

УДК 532.516

**СТАЦИОНАРНОЕ ОБТЕКАНИЕ ДВУХ ЧАСТИЦ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ
ЖИДКОСТЬЮ ПРИ УМЕРЕННЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА**

ИВАНОВ К. П., РИВКИНД В. Я.

Изучается осесимметричное обтекание двух частиц сферической формы при числах Рейнольдса $1 \leq R \leq 80$. Исследуются картины течения, распределение давления и коэффициент сопротивления при различных расстояниях между сферами. Устанавливается немонотонный характер зависимости коэффициента сопротивления от параметров, определяющих течение.

1. Совместное движение и взаимодействие частиц в потоке вязкой несжимаемой жидкости является основой для построения моделей расчетов течений двухфазных сред. Если поток есть однородная монодисперсная среда, то основные влияния оказывают частицы, расположенные вблизи данной. Наиболее интересным для исследования представляется движение и взаимодействие частиц, движущихся друг за другом в плоскости, перпендикулярной потоку.

Известно [1], что силы взаимодействия частиц, следующих друг за другом, существенно сил взаимодействия частиц, движущихся поперек потока. Исследование случая частиц, движущихся друг за другом, в стоксовом приближении проводилось в ряде работ [2-6]. Однако известно [1, 5], что начиная с чисел Рейнольдса, равных 0,25, учет инерционных членов необходим.

В данной работе рассматривается диапазон средних чисел Рейнольдса, при которых физически реализуется условие осевой симметрии. Считаем, что частицы движутся равномерно и прямолинейно вдоль линии, соединяющей их центры в потоке вязкой несжимаемой жидкости, и картина поля течения симметрична по углу θ , где (r, θ, z) — цилиндрическая система координат.

Введем биполярную систему координат ξ, η :

$$\xi + i\eta = \log \{ [r + i(z+c)] [r + i(z-c)]^{-1} \}$$

и свяжем ее с частицами так, чтобы координатные поверхности $\xi = \xi_1, \xi = \xi_2, 0 \leq \eta \leq \pi$ задавали поверхности сфер. Тогда система уравнений Навье — Стокса имеет вид

$$-\frac{2}{R} L\omega = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\Phi}{A} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} (\omega A) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\Phi}{A} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} (\omega A), \quad L\Phi = -W \quad (1.1)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} A^{-1} + \psi = \psi_\infty + \psi, \quad Lu \equiv \frac{\partial}{\partial \xi} \left(A \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(A \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)$$

$$A = A(\xi, \eta) = (c \sin \eta)^{-1} (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta), \quad R = 2aU\rho\mu^{-1}$$

$$(\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, 0 \leq \eta \leq \pi)$$

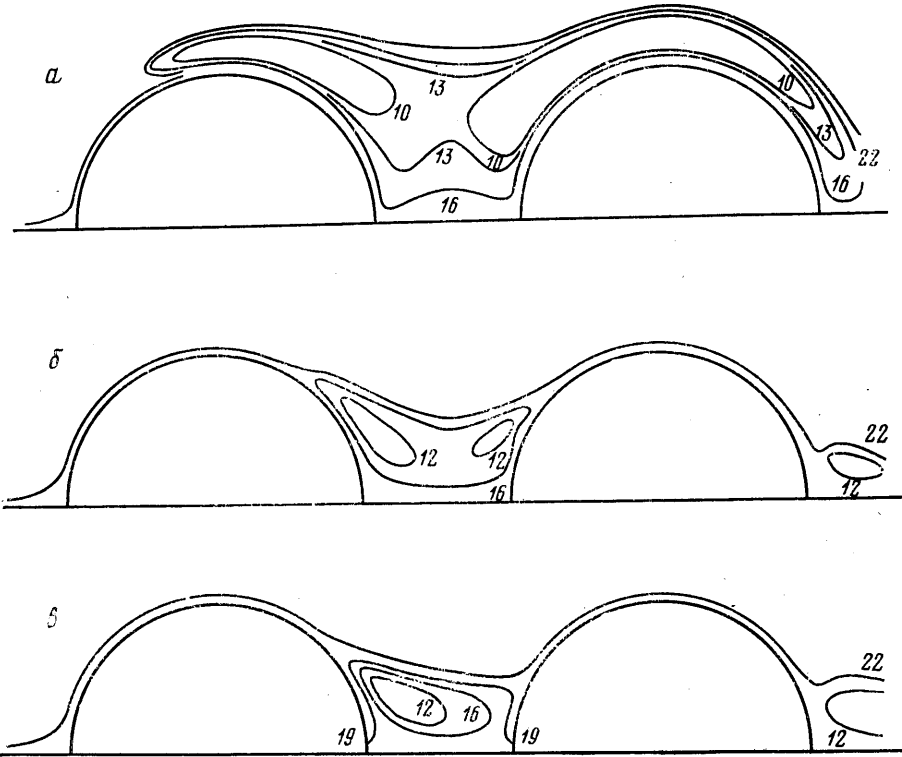
Здесь a — радиус большого шара, ρ — плотность, U — скорость на бесконечности, μ — коэффициент вязкости, ω — вихрь, ψ — функция тока. На сферах ставятся условия прилипания, а на оси — условия осевой симметрии

$$\Phi|_{\xi=\xi_i} = \partial\Phi/\partial\xi|_{\xi=\xi_i} = 0, \quad \omega|_{\eta=0,\pi} = 0, \quad \Phi|_{\eta=0,\pi} = 0, \quad i=1,2 \quad (1.2)$$

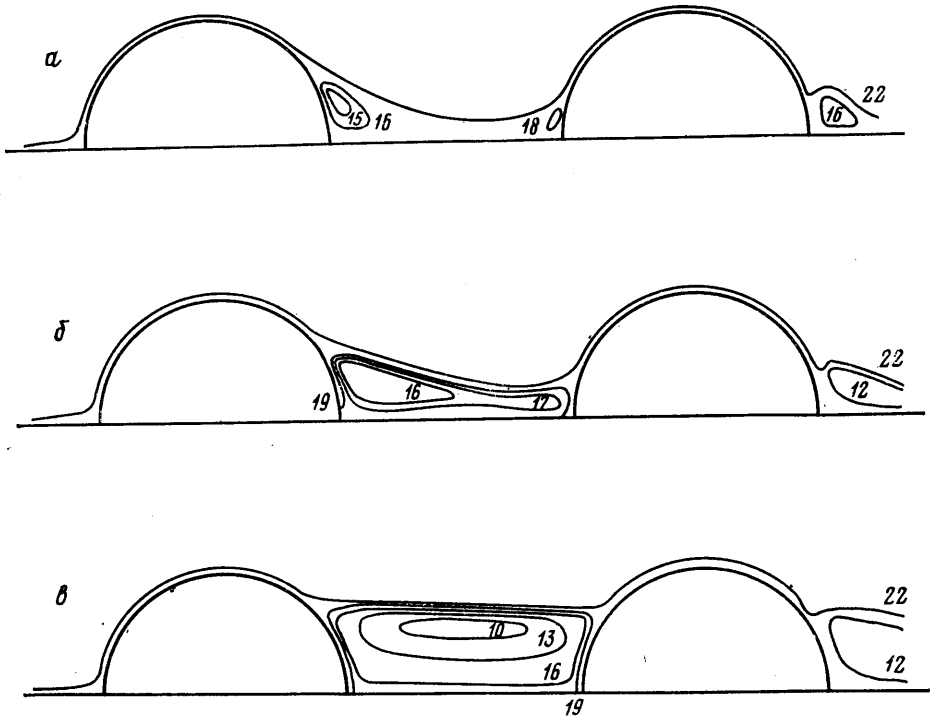
Задача (1.1), (1.2) решалась относительно функций (ψ, ω) на основе метода расщепления с установлением по времени и итеративным заданием вихря на границе [7].

Расчеты проводились на БЭСМ-6 с сеткой 40×40 , причем в качестве начального приближения принималось точное решение линейной задачи [1]. Время счета зависело от чисел R, b и итерационных параметров и колебалось от 20 до 50 мин.

2. Определяющими параметрами течения являются: число Рейнольдса R и b — расстояние между центрами сфер (предполагается, что сферы имеют одинаковый радиус).

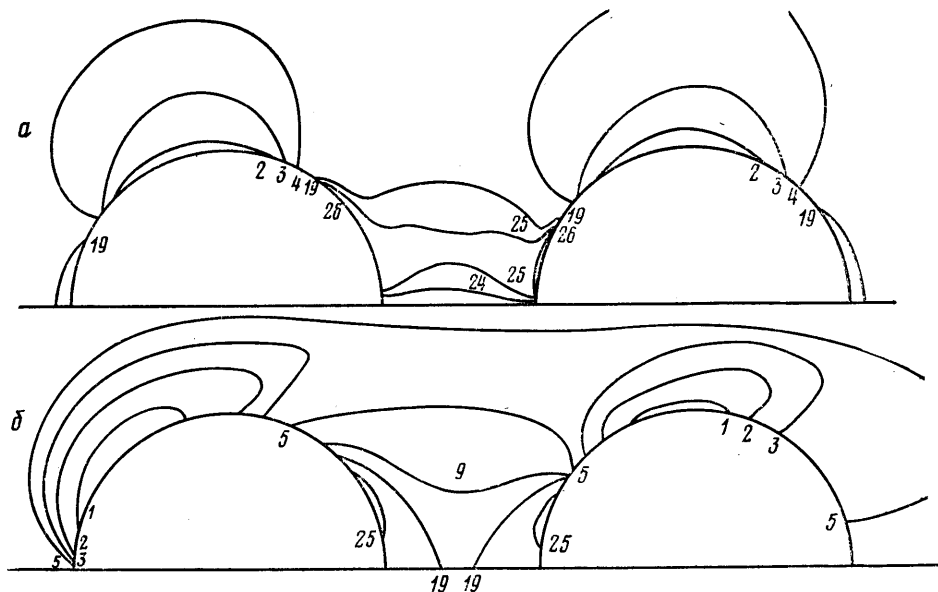


Фиг. 1



Фиг. 2

Картина течения изучалась при различных скоростях набегающего потока (число R). Оказалось, что все расстояния можно условно разделить на малые ($b \leq 5a$), средние ($b \leq 8a$) и большие ($b > 8a$). Было обнаружено, что при малых скоростях набегающего потока R и малых расстояниях между сферами образуется вихрь, захватывающий кормовую часть второго шара. Этот вихрь имеет сложную структуру, зависящую от числа Рейнольдса. На фиг. 1 кривые $a, б, в$ соответствуют значениям $R=1; 2; 40$ при $b=3a$. При малых R вихрь состоит из двух серповидных зон, располагающихся вблизи сфер, причем уменьшение расстояния увеличивает как размеры зоны, так и ее интенсивность. График давления при $R=1$ показывает, что в зоне между сферами возникает избыточное давление по отношению к лобовой



Фиг. 3

точке первой и кормовой точке второй сферы, что объясняет эффект подсосывания вихря указанным выше образом. Если увеличивает скорость набегающего потока до величины, не превышающей $R^*=R^*(b)$ ($b=4a, R^*\approx 20$), то наблюдается снос указанных зон с одновременным их уменьшением; дальнейшее увеличение числа Рейнольдса ($R > R^*$) приводит к тому, что зоны, существовавшие в пространстве между сферами, приближаются друг к другу и сливаются в одну (фиг. 1, 2 — нижние рисунки), а за второй сферой образуется возвратный вихрь (значения кривых приведены ниже).

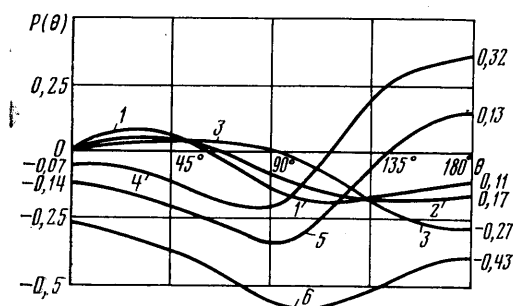
Номер кривой	1	2	3	4	5
Значение	$-2 \cdot 10^{-1}$	$-1,3 \cdot 10^0$	$-8 \cdot 10^{-1}$	$-5 \cdot 10^{-1}$	$-4 \cdot 10^{-1}$
Номер кривой	6	7	8	9	10
Значение	$-2 \cdot 10^{-1}$	$-1 \cdot 10^{-1}$	$-8 \cdot 10^{-2}$	$-2 \cdot 10^{-2}$	$-4 \cdot 10^{-3}$
Номер кривой	11	12	13	14	15
Значение	$-2 \cdot 10^{-3}$	$-1 \cdot 10^{-3}$	$-25 \cdot 10^{-4}$	$-15 \cdot 10^{-4}$	$-6 \cdot 10^{-4}$
Номер кривой	16	17	18	19	
Значение	$-2 \cdot 10^{-4}$	$-1 \cdot 10^{-4}$	$-5 \cdot 10^{-5}$	0	
Номер кривой	20	21	22	23	
Значение	$2 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-2}$	
Номер кривой	24	25	26	27	
Значение	$2 \cdot 10^{-1}$	$3 \cdot 10^{-1}$	$13 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-1}$	

При этом зависимость давления от угла, отсчитываемого от оси, становится схожа с аналогичной зависимостью давления для одиночного шара на первой сфере и характеризуется перепадом давления, связанным с зонами возрастного течения для второй (при $b=4a$ и $R=40$ кривая 1 соответствует первой сфере, 4 — второй).

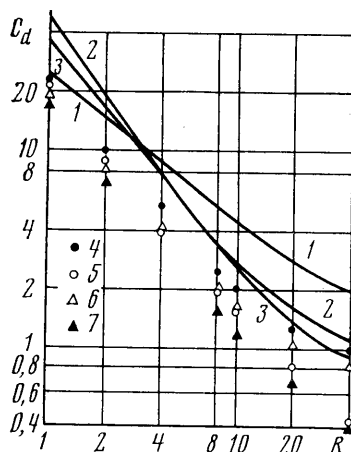
Кривые постоянного уровня для вихревых напряженностей на всех расстоя-

ниях при малых числах Рейнольдса замыкаются на каждую сферу или на обе одновременно. На фиг. 3 кривые *a*, *b* соответствуют значениям $R=1; 40$. С увеличением скорости набегающего потока линии вихревых напряженностей сносятя вниз по потоку. При средних расстояниях между частицами ($5a \leq b \leq 8a$) и малых скоростях $R \leq 1$ потока еще наблюдаются серповидные зоны ($b=5a$), хотя и меньшие по размерам и интенсивности. Увеличение числа Рейнольдса приводит к процессу уменьшения зоны, однако при этих расстояниях уже не образуется единый вихрь, заполняющий пространство между лобовой точкой второй и кормовой первой сферы, а при $R \geq R^*(b)$ за каждой из частиц присутствует обычный возвратный вихрь, который ведет себя с увеличением числа Рейнольдса подобно тому, как это происходит при движении одиночной сферы.

На расстояниях $b > 8a$, так же как и в стоксовском течении, не обнаружено возникновения вихря между сферами, что сохраняется и при малых R , а с увеличением скорости набегающего потока появляются возвратные вихри, как и при движении одиночной частицы. Зависимости давления от угла как при малых числах Рейнольдса ($R=1$), так и при средних ($R=40$) почти совпадают с распределением давления одиночных сфер. На фиг. 4 кривые 3, 6 соответствуют значениям $R=40$, $b=8a$. Наряду с локальной структурой течения изучались интегральные характеристики, в частности за-



Фиг. 4



Фиг. 5

висимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса и расстояния b . На фиг. 5 кривая 1 соответствует коэффициенту сопротивления одиночной сферы [8], кривые 2, 3 — сумме коэффициентов сопротивления частиц при $b=5a$; 4а.

При малых расстояниях b увеличение скорости набегающего потока приводит к тому, что сумма коэффициентов сопротивления меньше коэффициента одиночного шара. Это можно объяснить тем, что образуется система тел, состоящая из двух сфер и вихря между ними, которые в целом имеют форму с меньшим сопротивлением. Уменьшение числа Рейнольдса приводит к появлению серповидного вихря, который начинает занимать значительные размеры, что увеличивает сумму коэффициентов сопротивления, делая ее больше одиночного. На фиг. 5 видна и переходная зона: $2 \leq R \leq 4$. Коэффициент сопротивления каждой сферы в зависимости от числа R дается кривыми 4, 5, 6, 7. Кривые 4, 5 соответствуют значению $b=6a$ для первой и второй частицы и 6, 7 — для $b=4a$. Как и в случае стоксового течения [1], коэффициент сопротивления на первой частице больше, чем на второй. Исследования зависимости коэффициента «взаимного» влияния $f(b) = C_d / C_d^*$, где C_d — сумма коэффициентов сопротивления, C_d^* — коэффициент сопротивления одиночного, показывает, что случай, когда они равны, существенно зависит от скорости набегающего потока (чисел R) и расстояния между сферами и при определенных соотношениях соотносится по-разному.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ханпель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976.
2. Jeffery G. B. On the steady rotation of a solid of revolution in a viscous fluid.— Proc. London Math. Soc., 1915, v. 14, p. 327—228.
3. Stimson M., Jeffery G. The motion of two spheres in a viscous fluid.— Proc. Roy. Soc., London, 1926, A-111, № 757.
4. Davis A. M. J., O'Neill M. Z., Dorrepaal J. M., Ranger K. B. Separation from the surface of two equal spheres in Stokes flow.— J. Fluid. Mech., 1976, v. 77, № 4,

5. Happel J., Pfeffer R. The motion of two spheres following each other a viscous fluid.— A. I. Ch. Journal, 1960, v. 6, № 1.
6. Cooley M., O'Neill M. On the slow motion of two spheres in contact along their line of center trough a viscous fluid.— Proc. Cambridge Phil. Soc., 1969, v. 66, № 2.
7. Дородницын А. А., Меллер Н. А. О некоторых подходах к решению стационарных уравнений Навье — Стокса.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1968, т. 8, № 2.
8. Биркгоф Г. Гидродинамика. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
9. Иванов К. П., Ривкин В. Я. Об обтекании двух частиц вязкой жидкостью.— Тр. 5-го Всес. семинара по числ. методам механ. вязкой жидкости. Ч. 2. Новосибирск, 1975.
10. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.

Ленинград

Поступила в редакцию
17.III.1980

УДК 532.517.2

ВЛИЯНИЕ ТЕРМИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ГРАНИЦЫ НА ВЫНУЖДЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ СЛОЕ

МАКАРЕНКО И. П., СИМУНИ Л. М.

Задача о прямолинейно-параллельном ламинарном движении вязкой несжимаемой жидкости при наличии фиксированной в пространстве свободной границы имеет простое решение [1]. Учет сил плавучести при термической неоднородности границы значительно усложняет картину течения. В работе [2] рассматривалась в линеаризованной постановке задача о движении жидкости при наличии точечного теплового источника. В данной статье при помощи численного решения уравнений Навье — Стокса исследуется задача о ламинарном движении несжимаемой жидкости в плоском слое в случае, когда участок нижней границы имеет температуру, отличную от температуры остальной части нижней границы. Задача решается в приближении Буссинеска.

Рассматриваем задачу о движении вязкой несжимаемой жидкости в плоском слое высотой h с заданным расходом через поперечное сечение. Движение в принятых обозначениях определяется следующими уравнениями и граничными условиями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) + \beta g T \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \\ y=0: \quad T &= T_0 \quad |x| > a; \quad T = T_1 \quad |x| \leq a \\ v_x &= 0, \quad v_y = 0 \\ y=h: \quad T &= T_2, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0, \quad v = 0. \end{aligned}$$

1. В боковых границах принимаем условие периодичности.
2. Переходим к безразмерным переменным по формулам

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{h}, \quad y' = \frac{y}{h}, \quad t' = \frac{t\nu}{h^2}, \quad u = \frac{v_x}{U} \\ v &= \frac{v_y}{U}, \quad \theta = \frac{(T-T_0)}{(T_1-T_0)}, \quad P = \frac{\rho h^2}{\rho \nu^2 \text{Re}}. \end{aligned}$$