к оси абсцисс не зависит от θ . Это объясняется тем, что под действием радиального градиента давления частицы жидкости, двигающиеся с передней кромки сектора, смещаются к оси вихря. На их место приходят частицы жидкости с боковой кромки сектора, которые повернулись на угол тем меньший, чем меньше R_0-R , и при больших углах поворота потока угол подхода годографа к оси абсцисс зависит только от R .

В заключение отметим, что ввиду простоты внешнего невязкого течения и сложного характера течения в пограничном слое задачу о ламинарном пограничном слое на конечном круговом секторе можно предложить как тестовую для сравнения эффективности и точности различных методов расчета пограничного слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Наумова Л. Г. Пространственный ламинарный пограничный слой на бесконечном круговом секторе. - Прикл. матем. и механ., 1975, т. 21, № 4, с. 478-486.
2. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М., 1962, 512 с.
3. Каплан В. С. Условия существования инвариантных решений уравнений трехмерного ламинарного пограничного слоя на развертывающихся поверхностях. - Уч. зап. ЦАГИ, 1972, т. 111, № 3, с. 36-45.
4. Гуревич Ю. Г., Шальман Е. Ю. Некоторые эффекты, возникающие при управлении пограничным слоем на участке поверхности. - Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 4, с. 3-9.
5. Burgar R., Stewartson K., Belcher R. Boundary layer induced by potential vortex. - Phys. fluids, 1971, v. 14, № 9, p. 1821-1834.
6. Фрэнсис, Пирс. Экспериментальное изучение турбулентных пограничных слоев со скосом в потоках с низкой скоростью. - Тр. амер. об-ва инж. мех. Сер. Д: Теоретические основы инженерных расчетов, 1967, т. 89, № 3, с. 161-174.
7. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М., 1963.
8. Гуревич Ю. Г. Пограничный слой в окрестности угла между вогнутой цилиндрической поверхностью и плоскостью. - Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 2.
9. Jonston J. P. On the three-dimensional boundary layer generated by secondary flow. - Transactions of ASME, ser. D, 1960, v. 82, № 1, p. 233-246.

Москва

Поступила в редакцию
29.V.1980