Слабое влияние формы на величину тяги таких сопел следует и из результатов расчетов, выполненных в [6] для двухфазных течений. Последние показали, что при аппроксимации участка $a'b$ кубичной параболой и при фиксированной точке b изменение углов наклона контура в a' и b на 5–10° меняет тягу не более чем на 0,6%. Оценки, основанные на проверке интегральных законов сохранения импульса и расхода и на сопоставлении результатов, полученных при разном числе точек (от 100 до 400 на каждой c^--характеристике пучка), позволяют считать, что погрешности определения Δ не превышают 10^{-4}. Заметим, наконец, что во всех рассчитанных примерах неравномерность и закрутка увеличивают удельную тягу. Такое поведение R/μ согласуется с выводами, сделанными ранее в [7] в рамках линейного анализа и в [8] – для сужающихся сопел.

В заключение авторы благодарят Л. Е. Стернина, инициировавшего данное исследование, а также В. А. Бугрова и Н. Н. Славянова за помощь в расчете до- и трансзвуковых течений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крайко А. Н.* Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979.
2. *Тилляева Н. И.* О профилировании сверхзвуковых частей осесимметричных сопл для неравномерных и закрученных течений.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 3.
3. *Иванов М. Я., Идиятуллина Ф. Л.* К расчету гладких стационарных течений идеального газа методом третьего порядка точности.– Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1978, т. 18, № 4.
4. *Славянов Н. Н.* Теоретическое исследование закрученных течений идеального газа в сопле Лаваля.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 6.
5. *Rao G. V. R.* Approximation of optimum thrust nozzle contour.— ARS Journal, 1960, v. 30, No. 6.
6. *Дритов Г. В., Тишин А. П.* О профилировании сопл, работающих на газе с частицами конденсата.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 1.
7. *Черный Г. Г.* Закрученные течения сжимаемого газа в каналах.– Изв. АН СССР, ОТН, 1956, № 6.
8. *Крайко А. Н., Соколов В. Е.* Об удельном импульсе потока в минимальном сечении сопла Лаваля и в выходном сечении сужающегося сопла.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 1.

Москва

Поступила в редакцию
31.III.1980

УДК 533.6.011.8

О ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ СКОЛЬЖЕНИЯ

КОГАН М. Н.

Получена структурная зависимость коэффициента скольжения от температуры. Показано, что обычно принимаемая зависимость справедлива лишь для молекул со степенным законом взаимодействия.

Рассмотрим для простоты диффузно отражающую стенку и пусть функция распределения $f_r \equiv f_r(x,\ y=0,\ \xi_r)$ отраженных ($\xi_{ry}>0$) молекул связана с функцией распределения $f_i \equiv f_i(x,\ y=0,\ \xi_i)$ падающих ($\xi_{iy}<0$) молекул соотношением

$$f_r = -Q\int \xi_{iy} f_i \, d\xi_i, \qquad Q = 2\pi^{-1} h_r^2 \exp(-h_r \xi_r^2) \tag{1}$$

где $T_r = m(2kh_r)^{-1}$ – температура отражающих молекул, связанная с температурой стенки коэффициентом аккомодации энергии.

В этом случае обычно скорость скольжения записывается в виде

$$u_x = C\rho_0^{-1}\mu(T_r)\sqrt{h_r}\,\frac{\partial u_x}{\partial y_1} \tag{2}$$

где $\rho_0 = \rho(x,\ y=0) = n(0)m$, C – постоянная, определяемая законом взаимодействия молекул. Покажем, однако, что такая простая температурная зависимость справедлива при степенном потенциале взаимодействия молекул $U=K/r^{s-1}$ и что в общем случае C является функцией T_r.

Известно (см., например, [1, 2]), что условия скольжения следуют из рассмотрения пристеночного слоя Кнудсена толщиной порядка длины пробега молекул λ. Пусть характерный размер внешнего к кнудсеновскому слою течения $L\gg\lambda$ и число Кнудсена $\varepsilon=\lambda/L\ll1$. Течение описывается уравнением Больцмана [1, 2]

$$\varepsilon\left(\xi_x\frac{\partial f}{\partial x}+\xi_y\frac{\partial f}{\partial y}\right)=I(f,f) \tag{3}$$

Ищется асимптотическое решение при $\varepsilon\to0$. Вне слоя Кнудсена справедливы с точностью до величины $O(\varepsilon^2)$ уравнения Навье – Стокса, и решение уравнения (3) имеет вид [1, 2]

$$f=f_H=f_0\left(1+2h_ru_x\xi_x-\xi_x\xi_yB\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\equiv f_0(1+\varphi_H) \tag{4}$$

$$f_0={}^1/_2n(0)Q(\pi h_r)^{-1/2}$$

где функция $B(n,\ T_r,\ \xi)$ – решение уравнения

$$-f_0h_r\xi_x\xi_y=\int f_0f_{01}(\xi_x'\xi_y'B'+\xi_{x1}'\xi_{y1}'B_1'-\xi_x\xi_yB-\xi_{x1}\xi_{y1}B_1)\,gb\,db\,d\omega\,d\xi_1\equiv L(\xi_x\xi_yB) \tag{5}$$

Внутри слоя $f=f_H+f_\mu\equiv f_0(1+\varphi_H+\varphi_\mu)$. Функция φ_μ удовлетворяет уравнению $(y_1=y/\varepsilon)$

$$f_0\xi_y\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial y_1}=L(\varphi_\mu) \tag{6}$$

условию $\varphi_\mu(y_1\to\infty)\to0$ и должна выбрать «невязку» навье-стоксовского решения на границе. Так как φ_H, а следовательно, и φ_μ антисимметричны по ξ_x, из (1) имеем

$$f_0(\varphi_{Hr}+\varphi_{\mu r})=-Q\int f_0(\varphi_{Hi}+\varphi_{\mu i})\,\xi_{iy}\,d\xi_i=0 \tag{7}$$

Следовательно

$$\varphi_{\mu r}=-\varphi_{Hr}=-2\sqrt{h_r}\,u_x(0)\,\xi_x^*+2\mu h_r\rho_0^{-1}\xi_x^*\xi_y^*\frac{\partial u_x}{\partial y} \tag{8}$$

$$\xi_{x,y}^*=\sqrt{h_r}\,\xi_{x,y},\qquad B^*=B\rho_0(2\mu h_r^2)^{-1}$$

Очевидно, решение уравнения (6) с условием (8) имеет вид

$$\varphi_\mu=u_x\sqrt{h_r}\,\varphi_1(\xi,\ y_1)+2\rho_0^{-1}\mu h_r\frac{\partial u_x}{\partial y}\varphi_2(\xi,\ y_1) \tag{9}$$

где φ_1 и φ_2 – ограниченные на бесконечности решения уравнения (6).

Для определения связи $u_x(0)$ с $\partial u_x/\partial y$ можно привлечь уравнения сохранения поперек слоя (см. [1], стр. 332).

Известно, что

$$\int L(\varphi)\,\psi(\xi)\,d\xi=\int\varphi L(\psi)\,d\xi \tag{10}$$

Поэтому если умножить (6) на ξ_x и проинтегрировать по скоростям и учесть, что $\varphi_\mu(y_1\to\infty)=0$, то получим

$$\int f_\mu\xi_x\xi_y\,d\xi\equiv\int f_{\mu r}\xi_x\xi_y\,d\xi_r+\int f_{\mu i}\xi_x\xi_y\,d\xi_i=0 \tag{11}$$

Записывая это условие на стенке, подставив $\varphi_{\mu r}$ согласно (8) и $\varphi_{\mu i}$ из (9), получим

$$u_x=\frac{\mu\sqrt{\pi h_r}}{n(0)\,m}\,\frac{1+a}{1+b}\,\frac{\partial u_x}{\partial y} \tag{12}$$

$$a=4\pi^{-1/2}\int e^{-\xi^{*2}}\xi_x^*\xi_y^*\varphi_2\,d\xi^*,\qquad b=-2\pi^{-1}\int e^{-\xi^{*2}}\xi_x^*\xi_y^*\varphi_1\,d\xi_i^*$$

В приближенном методе Максвелла полагают $\varphi_{\mu i}=0$ и тогда $a=b=0$. В уточненном методе Максвелла [3] полагают $\varphi_{\mu i}=\alpha h_r \xi_x$, где α – константа. Для ее определения используется дополнительное уравнение сохранения

$$\int f\varphi_\mu \xi_x \xi_y^2 B\, d\xi = 0 \tag{13}$$

которое получается умножением уравнения (6) на $\xi_x\xi_y B$ и интегрированием по скоростям с учетом последовательно (10), (5), (11) и условия $\varphi_\mu(y_1\to\infty)=0$. В этом случае

$$a = 4\pi^{-2}\int e^{-\xi^{*2}}\xi_x^{*2}\xi_y^{*3}B^{*2}\, d\xi^*, \qquad b=1 \tag{14}$$

Из (12) видно, что наряду с $\mu\sqrt{h_r}$ в общем случае от температуры могут зависеть a и b через φ_1 и φ_2.

В уравнении (6) естественно перейти от скоростей ξ к безразмерным скоростям ξ^*. Но в уравнение наряду со скоростями ξ и ξ_1 входят скорости молекул после столкновения ξ' и ξ_1', которые определяются векторами ξ и ξ_1 и двумя углами скорости после столкновения. Последние зависят от массы молекулы m, относительной скорости молекул g, прицельного расстояния b и закона взаимодействия молекул и, будучи безразмерными, должны зависеть от безразмерных комбинаций этих величин.

Степенной закон взаимодействия содержит одну определяющую величину K с размерностью $ML^{s+1}T^{-2}$. Из m, g, b и K можно составить лишь одну безразмерную величину $\beta=b(mg^2/K)^{1/s-1}$. Перейдя в (6) к переменным ξ^* и β, получим

$$\xi_y^*\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial y_1^*} = \frac{1}{\pi^{3/2}}\int e^{-\xi^{*2}}(\varphi_{\gamma_1}'+\varphi_\gamma'-\varphi_{\gamma_1}-\varphi_\gamma)\, g^{*(s-5)/(s-1)}\beta\, d\beta\, d\omega\, d\xi_1^* \tag{15}$$

$$y_1^* = y_1 n(0) h_r^{2/(s-1)}\left(\frac{K}{m}\right)^{2/(s-1)}, \qquad \gamma=1,2$$

Наличие h_r в y_1^* влияет на распределение φ_γ по y_1, но не меняет значение этих величин при $y_1=0$. Граничное условие при $y=0$

$$\varphi_1(y=0,\ \xi_r) = -2\xi_x^*, \qquad \varphi_2(y=0,\ \xi_r)=\xi_x^*\xi_y^*B^* \tag{16}$$

Из (15) и (16) видно, что h_r или T_r может войти в φ_γ лишь через B^*. Однако, перейдя в уравнении (5) к переменным ξ^* и β и учтя, что

$$\mu = m\int f^0\xi_x^2\xi_y^2 B\, d\xi$$

легко обнаружить, что для степенного закона взаимодействия молекул

$$B\sim h_r^{\frac{1}{2}(3s-7)/(s-1)}, \qquad \mu\sim h_r^{-\frac{1}{2}(s-3)/(s-1)}, \qquad B^*=B^*(\xi^*)$$

Таким образом, для степенного закона $\varphi_{1,2}=\varphi_{1,2}(\xi^*)$, a, b в (12) не зависят от T_r и, следовательно, имеет место температурная зависимость (2), в которой C не зависит от T_r.

При других законах взаимодействия столкновение определяется не одним размерным параметром K, а двумя (как в законе Ленарда – Джонса) или более, из которых не удается составить одну величину, включающую и b и g. Поэтому при переходе к g^* в выражение для угла поворота вектора относительной скорости войдет h_r, и B^* и φ_γ окажутся зависящими от ξ^* и h_r.

Ни в методе Максвелла, ни в методе Лойялки (см. (14)) в общем случае не получается правильная температурная зависимость коэффициента скольжения.

Для температурного скачка и других коэффициентов скольжения положение аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
2. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.
3. *Loyalka S. K.* Approximate method in the kinetic theory.— Phys. Fluids, 1971, v. 14, № 11, p. 2291.

Москва

Поступила в редакцию
4.X.1980