

УДК 532.525.6

О ПРОСТРАНСТВЕННОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СВОБОДНО РАСПИРЯЮЩЕЙСЯ СТРУИ С ПРЕГРАДАМИ

БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ О. М., ГОЛОМАЗОВ М. М., ЖУРАВЛЕВА О. А.

Предложена численная схема и приведены результаты расчетов стационарного трехмерного течения в дозвуковой и трансзвуковой области взаимодействия свободно расширяющейся струи с бесконечной плоской преградой под углами атаки до 20° и торцом цилиндра при смещении его относительно оси струи на расстояние до 10 радиусов сопла.

1. При обтекании преград свободно расширяющейся струей все поле течения состоит из двух областей, в которых течение не имеет разрывов: область сверхзвукового течения в струе и смешанная область течения в ударном слое между преградой и отошедшей ударной волной. При численном решении этой задачи выделение ударной волны повышает точность расчетов и позволяет в каждой области применить метод, адекватный характеру течения в этой области.

Для расчета сверхзвукового течения в струе применялся метод характеристик [1] и приближенные методы расчета [2]. В смешанной области течения естественно использовать опыт расчета обтекания затупленных тел равномерным потоком.

Здесь предлагается численная схема расчета трехмерных течений, являющаяся развитием метода интегральных соотношений [3], и на ее основе проведено исследование взаимодействия свободно расширяющейся струи с преградами различной формы. Рассматривается течение совершенного невязкого газа. Правомерность такого подхода к расчету течения в свободно расширяющейся струе подтверждается исследованиями целого ряда авторов [4, 5]. В области течения между преградой и отошедшей ударной волной предположение о сплошности среды и слабом влиянии вязкости справедливо на расстояниях до сотни калибров для реальных условий на срезе сопла. Что касается условия постоянства удельных теплостей газа в струе, то расширение газа за срезом сопла приводит к резкому падению температуры и плотности газа, к замораживанию химического состава газа и химических реакций и газ в струе ведет себя как совершенный с эффективным показателем адиабаты, равным показателю адиабаты газа на срезе сопла. При переходе через ударную волну температура газа восстанавливается до значений температуры в сопле, но плотность газа в ударном слое мала, химические реакции протекают медленно и газ можно считать совершенным с тем же показателем адиабаты.

2. Рассмотрим пространственное сверхзвуковое обтекание затупленного тела струей совершенного газа, истекающего из сопла в вакуум. Предполагается, что тело, на которое воздействует струя, имеет плоскость симметрии и что ось струи лежит в этой плоскости. Начальными условиями являются условия на срезе сопла, которые обычно формулируются как условия равномерного потока. Расчет проводился от среза сопла до границы области предполагаемого нахождения ударной волны. Координаты точек, попадающих в эту область, а также значения чисел Маха и углов

наклона вектора скорости к оси струи запоминались. При изменении положения и формы ударной волны в процессе решения задачи в смешанной области течения значения числа Маха и угла наклона вектора скорости в узлах сетки на ударной волне находились интерполяцией по нескольким ближайшим точкам из вышеуказанной области и эти значения служили исходными данными для определения газодинамических функций за отшедшей ударной волной. Такой подход к определению параметров струи перед ударной волной позволил существенно сократить время расчета, так как в этом случае поле течения струи рассчитывается один раз.

В ударном слое решение определяется в дозвуковой и части сверхзвуковой области течения, ограниченной ударной волной, поверхностью тела и некоторой граничной поверхностью. В качестве нее можно взять предельную характеристическую поверхность или близкую к ней коническую поверхность, что позволит точно учесть область влияния затупления тела.

Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z таким образом, чтобы ось z лежала в плоскости симметрии, а угол φ отсчитывался от этой плоскости.

Исходная система уравнений газовой динамики в цилиндрической системе координат имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho c^2} \left(v \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + u \frac{\partial p}{\partial z} \right) &= -\frac{v}{r} \\ v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{w^2}{r} \\ v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + u \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} &= -\frac{vw}{r} \\ v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + u \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где v, w, u — проекции вектора скорости на направления r, φ, z соответственно; c — скорость звука.

От цилиндрических координат удобно перейти к новым переменным η, θ, ξ по формулам

$$\begin{aligned} z &= \{z_r[\eta r_1(0, \theta), \theta] + z_{r,r}'(0, 0) \eta [r_1(\xi, \theta) - r_1(0, \theta)] \cos \theta\} (1 - \xi) + \\ &+ \{z_r[\eta r_1(1, \theta), \theta] + z_{r,r}'(0, 0) \eta [r_1(\xi, \theta) - r_1(1, \theta)] \cos \theta\} \xi, \\ r &= \eta r_1(\xi, \theta), \quad \varphi = \theta, \end{aligned}$$

где $z = z_0(r, \varphi)$ — уравнение поверхности ударной волны, $z = z_r(r, \varphi)$ — уравнение поверхности тела, $r = r_1(\xi, \theta)$ — уравнение граничной поверхности. Преобразование обеспечивает непрерывность производной $r_1^{-1}(\xi, \theta) \partial / \partial \eta$ на оси $\eta = 0$ на поверхности $\xi = \text{const}$ и гладкость этой поверхности в окрестности оси. Запись всех граничных поверхностей в новых переменных позволяет вычислять геометрические параметры волны и тела вдоль лучей $\eta = \text{const}$ в узлах сетки при $\xi = 1$ и 0 соответственно.

Перейдем к безразмерным величинам. Скорость будем относить к максимальной скорости v_{\max} , плотность ρ — к плотности на срезе сопла ρ_a , давление p — к $\rho_a v_{\max}^2$, удельную энтальпию h — к энтальпии торможения $v_{\max}^2/2$, линейные размеры — к радиусу сопла r_a . Все последующие соотношения записаны для безразмерных величин.

В координатах ξ, η, θ система (2.1) преобразуется к виду

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = F_p, \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} = F_v, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = F_w, \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} = F_u \quad (2.2)$$

$$F_p = \rho \left\{ \left[\left(\frac{G}{H} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \frac{\partial v}{\partial \eta} + \left(\frac{\partial r}{\partial \xi} - \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{G}{H} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} + \right. \right.$$

$$+ \frac{wa_1}{rH} \left(\frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} \left(c_1 + \frac{b_1 G}{H} \right) \frac{\partial w}{\partial \eta} \left. \right] + \frac{a_1}{r} \left(\frac{b_1 w}{rH} - 1 \right) \frac{\partial w}{\partial \theta} +$$

$$+ \frac{1}{\rho} \left[\frac{G}{c^2} - \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \xi} - \frac{c_1 b_1}{r^2} \right) H^{-1} \right] \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{a_1}{\rho r} \left(\frac{b_1}{Hr} - \frac{w}{c^2} \right) \frac{\partial p}{\partial \theta} +$$

$$+ \frac{a_1 w^2}{Hr} \frac{\partial z}{\partial \eta} + \frac{a_1 b_1 w v}{Hr^2} - \frac{a_1 v}{r} \left. \right\} \left\{ \frac{H}{c^2} - \frac{1}{H} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{b_1^2}{r^2} \right] \right\}^{-1}$$

$$F_v = \frac{1}{H} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) \frac{1}{\rho} + G \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{wa_1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w^2 a_1}{r} \right]$$

$$F_w = \frac{1}{H} \left[-\frac{1}{\rho r} \left(b_1 \frac{\partial p}{\partial \xi} + c_1 \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) - \frac{a_1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + G \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{wa_1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{a_1 w v}{r} \right]$$

$$F_u = \frac{1}{H} \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial p}{\partial \eta} - \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) + G \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{wa_1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right]$$

$$H = -v \frac{\partial z}{\partial \eta} + u \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{wb_1}{r}, \quad G = -v \frac{\partial z}{\partial \xi} + u \frac{\partial r}{\partial \xi} - \frac{wc_1}{r}$$

$$a_1 = \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \xi}, \quad b_1 = \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \theta} - \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial r}{\partial \eta}, \quad c_1 = \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial r}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \theta}$$

К этим уравнениям следует добавить уравнение Бернулли

$$h + V^2 = 1 \quad (2.3)$$

Граничными условиями для данной системы уравнений являются условие непротекания на теле и условия Ранкина — Гюгонно на ударной волне.

Таким образом, зная положение ударной волны, можно поставить задачу Коши в области течения за ударной волной с начальными условиями на скачке уплотнения. Краевая задача состоит в нахождении такого положения ударной волны, чтобы выполнялось условие непротекания на теле.

3. Для решения системы (2.2), (2.3) с граничными условиями используется разностный аналог метода прямых [6].

Проведем $P+1$ полуплоскость $\theta_j = j\pi/P$ ($j=0, 1, \dots, P$). Проведем также N цилиндрических поверхностей $\eta = \eta_i = \text{const}$ ($i=1, \dots, N$). Пересечением полуплоскостей и цилиндров являются прямые, параллельные оси $\eta=0$. Эти прямые пересекаются с плоскостями $\xi = \text{const}$ в $(P+1)N$ точках. Присоединим к ним точку на оси $\eta=0$. При фиксированном ξ любая функция может быть аппроксимирована как функция двух переменных по ее значениям в указанных $(P+1)N+1$ точках.

Производные по координате η аппроксимируем по трем точкам:

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} \Big|_i^j = \frac{N}{2} (f_{i+1}^j - f_{i-1}^j), \quad i=1, 2, \dots, N-1.$$

Здесь j — номер шага по θ , f — любая функция.

Аппроксимация функций по переменной ϑ производится с помощью кубических сплайн-функций. Граничными условиями для аппроксимирующей функции $g(\vartheta)$ на концах отрезка $[0, \pi]$ являются:

а) равенство нулю второй производной, если $f=w$

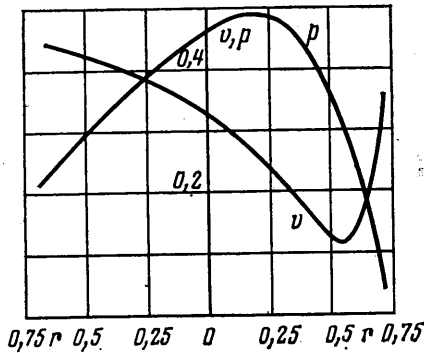
$$g''(0) = g''(\pi) = 0$$

б) равенство нулю первой производной для остальных функций

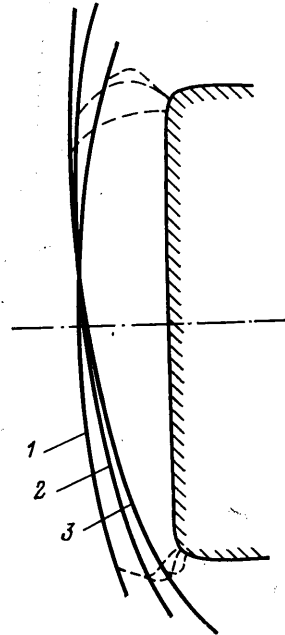
$$g'(0) = g'(\pi) = 0$$

Заменим в (2.2) производные по η и ϑ аппроксимируемыми их выражениями. Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной ξ на $(P+1)N+1$ прямых. Эта система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно газодинамических функций интегрируется по переменной ξ от ударной волны до тела. Неизвестными величинами являются $(P+1)N+1$ отливов ударной волны, которые подбираются из $(P+1)N+1$ условий непротекания на теле. Эта краевая задача для аппроксимирующей системы уравнений решается методом Ньютона.

4. Для взаимодействия струй с преградами характерным является резкое изменение функций внутри ударного



Фиг. 1



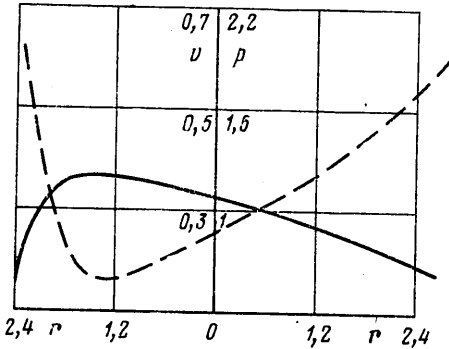
Фиг. 2

слоя из-за неравномерности набегающего потока, особенно при небольших расстояниях преграды от среза сопла и при больших размерах преграды. Так в [6] исследовалось обтекание бесконечной плоской преграды и сферы единичного радиуса. Если смещение сферы от оси струи приводит к абсолютному изменению величин в ударном слое при сохранении симметричности функций относительно нулевой линии тока, то для плоской преграды при изменении угла наклона к оси струи отмечается существенное проявление трехмерности течения.

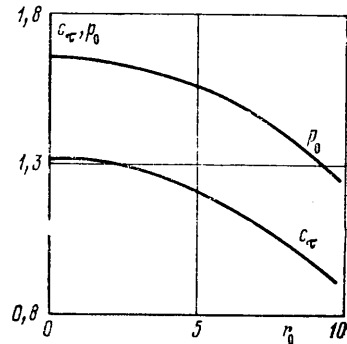
В [7] была представлена физическая картина обтекания струей с параметрами $M_a=4,5$, $\kappa_a=1,25$, $\theta_a=10^\circ$ плоской преграды, расположенной на расстоянии $z_0=25r_a$ от среза сопла под различными углами наклона преграды $\alpha=0, 10, 20^\circ$ к оси струи. При изменении угла наклона картина течения становится заметно трехмерной за счет изменения конфигурации звуковых линий и дозвуковой области течения, хотя форма ударной волны изменяется менее значительно. Резкая деформация дозвуковой области

течения происходит из-за неравномерного смещения звуковых точек на теле и ударной волне и разного характера поведения звуковых линий в наветренной и подветренной полуплоскостях. Это приводит к определенным трудностям при расчете течения и требует более тщательного выделения области влияния в ударном слое.

На фиг. 1 приведены графики распределения давления и модуля скорости на ударной волне для угла $\alpha=20^\circ$. Видно, что координаты максимума давления и минимума скорости на ударной волне не совпадают, причем координата максимума давления лежит значительно ближе к оси струи, чем минимум скорости. Из уравнения Бернулли следует, что минимум



Фиг. 3



Фиг. 4

модуля скорости совпадает с максимумом температуры. Следовательно, координаты максимумов давления и температуры на ударной волне при трехмерном взаимодействии свободно расширяющейся струи с преградами не совпадают, в то время как для случая равномерного потока они расположены в одной точке за прямым скачком. Значения энтропийной функции на преграде при изменении угла наклона преграды остаются постоянными с погрешностью, не превышающей 1%. С такой же точностью совпадают величины давления торможения на преграде для $0 < \alpha < 20^\circ$. Последнее свойство имеет важное практическое приложение, так как позволяет без проведения расчетов определять давление торможения на плоской преграде при произвольной ориентации сопла, если воспользоваться критерием подобия $p z_0^2 = \text{const}$ для больших расстояний от среза сопла [5].

При обтекании тел конечных размеров свободно расширяющейся струей эти свойства не выполняются. Неравномерность потока в струе приводит к изменению максимальной величины давления в ударном слое при перемещении преграды от оси струи, причем величина давления зависит от геометрии тела и его размеров. Влияние геометрии тела на величину давления объясняется перемещением ударной волны в поле струи и, следовательно, изменением условий перед ударной волной. Максимальное значение температуры в ударном слое зависит только от условий на срезе сопла.

На фиг. 2 приведена физическая картина обтекания торца цилиндра с радиусом $R=2r_a$ свободно расширяющейся струей с $M_a=2$, $\kappa_a=1,4$, $\theta_a=10^\circ$ для $z_0=25r_a$ и расстояний от оси цилиндра до оси струи $r_0/r_a=0; 6; 9$ (линии 1–3 соответственно). Видно заметное отличие в форме ударных волн (сплошные линии) и звуковых линий (штриховые линии). Координаты максимума давления и минимума модуля скорости на ударной волне для $r_0=9r_a$ отличаются незначительно (фиг. 3, сплошная линия — давление).

На фиг. 4 дана зависимость коэффициента сопротивления c_τ и давления торможения p_0 на торце цилиндра от величины r_0 . Величина c_τ отнесена к скоростному напору, вычисленному на оси струи в точке $z_0=25r_a$. Из-за неравномерности потока максимальная величина c_τ не превышает значения 1,32, хотя для равномерного потока с числом $M \approx 10$, соответствующим точке $z_0=25r_a$ на оси струи, значение c_τ для торца цилиндра равно 1,78. Перемещение цилиндра от оси струи сопровождается уменьшением коэффициента сопротивления и давления торможения. Если взять отношение представленных на графике c_τ и давления торможения p_0 , то для различных расстояний цилиндра от оси струи получаем значение $c_\tau=0,798$ с погрешностью, не превышающей 1% (давление отнесено к $\rho a v_{\max}^2 \cdot 10^{-3}$). Однако, давление торможения может быть определено только после решения задачи, поэтому целесообразно относить коэффициент сопротивления c_τ к местному скоростному напору. Таким образом, несмотря на неравномерность потока, величина c_τ , отнесенная к местному значению скоростного напора, будет практически постоянной при перемещении тела конечных размеров от оси струи.

В заключение авторы выражают благодарность А. П. Зюзину за проведение ряда расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кацкова О. Н., Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д., Шулишина Н. П. Опыт расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений газа методом характеристик. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1961. 60 с.
2. Roberts L., South J. C., Jr. Comments on exhaust flow field and surface impingement.— AIAA Journal, 1964, v. 2, № 5, p. 971–973.
3. Белоцерковский О. М., Булекбаев А., Голомазов М. М. и др. Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа: Теорет. и эксперимент. исследования. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1967. 401 с.
4. Жозов В. А., Хомутский А. А. Атлас сверхзвуковых течений свободно расширяющегося газа, истекающего из осесимметричного сопла.— Тр. ЦАГИ, 1970, в. 1224, 224 с.
5. Аверенкова Г. И., Ашратов Э. А. Истечение сверхзвуковой струи в вакуум.— В кн.: Сб. работ Вычисл. центра Моск. ун-та, вып. 7, с. 225–241.
6. Голомазов М. М., Зюзин А. П. Исследование взаимодействия струи, истекающей в вакуум, с преградами.— В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1976, т. 7, с. 55–69.
7. Белоцерковский О. М. Численное моделирование струйных задач газовой динамики.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 1, с. 5–17.

Москва

Поступила в редакцию
30.VII.1980