

УДК 532.528

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КАВИТАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ

НЕСТЕРУК И. Г.

На основе уравнений для формы тонкой осесимметричной каверны [1-3] рассмотрены задачи о пульсациях формы каверны, о сопротивлении тонкого кавитатора, о влиянии поверхностного натяжения на форму стационарной каверны.

1. Основные уравнения. В работе [2] в цилиндрической системе координат x, r получено следующее выражение для потенциала нестационарного осесимметричного обтекания системы кавитатор — каверна — замыкатель, которая предполагается тонкой, т. е. ε — отношение характерного поперечного размера этой системы к продольному L' — мало:

$$\Phi(x, r_*, t, \varepsilon) = x + \varepsilon^2 \ln \varepsilon A(x, t) + \varepsilon^2 \{A(x, t) \ln r_* + B(x, t)\} + O(\varepsilon^4 \ln^2 \varepsilon) \quad (1.1)$$

$$A = F \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \tau \frac{\partial F}{\partial t} \right)$$

$$B = -A \ln 2 - \frac{1}{2} \int_{-l_k(t)}^{l_k(t)} \frac{\partial A}{\partial \xi} \operatorname{sign}(x - \xi) \ln |x - \xi| d\xi$$

$$F = \frac{R(x, t)}{\varepsilon}, \quad \tau(t) = \frac{L'}{V_\infty'(t) t_x'}, \quad r_* = \frac{r}{\varepsilon}$$

Здесь $R(x, t)$ — радиус системы тел; l_k — длина кавитатора; l — суммарная длина каверны и замыкателя; скорости обезразмерены делением на текущее значение скорости набегающего потока $V_\infty'(t)$; длины и времена — на постоянные значения L' и t_x' ; штрихами будут обозначаться размерные величины.

Решение с точностью порядка $\varepsilon^2 \ln \varepsilon$ уравнения для формы осесимметричной нестационарной каверны в областях влияния начальных и граничных условий записывается в виде

$$R^2(x, t) = \int_0^t \frac{z(t, 0)}{\tau \ln \varepsilon} dt \int_0^t \left[\sigma(t) \pm \frac{2}{Fr^2(t)} \left(\int_0^t \frac{dt}{\tau} + x_0 \right) \right] \frac{dt}{\tau z(t, 0)} + \quad (1.2)$$

$$+ 2A_1(x_0) \int_0^t \frac{z(t, 0)}{\tau} dt + R_1^2(x_0), \quad x \geq \int_0^t \frac{dt}{\tau}$$

$$R^2(x, t) = \int_{t_0}^t \frac{z(t, t_0)}{\tau \ln \varepsilon} dt \int_{t_0}^t \left[\sigma(t) \pm \frac{2}{Fr^2(t)} \int_{t_0}^t \frac{dt}{\tau} \right] \frac{dt}{\tau z(t, t_0)} +$$

(1.3).

$$+ 2A_2(t_0) \int_{t_0}^t \frac{z(t, t_0)}{\tau} dt + R_3^2(t_0), \quad 0 \leq x \leq \int_0^t \frac{dt}{\tau}$$

$$z(t, t_0) = \exp\left(-\int_{t_0}^t \frac{S dt}{\tau}\right); \quad x_0 = x - \int_0^t \frac{dt}{\tau}; \quad Fr(t) = \frac{V_{\infty}'(t)}{\sqrt{gL'}}; \quad S(t) = \frac{L'}{V_{\infty}'^2} \frac{dV_{\infty}'}{dt}$$

Здесь $\sigma(t)$ — число кавитации на уровне точки схода струй $x=0$; A_1, R_1, A_2, R_3 — заданные функции (для кавитатора фиксированной формы $A_2=R_3R_4$; R_3, R_4 — постоянные радиус и производная от него при $x=0$); $t_0(x, t)$ определяется из уравнения

$$x = \int_{t_0}^t \frac{dt}{\tau}$$

Решение с той же точностью уравнения для стационарной каверны записывается в виде [3]

$$R^2(x) = \frac{\sigma x^2}{2 \ln \varepsilon} \pm \frac{x^3}{3 \ln \varepsilon Fr^2} + 2R_3R_4x + R_3^2 \quad (1.4)$$

Здесь плюс у второго члена соответствует направленному вдоль набегающего потока вектору ускорения силы тяжести; знак минус — противоположному направлению. Ниже будут рассмотрены некоторые конкретные задачи.

2. Пульсирующие каверны. Экспериментальному исследованию свойств пульсирующих вентилируемых каверн посвящена работа [4]. В статьях [5, 6] сделана попытка оценить собственные частоты плоских каверн, находящихся в струе конечной ширины. Теоретическому исследованию динамических характеристик осесимметричных вентилируемых каверн посвящены работы [7, 8]. В статье [9] рассмотрена плоская симметричная пульсирующая каверна в невесомой жидкости. Предполагалось, что: на минимальной длине каверны укладывается целое число волн, гармонические пульсации радиуса определенным образом связаны с пульсациями давления, нестационарные возмущения малы и граничные условия можно снести на границы каверны, соответствующие установившемуся течению. Решение с использованием аппарата теории функций комплексного переменного показало, что период колебаний T' достаточно хорошо удовлетворяет экспериментальному соотношению [5]

$$T' = L_1' / nV_k' \quad (2.1)$$

Здесь L_1' — средняя длина каверны, V_k' — скорость жидкости на границе каверны, n — число длин волн, укладывающихся на средней длине каверны.

Рассмотрим задачу о пульсациях тонкой осесимметричной каверны в тяжелой жидкости. Скорость набегающего потока предполагается постоянной, течение периодическим по времени с периодом T' , $\tau = L_1' / T' V_{\infty}'$, $Fr = V_{\infty}' / \sqrt{gL'}$.

Поскольку $\tau = \text{const}$, то решение уравнения для формы каверны существует при всех $x \geq 0$, $t \geq 0$ [2]. Ограниченность длины каверны и периодичность решения по времени позволяют рассмотреть решение на интервале $t_1' \leq t' \leq t_1' + T'$, где t_1' достаточно велико, и считать, что каверна целиком

принадлежит области влияния граничных условий. Тогда из уравнения (1.3) следует

$$R^2 = \pm \frac{x^3}{3 \text{Fr}^2 \ln \varepsilon} + 2R_3 R_4 x + R_3^2 + \frac{1}{\tau^2 \ln \varepsilon} \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t \sigma(t) dt, \quad t_0 = t - x\tau$$

Полагая, что число кавитации изменяется относительно среднего значения σ_c по гармоническому закону $\sigma(t) = \sigma_c + b \sin 2\pi t$, уравнение для радиуса каверны можно записать следующим образом:

$$R^2 = \frac{\sigma_c x^2}{2 \ln \varepsilon} \pm \frac{x^3}{3 \text{Fr}^2 \ln \varepsilon} + 2R_3 R_4 x + R_3^2 + b_1 P(x, t) \quad (2.2)$$

$$P(x, t) = x\tau \cos 2\pi(t - x\tau) + \frac{\sin 2\pi(t - x\tau) - \sin 2\pi t}{2\pi}; \quad b_1 = \frac{b}{2\pi \tau^2 \ln \varepsilon}$$

Таким образом, квадрат радиуса пульсирующей каверны отличается от осредненного квадрата радиуса, соответствующего стационарной каверне со средним числом кавитации σ_c (см. (1.4)), на величину $b_1 P(x, t)$, где $P(x, t)$ представляет собой бегущую волну с увеличивающейся при увеличении x амплитудой, причем $P(0, t) = 0$, что хорошо согласуется с экспериментальными наблюдениями [5]. В любой фиксированный момент времени функция P имеет чередующиеся максимумы и минимумы, причем расстояние от максимума до ближайшего минимума равно $1/2\tau$, а до ближайшего максимума — $1/\tau$.

Из экспериментального факта [5], что на средней длине каверны укладывается целое число волн, следует соотношение $\tau = n$ или $T' = L'/nV_{\infty}'$. Полученная формула совпадает с экспериментальной зависимостью (2.1), если учесть, что в рассматриваемом приближении тонких каверн (малых чисел кавитации) $V_k' \approx V_{\infty}'$.

Если в некоторый момент времени t максимумы и минимумы имеют координаты $x = (2t + k)/2\tau$; $k = 0, 1, \dots$, то в момент времени $t + \Delta t$ те же максимумы имеют координаты $x = [2(t + \Delta t) + k]/2\tau$, т. е. скорость движения максимумов и минимумов равна $1/\tau$ или $V_s' = V_{\infty}'/n$. Таким образом, физическая скорость движения максимумов и минимумов пульсаций не зависит от времени и координаты.

Выражение (2.2) содержит неизвестную постоянную b . Эксперимент свидетельствует, что амплитуда пульсаций может быть разной при одном и том же среднем числе кавитации и зависит от расхода газа Q' . Таким образом, величина b является еще одним независимым параметром задачи и должна быть задана либо непосредственно, либо через зависимость $Q'(b)$.

3. Сопротивление тонкого кавитатора. Из интеграла Коши — Лагранжа получаем следующее выражение для коэффициента давления:

$$C_p(x, r, t) = \frac{2[p'(x, r, t) - p_{\infty}'(0, t)]}{\rho' V_{\infty}'^2} =$$

$$= 1 - 2\tau \frac{\partial \Phi}{\partial t} - 2\Phi S - v_r^2 - v_x^2 + 2x(S \pm \text{Fr}^{-2})$$

Подстановка выражения для потенциала (1.1) дает для точек, лежащих на поверхности кавитатора ($r = W$):

$$C_p(x, t) = -2\varepsilon^2 \ln \varepsilon \left(AS + \tau \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} \right) -$$

$$-2\varepsilon^2 \left\{ \tau \frac{\partial A}{\partial t} \ln \frac{W}{\varepsilon} + \tau \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} \ln \frac{W}{\varepsilon} + \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{1}{2} A^2 \left(\frac{\varepsilon}{W} \right)^2 + \right. \\ \left. + AS \ln \frac{W}{\varepsilon} + BS \right\} \pm 2x Fr^{-2} + O(\varepsilon^4 \ln^2 \varepsilon) \quad (3.1)$$

При вычислении коэффициента сопротивления, как правило, нельзя ограничиться членами порядка $\varepsilon^2 \ln \varepsilon$, поскольку интегрирование коэффициента давления производится по поверхности кавитатора, для которого модуль логарифма отношения максимального радиуса к длине не является большой величиной. Определение радиуса каверны с точностью порядка ε^2 связано с очень большими трудностями. Поэтому расчет сопротивления можно производить с применением выражения (3.1), а при вычислении функции $B(x, t)$ пользоваться зависимостью для радиуса каверны, полученной из решения задачи с точностью $\varepsilon^2 \ln \varepsilon$.

Для кавитатора фиксированной формы выражение (3.1) дает

$$C_p(x, t) = C_{p1}(x, t) + C_{p2}(x, t), \quad C_{p2} = -\tau \frac{\partial B_2}{\partial t} - \frac{\partial B_2}{\partial x} - B_2 S \\ C_{p1} = - \left(\frac{\partial^2 W^2}{\partial x^2} - S \frac{\partial W^2}{\partial x} \right) \ln \frac{W}{2} - \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial B_1}{\partial x} - B_1 S \pm \frac{2x}{Fr^2}$$

$$B_1 = -\frac{1}{2} \int_{-l_k}^x \frac{d^2 W^2}{d\xi^2} \ln(x-\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_x^0 \frac{d^2 W^2}{d\xi^2} \ln(\xi-x) d\xi$$

$$B_2 = \frac{1}{2} \int_0^{l^{(t)}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial R^2}{\partial \xi} + \tau \frac{\partial R^2}{\partial t} \right] \ln(\xi-x) d\xi$$

Здесь $R(x, t)$ задается формулами (1.2), (1.3) или (1.4).

Аналогично $C_p(x, t)$ коэффициент сопротивления можно разбить на две части, первая из которых не зависит от формы каверны:

$$C_x = \frac{2X'}{\rho' V_\infty \Omega_g'} = C_1 + C_2$$

$$C_1 = \frac{1}{\Omega_g} \iint_{\Omega} C_{p1} \cos(n, x) ds + \sigma, \quad C_2 = \frac{1}{\Omega_g} \iint_{\Omega} C_{p2} \cos(n, x) ds$$

где Ω_g' — площадь донного сечения кавитатора, а Ω — его смоченная поверхность.

Для кавитатора в форме тонкого конуса с тангенсом полуугла при вершине β имеет место формула

$$C_1 = \sigma - 2\beta^2 \ln \frac{\beta}{2} - 2\beta^2 - \beta^2 S l_k \left(\ln l_k + \frac{4}{3} \ln \frac{\beta}{2} - \frac{1}{6} \right) \mp \frac{2l_k}{3 Fr^2}$$

В случае установившегося движения такого кавитатора

$$C_2 = \frac{\sigma(l^2 - l - 2l \ln l + l^2 \ln l - l_k^2 \ln l_k)}{2l_k^2 \ln \varepsilon} \pm \frac{l^3 \ln l + l_k^3 \ln l_k - 3l^2 \ln l + 3l^3 - 4l^2 + l}{3 Fr^2 l_k^2 \ln \varepsilon}; \quad l = 1 - l_k$$

В случае невесомой жидкости и достаточно малых чисел кавитации ($l_k \ll 1$, $\sigma \approx -4\beta^2 l_k \ln \varepsilon$) из предыдущих двух соотношений следует

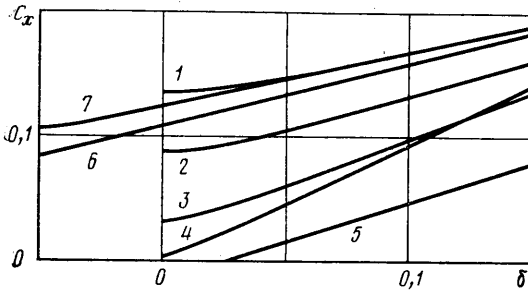
$$C_x = C_{x0} + \sigma + \beta^2 l_k (2 \ln l_k - 3), \quad C_{x0} = -2\beta^2 \ln \frac{\beta}{2} - 2\beta^2 \quad (3.2)$$

Здесь C_{x0} — коэффициент сопротивления тела при нулевом числе кавитации. Расчет C_{x0} по приведенной простой формуле хорошо соответствует представленным в работе [10] экспериментальным результатам вплоть до углов при вершине конуса 40° . Формула для C_{x0} хорошо согласуется также с расчетами по нелинейной теории [11].

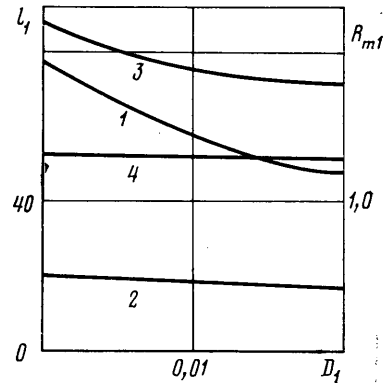
Из предыдущего соотношения видно, что для очень тонких конусов сопротивление с хорошей степенью точности аппроксимируется известной в плоском случае зависимостью [12] $C_x = C_{x0} + \sigma$. Этот факт также хорошо подтверждается экспериментально (например, [13]).

На фиг. 1 представлены рассчитанные по уравнению (3.2) зависимости коэффициента сопротивления от σ в невесомой жидкости. Кривые 1–4 соответствуют конусам с углами при вершине $28^\circ 41'$, 20° , 10° , 1° соответственно. Кривая 1 хорошо совпадает с приведенными в [14] экспериментальными результатами.

На той же фигуре представлены результаты расчета коэффициента сопротивления конуса с углом при вершине $28^\circ 41'$ в случае, когда вектор силы тяжести направ-



Фиг. 1



Фиг. 2

лен вдоль набегающего потока. Кривым 5–7 соответствуют рассчитанные по радиусу донного сечения числа Фруда 7, 30, 100 соответственно.

В качестве примера нестационарной задачи может быть выбрано движение конуса с постоянными давлением в каверне и скоростью вдоль вектора силы тяжести. В [2] были получены следующие соотношения:

$$R^2(x, t) = \frac{\sigma(t)}{2 \ln \varepsilon} - \frac{x^3}{Fr^2 \ln \varepsilon} + 2R_3 R_4 x + R_3^2$$

$$\tau = \frac{2\sigma(0)}{Fr^2}; \quad \sigma(t) = \sigma(0) (1+t)$$

Использование этих зависимостей дает следующую формулу:

$$C_2 = \frac{\sigma[(l+l_k)^2 \ln(l+l_k) - l_k^2 \ln l_k - l^2 \ln l - 2ll_k \ln l - ll_k]}{2l_k^2 \ln \varepsilon} +$$

$$+ \frac{(l+l_k)^3 \ln(l+l_k) - l_k^3 \ln l_k + 5l^3 \ln l - 6l(l+l_k)^2 \ln(l+l_k) + 9l^2 l_k \ln l - 3l^2 l_k + 3,5ll_k^2}{3 Fr^2 l_k^2 \ln \varepsilon} +$$

$$+ \frac{(l+l_k)^2 \ln(l+l_k) - l^2 \ln l - 2ll_k \ln l - ll_k - 1,5l_k^2}{l_k^2 \ln \varepsilon} \tau \frac{dl}{dt} \left(\frac{2l}{Fr^2} - \frac{\sigma}{2} \right)$$

Здесь зависящая от времени длина каверны l определяется как наименьший положительный корень многочлена $R^2(x, t)$.

4. Влияние поверхностного натяжения. Первая попытка учесть капиллярные эффекты в струйных задачах была предпринята в работе [15], в которой плоская задача истечения из-под щита решалась методом Воронца. Считалось, что поверхностное натяжение мало изменяет форму свободной поверхности. В этом случае задача сводится к отысканию аналитической функции. В [15] удалось получить первое приближение решения.

В [16] рассматривались малые деформации каверны относительно известной осесимметричной формы под действием поверхностного натяжения и поперечного поля силы тяжести. Исходная форма каверны бралась из полуэмпирической зависимости. Наряду с неосесимметричными искажениями в [16] рассмотрены малые осесимметричные деформации исходной каверны под действием поверхностного натяжения. Работа [17] посвящена экспериментальному изучению капиллярных эффектов.

Методика расчета плоских кавитационных течений без предположения о малом влиянии капиллярных эффектов была предложена в [18], в которой путем численного интегрирования уравнения Лапласа решалась задача обтекания препятствия. Сравнение расчетов для двух случаев: $\sigma=0,94$; $D=2\kappa'/\rho'V_\infty'^2L'=0$ (κ' — коэффициент поверхностного натяжения) и $\sigma=0,94$; $D\approx 10^{-4}$ — показало малое различие в форме каверн. Отсюда был сделан вывод о слабом влиянии поверхностного натяжения.

Динамическое граничное условие запишем в виде

$$V^2 - \delta D - \sigma \mp 2x \text{Fr}^{-2} - 1 = 0 \quad (4.1)$$

где δ — кривизна поверхности каверны. Из (4.1) следует, что если $\sigma \gg D$ и $\delta \sim 1$, то влияние поверхностного натяжения должно быть мало. Как раз такой случай рассмотрен в [18]. Если $\sigma \sim \delta D$, то следует ожидать значительного влияния капиллярных эффектов. Поскольку величина δD в практически интересных случаях мала, то влияние поверхностного натяжения может проявиться при малых числах кавитации¹.

При малых числах кавитации и достаточно тонких кавитаторах справедливо выражение (1.1) для потенциала течения. Если ограничиться членами порядка $\varepsilon^2 \ln \varepsilon$, то из (1.1), (4.1) следует уравнение для формы стационарной каверны

$$[R\dot{R} + (R^2)^2] \ln \varepsilon + \frac{D}{2} \left[\frac{\dot{R}}{(1+\dot{R}^2)^{1/2}} - \frac{1}{R(1+\dot{R}^2)^{1/2}} \right] = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{x}{\text{Fr}^2}$$

Здесь точкой отмечено дифференцирование по x . В качестве начальных условий можно взять $R(0) = R_s$, $\dot{R}(0) = R_s$. Если, кроме того, положить, что $\varepsilon = R_m$, $R(1-l_k) = 0$, где R_m — максимальный радиус каверны, то получается замкнутая система уравнений для определения $R(x)$, которая решалась численно методом итераций. В качестве начального приближения использовалось решение, задаваемое формулой (1.4).

На фиг. 2 представлены зависимости длины $l_1 = l'/R_s'$ и радиуса миделевого сечения $R_{m1} = R_m'/R_s'$ от $D_1 = 2\kappa'/\rho'V_\infty'^2R_s'$ для конуса с углом при вершине $11^\circ 30'$. Жидкость предполагалась невесомой. Кривые 1, 2 дают зависимости длины при $\sigma = 0,02$; 0,08; кривые 3, 4 — зависимости для максимального радиуса при тех же числах кавитации. Из фиг. 2 видно, что капиллярные эффекты уменьшают основные размеры каверны. Такой же результат получен в [17, 16]. При этом с уменьшением числа кавитации капиллярные эффекты проявляются сильнее.

Расчеты каверн в тяжелой жидкости показывают, что поверхностное натяжение уменьшает размеры каверны и в этом случае. Влияние капиллярных сил для представляющих практический интерес небольших значений параметра D_1 тем больше, чем больше число Fr (при фиксированном числе кавитации). Такой характер влияния следует и непосредственно из формулы (4.1), поскольку при малых δD сильного влияния поверхностного натяжения можно ожидать только при малых значениях σ и больших значениях числа Фруда.

Автор благодарит В. П. Карликова и Ю. Л. Якимова за полезные обсуждения результатов работы.

¹ Эта задача была предложена автору В. П. Карликовым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Серебряков В. В.* К постановке линеаризованных задач осесимметричного суперкавитационного обтекания в нестационарном потоке.— В кн.: Мат. методы послед. гидродинам. течений. Киев, 1978, с. 58–62.
2. *Нестерук И. Г.* О форме тонкой осесимметричной нестационарной каверны.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 4, с. 38–47.
3. *Нестерук И. Г.* К вопросу о форме тонкой осесимметричной каверны в весомой жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 6, с. 133–136.
4. *Silberman E., Song C. S.* Instability of ventilated cavities.— J. Ship Res., 1961, v. 5, № 1, p. 13–33.
5. *Song C. S.* Pulsation of ventilated cavities.— J. Ship Res., 1962, v. 5, № 4, p. 8–20.
6. *Song C. S.* Pulsation of two-dimensional cavities.— 4-th Sympos. Naval Hydrodynamics: Propuls., Hydroelasticity. Washington D. C., 1962, Washington D. C. Office Naval Res. Dept. Navy, 1964, p. 1033–1056.
7. *Парышев Э. В.* Система нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, описывающих динамику нестационарных осесимметричных каверн.— Тр. ЦАГИ, 1978, вып. 1907, с. 3–16.
8. *Парышев Э. В.* Теоретическое исследование устойчивости и пульсаций осесимметричных каверн.— Тр. ЦАГИ, 1978, вып. 1907, с. 17–40.
9. *Woods L. C.* On the instability of ventilated cavities.— J. Fluid Mech., 1966, v. 26, № 3, p. 437–457.
10. *Эпштейн Л. А., Блюмин В. И., Федюшкин А. П.* Экспериментальное определение уноса газа и длины каверны за конусами.— Тр. ЦАГИ, 1968, вып. 1100, 12 с.
11. *Гузевский Л. Г.* Численный анализ кавитационных течений. Новосибирск, 1979, 36 с. (Ин-т теплофиз. Сиб. отд. АН СССР. Препринт № 40).
12. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.
13. *Кнэпп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф.* Кавитация. М.: Мир, 1974. 687 с.
14. *Бэгчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
15. *Гуревич М. И.* Влияние капиллярных сил на коэффициент сжатия струи.— ПММ, 1961, т. 25, № 6, с. 1060–1067.
16. *Буйвол В. Н., Шевчук Ю. Р.* Взаимодействие поверхностного натяжения и гравитации в кавитационных течениях.— В кн.: Гидромеханика. Респ. межвед. сб. 1978, вып. 38, с. 95–100.
17. *Лалин В. А., Эпштейн Л. А.* Влияние поверхностного натяжения на основные геометрические размеры каверн за осесимметричными насадками.— Экспериментальная механика судна. Материалы по обмену опытом. Вып. 226. Л.: Судостроение, 1975, с. 80–87.
18. *Кузнецов В. Г., Шепеленко В. Н., Яненко Н. Н.* Расчет формы каверны в поле тяготения с учетом поверхностного натяжения.— Изв. СО АН СССР. Сер. техн. н., 1967, вып. 3, № 13, с. 58–61.

Черновцы

Поступила в редакцию
10.III.1980