

течение развивается в весьма узком интервале чисел Рэлея путем постепенного увеличения одного из вихрей (см. последовательность обозначений $a-b$); однако промежуточные состояния являются устойчивыми, а обратное преобразование описывается той же кривой. Штриховой линией на фиг. 2 и 3 нанесена амплитудная кривая, полученная в отсутствие индуцированного течения. Видно, что при больших надкритических возмущении становится несущественным. При обоих вариантах возбуждения одновихревой структуры конечная точка нижней ветви смещается с интенсивностью возмущения в сторону больших R .

ЛИТЕРАТУРА

1. Сорокин В. С. О стационарных движениях в жидкости, подогреваемой снизу.— ПММ, 1954, т. 18, № 2.
2. Чернатынский В. И., Шлюomis М. И. Конвекция вблизи критических чисел Рэлея при почти вертикальном градиенте температуры.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 1.
3. Тарукин Е. Л. Ветвление решений уравнений конвекции в замкнутой полости с подвижной границей при подогреве снизу.— В кн.: Современные проблемы тепловой гравитационной конвекции. Минск, 1974.
4. Daniels P. G. The effect of distant sidewalls on the transition to finite amplitude Bénard convection.— Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1978, v. 358, № 1693.
5. Hall P., Walton J. C. The smooth transition to a convective regime in a two-dimensional box.— Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1978, v. 358, № 1693.
6. Зимин В. Д., Кетов А. И. Надкритические конвективные движения в кубической полости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 5.
7. Тарукин Е. Л. Конвекция в замкнутой полости, подогреваемой снизу, при нарушении условий равновесия.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 2.
8. Путин Г. Ф., Ткачева Е. А. Экспериментальное исследование надкритических конвективных движений в ячейке Хеле — Шоу.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 1.

Пермь

Поступила в редакцию
23.X.1979

УДК 532.546

О СТРУКТУРЕ ФРОНТА ДОВЫТЕСНЕНИЯ НЕФТИ РАСТВОРОМ АКТИВНОЙ ПРИМЕСИ В НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ

БРАГИНСКАЯ Г. С.

Структура фронта вытеснения нефти раствором активной примеси в неизотермических условиях в «крупномасштабном» приближении без учета тепловых потерь была детально изучена в [1, 2]. Ниже это рассмотрение дополнено анализом задач довытеснения, когда начальная водонасыщенность пласта велика. Эти задачи моделируют применение активных примесей и закачки горячей воды на поздней стадии разработки, когда значительная часть нефти уже вытеснена из пласта в ходе «обычного» заводнения и начальная водонасыщенность пласта велика. Изложение целиком опирается на работы [1, 2], содержание которых предполагается известным.

1. Постановка задачи. Система уравнений движения, описывающая рассматриваемый процесс, состоит из условий баланса воды, активной примеси в растворенном и сорбированном состоянии, теплового баланса и при описании крупномасштабных одномерных движений имеет вид [1, 2]

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{U}{m} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[cs + \frac{a(c)}{m} \right] + \frac{U}{m} \frac{\partial}{\partial x} (cF) = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [Ts + Tb] + \frac{U}{m} \frac{\partial}{\partial x} [TF + Th] = 0 \quad (1.3)$$

$$b = \frac{mC_2 + C_3}{m(C_1 - C_2)}, \quad h = \frac{C_2}{C_1 - C_2}$$

$$F = \left[1 + \frac{\mu_1 f_2}{\mu_2 f_1} \right]^{-1}, \quad F = F(s, c, T)$$

Здесь s — насыщенность порового пространства водой, U — суммарная скорость фильтрации, m — пористость, f_i — относительные фазовые проницаемости, μ_i — вязкости фаз, c — концентрация активной примеси в растворе, a — количество сорбированной примеси, T — температура, C_i — теплоемкости воды, нефти и породы соответственно. Индекс 1 относится к вытесняющей жидкости (воде), 2 — к вытесняемой (нефти); F — функция Баклея — Леверетта, равная доле вытесняющей жидкости в потоке.

Система (1.1) — (1.3) допускает разрывные решения со следующими условиями на скачках:

$$V[s] = \frac{U}{m} [F(s, c, T)], \quad V \left[cs + \frac{a}{m} \right] = \frac{U}{m} [cF(s, c, T)], \quad (1.4)$$

$$V[T(s+b)] = \frac{U}{m} [T(F+h)]$$

где V — скорость скачка; квадратными скобками обозначены скачки соответствующих величин.

Рассматриваемая задача отвечает начальным и граничным условиям вида

$$s = s_0, \quad c = c_0 = 0, \quad T = T_0 = 0 \quad (t = 0, 0 \leq x < \infty)$$

$$s = s^0, \quad c = c^0 = 1, \quad T = T^0 = 1 \quad (x = 0, 0 \leq t)$$
(1.5)

Здесь, как и в [1, 2], используются нормированные значения температуры и концентрации; отличие задачи довытеснения состоит в том, что s_0 может быть достаточно велико, так что $0 < F(s_0) < 1$.

Задача довытеснения также допускает автомодельное решение вида

$$s = s(\xi), \quad c = c(\xi), \quad T = T(\xi), \quad \xi = mx/(Ut) \quad (1.6)$$

$$s(\infty) = s_0, \quad c(\infty) = 0, \quad T(\infty) = 0; \quad s(0) = s^0, \quad c(0) = 1, \quad T(0) = 1$$

которое будем строить, как и в [1], ограничиваясь случаями, когда зависимости $c(\xi)$ и $T(\xi)$ имеют вид ступенчатых функций:

$$c(\xi) = 1, \quad \xi < \xi_c, \quad c(\xi) = 0, \quad \xi > \xi_c; \quad T(\xi) = 1, \quad \xi < \xi_T, \quad T(\xi) = 0, \quad \xi > \xi_T \quad (1.7)$$

Аutomодельное решение «склеивается» из участков непрерывного изменения искоемых функций, сопрягаемых скачками. К скачкам предъявляется требование устойчивости, состоящее в следующем: число характеристик, уходящих с линии разрыва, должно быть на единицу меньше числа переменных (т. е. в данном случае равно двум) [3].

Для графического построения автомодельного решения на плоскости (s, F) рассматривается семейство четырех функций одной переменной s : $F_{ij}(s) = F(s, i, j)$, $i, j = 0, 1$. Решение может состоять из следующих элементов.

Участки непрерывного изменения s с $s'(\xi) \neq 0$ при постоянных c и T . На этих участках $\xi = F_{,s}(s, c, T)$. На плоскости (s, F) им соответствует движение вдоль кривой $F(s, c, T)$, причем $F_{,s}(s, c, T)$ возрастает вдоль пути (движение из точки $(s^0, F(s^0, 1, 1))$ в точку $(s_0, F(s_0, 0, 0))$.

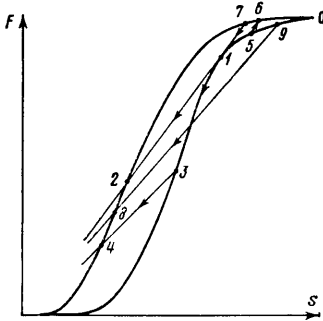
Участки постоянства s , c и T . На плоскости (s, F) им соответствуют точки.

Скачки s при постоянных c и T . Им соответствуют переходы из одной точки кривой $F_{ij}(s)$ в другую точку этой же кривой, причем обе s -характеристики приходят на линию разрыва. Таких скачков существует два вида. Перед скачком (со стороны больших ξ) всегда идет участок постоянства s , c и T , а за скачком может быть такой же участок или участок непрерывного изменения s . Если за скачком идет участок непрерывного изменения s , то значение s на скачке уменьшается, линия, вдоль которой происходит скачок, является касательной к кривой F_{ij} в точке (s^-, F^-) . Если скачок сопрягает два участка постоянства s , то значение s на скачке может и увеличиваться, и уменьшаться.

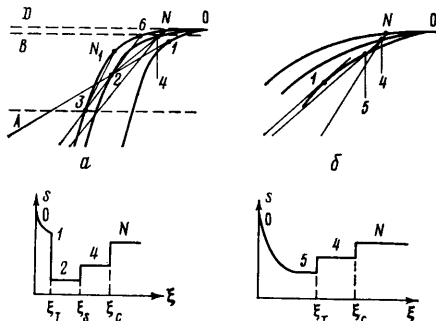
Сопряженные скачки c и s или T и s . Им соответствует переход с одной кривой F_{ij} на другую. На такие линии разрыва приходит по одной s -характеристике. Этих скачков — шесть видов. С одной стороны от скачка всегда идет участок постоянства s .

В построении участвуют две кривые F_{ij} , и вдоль правой из них может идти участок непрерывного изменения s . Если скачок происходит с правой кривой на левую, как на фиг. 1, то участок непрерывного изменения s движется за скачком (скачок 1-2 фиг. 1). Если скачок происходит с левой кривой на правую, то участок изменения s расположен впереди скачка (скачок 7-1, 1- точка касания правой кривой). На фиг. 1 показаны также два возможных скачка, сопрягающих участки постоянства в случае перехода с правой кривой на левую: 3-4 - с уменьшением насыщенности и 5-6 - с увеличением. В случае перехода с левой кривой на правую направление скачка (стрелок на фиг. 1) меняется на противоположное: 4-3 - с увеличением насыщенности и 6-5 - с уменьшением.

Скачок всех трех переменных (в [1] он назван (c, T) -скачком). На этом скачке на линию разрыва приходят обе c - и обе T -характеристики, а обе s -характеристики с нее уходят. Независимо от взаимного расположения кривых F_{00} и F_{11} по обе стороны от такого скачка идут участки постоянства s , причем за скачком характеристи-



Фиг. 1



Фиг. 2

ки имеют меньший, а перед - больший наклон, чем линия разрыва (скачок 7-8 фиг. 5).

2. Построение автомодельного решения. Структура автомодельного решения определяется взаимным положением кривых F_{ij} на плоскости (s, F) и положением начальной точки $N=F(s_0, 0, 0)$ на кривой F_{00} . Будем считать, что производные $F_{,c}$ и $F_{,T}$ не меняют знака и пользоваться предложенной в [1] классификацией структуры решений.

При заданных положениях кривых F_{ij} и точек O_c и O_T решение задачи довытеснения определяется положением точки N на кривой F_{00} .

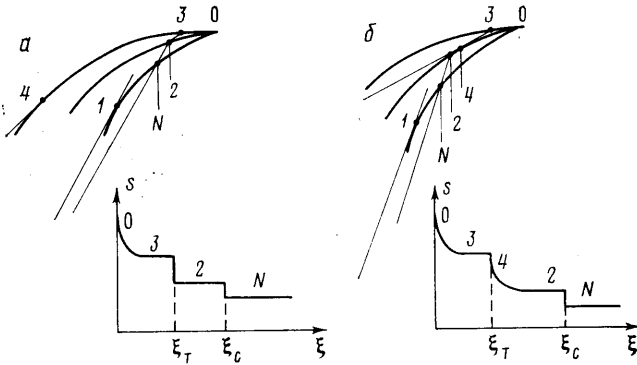
Пусть $F_{,c} \leq 0, F_{,T} \leq 0$. Тогда c - и T -скачки строятся так же, как и для задачи вытеснения, и изображающая точка переходит на кривую F_{00} по прямой, соответствующей более быстрому скачку. Затем решение либо достраивается до конца, либо перестраивается заново в зависимости от положения точки N . (Прямая (2-3), по которой произошел переход на F_{00} , разделяет F_{00} на три части (фиг. 2, а): область A - ниже точки прихода на F_{00} ; область B - между нижним и верхним пересечением с F_{00} прямой, по которой произошел скачок, область D - выше верхнего пересечения с F_{00} этой прямой (большие s_0). Расположение кривых слева направо: F_{00}, F_{10}, F_{11} .

Если точка N находится в области A , то решение достраивается так же, как и для задачи вытеснения. Сама задача вытеснения может рассматриваться как частный случай обобщенной задачи довытеснения, когда точка N лежит в области A . Если точка N лежит в области B , то решение заканчивается s -скачком с увеличением насыщенности (скачок 3 - N_1 , фиг. 2, а). Интересен случай, когда точка N лежит в области D , - решение надо перестраивать. В дальнейшем рассматривается только такое положение точки N ; именно этот случай может оказаться основным при описании доработки нефтяных месторождений.

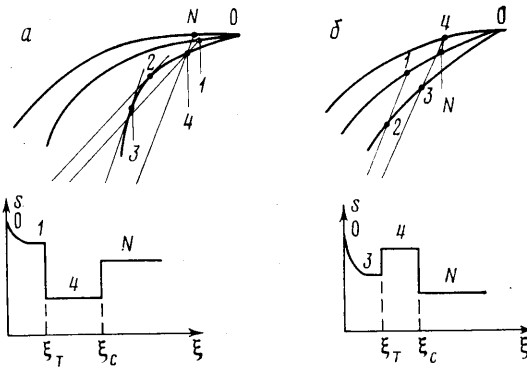
Пусть точка N лежит в области D (фиг. 2, а) и, как это показано на рисунке, скорость c -скачка больше скорости T -скачка. Проведем прямую через точки O_c и N ; точка 4 - точка пересечения ее с кривой F_{10} . Верхнее пересечение T -касательной к кривой F_{11} с кривой F_{10} делит F_{10} на две области: левую B_1 и правую D_1 . Если точка 4 лежит в области B_1 , то решением является путь 0-1-2-4-N фиг. 2, а, и оно имеет следующую структуру:

$$(1, 1) - s - JT \rightarrow (1, 0) - P - J \rightarrow (1, 0) - P - Jc \rightarrow (0, 0) \tag{2.1}$$

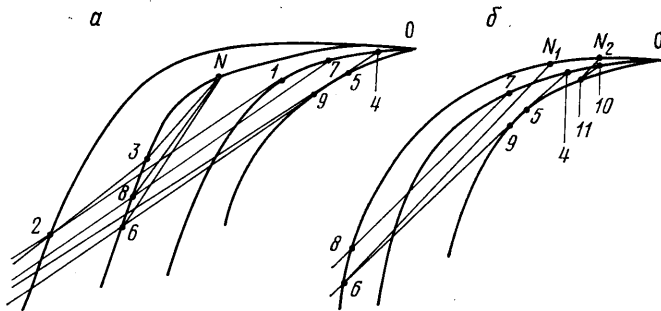
Если точка 4 лежит в области D_1 , то T -скачок происходит не по касательной. Решением является путь 0-5-4-N фиг. 2, б (слева направо: F_{00}, F_{10}, F_{11}), и оно



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

имеет структуру

$$(1, 1) - s - P - JT \rightarrow (1, 0) - P - Jc \rightarrow (0, 0) \quad (2.2)$$

На фиг. 2 показаны соответствующие зависимости $s(\xi)$.

Пусть теперь $F_{,c} \geq 0, F_{,T} \geq 0$ и пусть точка N лежит в области D . Более быстрый с-скачок происходит по прямой, проведенной через точки O_c и N (переход $2 - N$ фиг. 3, слева направо: F_{11}, F_{10}, F_{00}). Проведем T -касательную к кривой F_{10} (точка 4 - точка касания). Если точка 4 ниже точки 2, то решением является путь $0-3-2-N$ фиг. 3, а, и оно имеет структуру (2.2). Если точка 4 выше точки 2, то решением является путь $0-3-4-2-N$ фиг. 3, б, и оно имеет следующую структуру:

$$(1, 1) - s - P - JT \rightarrow (1, 0) - s - P - Jc \rightarrow (0, 0) \quad (2.3)$$

Перейдем к случаю $F_{,c} \geq 0, F_{,T} \leq 0$. В [1] ему отвечают решения со структурами (3.7) - (3.12) (нумерация из [1]). Существенные отличия возникают лишь при распо-

ложении точки N в области D . Для расположений точек O_c и O_T , соответствующих структурам (3.7), (3.8) и (3.9), построение решения задачи довытеснения аналогично рассмотренному выше. Кривая F_{10} делится T -касательной к F_{11} на две области, и получаются две структуры решений, совпадающие с предыдущими; отличие состоит в том, что теперь на s -скачке значение насыщенности уменьшается, так как кривая F_{00} лежит в данном случае ниже кривой F_{10} . При расположении точек, соответствующем структуре (3.12), получается только второе из этих решений.

Пусть расположение точек O_c и O_T такое, что s -скачок медленнее T -скачка (структура (3.10) в [1]). Более быстрый T -скачок происходит по T -прямой, проведенной через точки O_T и N . Если эта прямая пересекает F_{01} ниже проведенной к ней s -касательной, то s -скачок происходит по s -касательной к F_{01} , впереди s -скачка идет участок уменьшения насыщенности (s -волна). Решение имеет следующую структуру:

$$(1, 1) - s - P - Jc \rightarrow (0, 1) - s - P - JT \rightarrow (0, 0) \quad (2.4)$$

Если точка пересечения кривой F_{01} с прямой $O_T N$ выше проведенной к ней s -касательной, то s -скачок происходит по s -прямой — путь $0-1-4-N$ фиг. 4, а (слева направо: F_{00}, F_{11}, F_{01}). Решение имеет следующую структуру:

$$(1, 1) - s - P - Jc \rightarrow (0, 1) - P - JT \rightarrow (0, 0) \quad (2.5)$$

Рассмотрим теперь «многозначный» случай, когда точка O_T лежит на плоскости (s, F) ниже оси абсцисс. Структура решения зависит в этом случае еще и от положения точки N относительно прямой $O_c O_T$.

В случае, когда прямая $O_c O_T$ пересекает кривые F_{00} и F_{11} , но не пересекает F_{01} , задача вытеснения имеет три решения [1, 2]: с медленным скачком концентрации, с медленным скачком температуры и с двойным (s, T)-скачком. Если в задаче довытеснения для каждого из этих решений точка N попадает в области A или B , то соответствующее решение достраивается так, как об этом говорилось ранее. Решение с двойным (s, T)-скачком имеет следующую структуру:

$$(1, 1) - s - P - JTc \rightarrow (0, 0) - P - J \rightarrow (0, 0) \quad (2.6)$$

Таким образом, задача довытеснения имеет в этих случаях три решения. На фиг. 5, а показаны три решения в случае, когда точка N находится в области B : $0-1-2-3-N$ — с медленным скачком температуры, $0-4-5-9-6-N$ — с медленным скачком концентрации и $0-7-8-N$ — с двойным (s, T)-скачком (слева направо: $F_{10}, F_{00}, F_{11}, F_{01}$).

Если точка N лежит на F_{00} выше верхнего пересечения с ней прямой $O_c O_T$ (т. е. в области D для решения с двойным (s, T)-скачком), то построение, содержащее двойной (s, T)-скачок, невозможно. При этом точка N попадает в область D и для решения с медленным скачком температуры, но построение решения со структурой (2.2) тоже невозможно. В этом случае возможно только построение решения с медленным s -скачком, причем для него точка N может оказаться как в области B — путь $0-4-5-9-6-N_1$ фиг. 5, б, так и в области D — путь $0-10-11-N_2$ фиг. 5, б (слева направо: F_{00}, F_{11}, F_{01}). Задача довытеснения имеет при этом одно решение.

Если прямая $O_c O_T$ пересекает кривую F_{01} в двух точках (следовательно, и все остальные кривые тоже), то задача вытеснения имеет два решения: с медленным скачком температуры и с двойным (s, T)-скачком. Если при таком же положении кривых F_i и точек O_c и O_T точка N лежит на F_{00} выше верхнего пересечения с ней прямой $O_c O_T$, то возможно только построение с медленным скачком концентрации.

Для задачи вытеснения при условии $F_{,c} \leq 0, F_{,T} \geq 0$ нет положения точек O_c и O_T , когда возможны три решения. «Трехзначному» случаю соответствует единственное решение, содержащее двойной (s, T)-скачок. Если в задаче довытеснения точка N попадает в область B , то она имеет решение с двойным (s, T)-скачком со структурой (2.6). Если же точка N попадает в область D , то задача довытеснения имеет решение с медленным s -скачком со структурой (2.5), в которой заменены s на T и T на s — путь $0-1-4-N$ фиг. 4, б (слева направо: F_{01}, F_{00}, F_{11}).

Автор благодарит В. М. Ентова за постановку задачи и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брагинская Г. С., Енгов В. М. О неизотермическом вытеснении нефти раствором активной примеси. М., 1978. 60 с. (Препринт Ин-та пробл. мех. АН СССР, № 112).
2. Брагинская Г. С., Енгов В. М. О неизотермическом вытеснении нефти раствором активной примеси. Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 6, с. 99.
3. Гельфанд И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. Усп. матем. наук, 1959, т. 14, вып. 2, с. 87.

Москва

Поступила в редакцию
29.IV.1980