

5. Happel J., Pfeffer R. The motion of two spheres following each other a viscous fluid.— A. I. Ch. Journal, 1960, v. 6, № 1.
6. Cooley M., O'Neill M. On the slow motion of two spheres in contact along their line of center trough a viscous fluid.— Proc. Cambridge Phil. Soc., 1969, v. 66, № 2.
7. Дородницын А. А., Меллер Н. А. О некоторых подходах к решению стационарных уравнений Навье — Стокса.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1968, т. 8, № 2.
8. Биркгоф Г. Гидродинамика. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
9. Иванов К. П., Ривкин В. Я. Об обтекании двух частиц вязкой жидкостью.— Тр. 5-го Всес. семинара по числ. методам механ. вязкой жидкости. Ч. 2. Новосибирск, 1975.
10. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.

Ленинград

Поступила в редакцию
17.III.1980

УДК 532.517.2

ВЛИЯНИЕ ТЕРМИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ГРАНИЦЫ НА ВЫНУЖДЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ СЛОЕ

 МАКАРЕНКО И. П., СИМУНИ Л. М.

Задача о прямолинейно-параллельном ламинарном движении вязкой несжимаемой жидкости при наличии фиксированной в пространстве свободной границы имеет простое решение [1]. Учет сил плавучести при термической неоднородности границы значительно усложняет картину течения. В работе [2] рассматривалась в линеаризованной постановке задача о движении жидкости при наличии точечного теплового источника. В данной статье при помощи численного решения уравнений Навье — Стокса исследуется задача о ламинарном движении несжимаемой жидкости в плоском слое в случае, когда участок нижней границы имеет температуру, отличную от температуры остальной части нижней границы. Задача решается в приближении Буссинеска.

Рассматриваем задачу о движении вязкой несжимаемой жидкости в плоском слое высотой h с заданным расходом через поперечное сечение. Движение в принятых обозначениях определяется следующими уравнениями и граничными условиями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) + \beta g T \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \\ y=0: \quad T &= T_0 \quad |x| > a; \quad T = T_1 \quad |x| \leq a \\ v_x &= 0, \quad v_y = 0 \\ y=h: \quad T &= T_2, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0, \quad v = 0. \end{aligned}$$

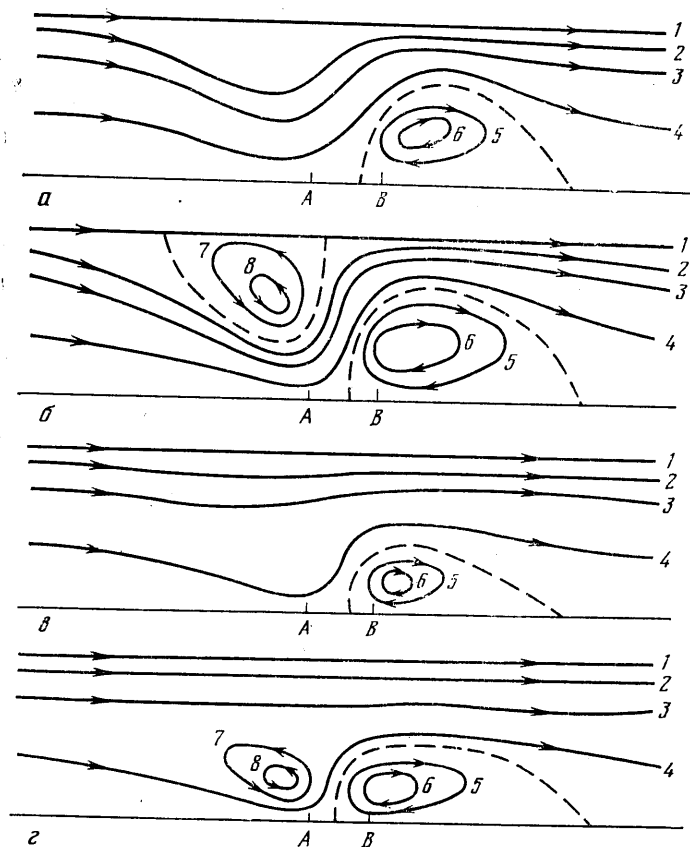
1. На боковых границах принимаем условие периодичности. Переходим к безразмерным переменным по формулам

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{h}, \quad y' = \frac{y}{h}, \quad t' = \frac{t\nu}{h^2}, \quad u = \frac{v_x}{U} \\ v &= \frac{v_y}{U}, \quad \vartheta = \frac{(T-T_0)}{(T_1-T_0)}, \quad P = \frac{\rho h^2}{\rho \nu^2 \text{Re}}. \end{aligned}$$

Обычным образом введем функцию тока ψ и завихренность φ , связанные с безразмерными скоростями соотношениями

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \varphi = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

(штрих у безразмерных аргументов опускаем).



Для функции тока и завихренности получаем систему со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{Re} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\text{Gr}}{\text{Re}} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \varphi \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \text{Re} \left(u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) &= \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \right) \\ \gamma &= \frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_0}, \quad \text{Re} = \frac{Uh}{\nu}, \quad \text{Gr} = \beta g (T_2 - T_1) \frac{h^3}{\nu}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{k} \\ y=0: \quad \vartheta &= 0 \quad |x| > a/h, \quad \vartheta = 1 \quad |x| < a/h, \quad \psi = 0 \\ y=1: \quad \vartheta &= \gamma, \quad \psi = q, \quad \varphi = 0 \end{aligned}$$

q — заданный безразмерный расход жидкости через поперечное сечение, U — средняя скорость, определяемая этим расходом.

В дальнейшем число Прандтля принимается равным единице. Система (2) решается методом конечных разностей по «явно-неявной» схеме аналогично тому,

как это сделано в [3]. В дальнейшем излагаются стационарные результаты, полученные методом установления. При использовании «явно-неявной» схемы уравнение для завихренности решается по явной схеме, а уравнение для функции тока — неявным образом методом итераций. При этом осуществлялся автоматический выбор шага по времени в зависимости от числа итераций, необходимого для сходимости с заданной точностью при итеративном решении разностного уравнения для функции тока.

Разностное граничное условие для завихренности на нижней границе принималось, как и в [3], в форме Тома $\varphi_{i,0} = 2\varphi_{i,1} / (\Delta y)^2$, где $\varphi_{i,0}$, $\varphi_{i,1}$ — значения функции тока и завихренности в соответствующих точках сетки, Δy — шаг сетки по аргументу y . Такая форма граничного условия принята в связи с тем, что для системы (2) принимается разностная аппроксимация второго порядка точности по пространственным переменным и использование граничного условия обеспечивает тот же порядок точности [4]. Исследуемое течение зависит от числа Грасгофа, параметра a/h , числа Рейнольдса и параметра γ . При этом боковые границы выбираем достаточно далеко, так чтобы дальнейшее увеличение области в этом направлении с достаточной точностью не сказывалось бы на движении в окрестности теплового источника.

В данной работе излагаются некоторые результаты по исследованию влияния на движение величин γ и Gr . Для остальных параметров принимались следующие значения: $Re=1$, $q=0,5$, $a/h=0,1$. На фигуре, *a* отрезок AB — это участок нижней границы, на котором $\vartheta=1$. При малых числах Грасгофа осуществляется движение с циркуляционной ячейкой вблизи нагретого участка нижней границы, смещенной по потоку, как это показано на фигуре, *a* для $Gr=250$, $\gamma=0$. Линиям 1–6 на фигуре, *a* соответствуют значения $\psi=0,5; 0,4; 0,3; 0,1; -0,05; -0,08$. Движение характеризуется наличием циркуляционной зоны, смещенной вниз по потоку, и опусканием жидкости перед этой зоной. При увеличении числа Грасгофа до значения $Gr=1000$ циркуляционное течение усиливается, скорости опускания жидкости перед ним возрастают и у поверхности жидкости образуется слабое циркуляционное течение. Такая картина течения сохранялась при $Gr=1000$ для $\gamma=1$ и $\gamma=2$.

На фигуре, *b* показаны линии тока для $Gr=1000$, $\gamma=2$. Линиям 1–8 на фигуре, *b* соответствуют значения $\psi=0,5; 0,4; 0,3; 0,1; -0,1; -0,2; 0,51; 0,55$. Дальнейшее увеличение числа γ уничтожает появившийся у поверхности вихрь, линии тока у поверхности становятся близкими к прямолинейным, опускание жидкости происходит непосредственно перед циркуляционной зоной. Такого рода движение получилось при $Gr=1000$ для $\gamma=4, 7$ и 10 . На фигуре, *c* показаны линии тока при $Gr=1000$ для $\gamma=10$. Линиям 1–6 на фигуре, *c* соответствуют значения $\psi=0,5; 0,4; 0,3; 0,1; -0,05; -0,1$. При дальнейшем увеличении числа Грасгофа снова возникает вторая зона циркуляционного течения, однако линии тока у поверхности остаются близкими к прямолинейным и циркуляционная зона возникает вблизи основания. Линии тока такого течения показаны на фигуре, *d* для $Gr=5000$, $\gamma=10$. Линиям 1–8 на фигуре, *d* соответствуют значения $\psi=0,5; 0,4; 0,3; 0,1; -0,1; -0,2; 0,25; 0,3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., Гостехиздат, 1955.
2. Кабанов А. С. Плоская свободная конвекция, возникающая от локального источника тепла в устойчиво стратифицированной среде. ПММ, 1979, № 2.
3. Симуни Л. М. Движение вязкой несжимаемой жидкости в плоской трубе. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 6.
4. Оганесян Л. А. Сходимость разностной схемы Тома для решения уравнений Навье — Стокса в прямоугольнике. Изв. АН АрмССР. Сер. матем., 1972, т. 7, № 1.

Ленинград

Поступила в редакцию
6.V.1980