

УДК 532.516.5:518.9

**ВРАЩАЮЩИЙСЯ ЦИЛИНДР В ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ
НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ**

ШКАДОВА В. П.

Получены новые результаты в задаче обтекания вращающегося цилиндра потоком вязкой жидкости на основе численного решения уравнений Навье – Стокса для чисел $10 \leq Re \leq 100$. Вычислены коэффициенты подъемной силы и силы сопротивления. Исследован колебательный режим течения в следе за неподвижным цилиндром при $Re=80$. Число Струхала для автоколебаний равно 0,16.

Обтекание кругового цилиндра, вращающегося с постоянной угловой скоростью ε , потоком вязкой несжимаемой жидкости сводится к исследованию известной краевой задачи.

Ищется решение системы уравнений Навье – Стокса, записанных для функции тока ψ и завихренности ω при следующих граничных условиях:

$$\psi_{zz} + \psi_{\eta\eta} = \pi^2 \exp(2\pi z) \omega \quad (1)$$

$$\omega_z = \pi^{-2} \exp(-2\pi z) \left[\frac{2}{Re} (\omega_{zz} + \omega_{\eta\eta}) + (\psi_{\eta} \omega_z - \psi_z \omega_{\eta}) \right]$$

$$\psi_{\eta} = 0, \psi_z = \pi \varepsilon, z = 0; \psi = e^{\pi z} \sin \pi \eta, \omega = 0, z \rightarrow \infty \quad (2)$$

Здесь $z = \pi^{-1} \ln r$, $\eta = \pi^{-1} \theta$ (r, θ – полярные координаты), ε – относительная скорость вращения цилиндра.

Решение необходимо построить во всей области $0 \leq \eta \leq 2$ (угол θ изменяется от 0 до 2π), так как симметрия течения относительно $\theta = \pi$ для вращающегося цилиндра нарушается. Так же она нарушается и при обтекании неподвижного цилиндра потоками с большими числами Re вследствие возникающих автоколебаний. Поэтому в решении следует использовать условие периодичности по θ :

$$\psi(z, 0) = \psi(z, 2), \omega(z, 0) = \omega(z, 2)$$

$$\psi_{\eta}(z, 0) = \psi_{\eta}(z, 2), \omega_{\eta}(z, 0) = \omega_{\eta}(z, 2) \quad (3)$$

Постановка задачи включает также соответствующие начальные условия при $t=0$.

Система (1)–(3) записана для безразмерных функций, отнесенных к радиусу цилиндра a и скорости набегающего потока U_{∞} :

$$\psi = \frac{\psi'}{U_{\infty} a}, \omega = \frac{\omega' a}{U_{\infty}}, r = \frac{r'}{a}; t = \frac{t' U_{\infty}}{a}, Re = \frac{2 U_{\infty} a}{\nu}, \varepsilon = \frac{V_w}{U_{\infty}} \quad (4)$$

Трудности численного решения системы (1) складываются из следующих проблем: разрешение уравнения Пуассона наиболее экономичным способом, определение значения завихренности ω_w на поверхности цилиндра, задание значений функции ψ и ω на внешней границе конечной области интегрирования, выбор численной схемы и увеличение шага по време-

ни для решения нелинейного уравнения завихренности. Удачное разрешение любой из этих проблем позволяет получить продвижение в численном исследовании данной задачи. В работах [1—4] получены решения для потоков с числами $Re \leq 20$ при разных значениях относительной скорости вращения ε . Наиболее полное исследование в этом диапазоне чисел Re проведено в [4]. В данной статье предлагается способ решения, который позволил рассчитать поле течения около вращающегося цилиндра при числах $10 \leq Re \leq 80$.

Представим искомое решение в виде суммы симметричной и несимметричной частей относительно $\eta=1$

$$\psi(z, \eta) = \psi^s(z, \eta) + \psi^c(z, \eta), \quad \omega(z, \eta) = \omega^s(z, \eta) + \omega^c(z, \eta) \quad (5)$$

Такое представление можно сделать в самом общем случае. Оно позволяет разделить исходную систему (1) на две связанные подсистемы, каждая из которых интегрируется в области $0 \leq \eta \leq 1$.

Для несимметричной и симметричной частей решения будем иметь следующие задачи соответственно:

$$\psi_{zz}^s + \psi_{\eta\eta}^s = \pi^2 \exp(2\pi z) \omega^s$$

$$\pi^2 \exp(2\pi z) \omega_z^s = \frac{2}{Re} (\omega_{zz}^s + \omega_{\eta\eta}^s) + (\psi_{\eta\eta}^s \omega_z^s - \psi_z^s \omega_{\eta\eta}^s) + (\psi_{\eta\eta}^c \omega_z^c - \psi_z^c \omega_{\eta\eta}^c) = F \quad (6)$$

$$z=0 \rightarrow \psi^s=0, \quad \psi_z^s=0, \quad \omega_w^s = \frac{1}{\pi^2} \frac{\partial^2 \psi^s}{\partial z^2} \Big|_{z=0}$$

$$z=z_\infty \rightarrow \psi^s = e^{\pi z_\infty} \sin \pi \eta, \quad \omega^s = 0 \quad (7)$$

$$\eta=0, 1 \rightarrow \psi^s(z, 0) = \psi^s(z, 1) = \omega^s(z, 0) = \omega^s(z, 1) = 0$$

$$\psi_{zz}^c + \psi_{\eta\eta}^c = \pi^2 \exp(2\pi z) \omega^c$$

$$\pi^2 \exp(2\pi z) \omega_z^c = \frac{2}{Re} (\omega_{zz}^c + \omega_{\eta\eta}^c) + (\psi_z^s \omega_{\eta\eta}^c - \psi_{\eta\eta}^s \omega_z^c) + (\psi_{\eta\eta}^c \omega_z^s - \psi_z^c \omega_{\eta\eta}^s) = Q \quad (8)$$

$$z=0 \rightarrow \psi^c=0, \quad \psi_z^c = \pi \varepsilon, \quad \omega_w^c = \frac{1}{\pi^2} \frac{\partial^2 \psi^c}{\partial z^2} \Big|_{z=0}$$

$$z=z_\infty \rightarrow \psi_z^c = M, \quad \omega^c = 0 \quad (9)$$

$$\eta=0, 1 \rightarrow \psi_{\eta\eta}^c(z, 0) = \psi_{\eta\eta}^c(z, 1) = \omega_{\eta\eta}^c(z, 0) = \omega_{\eta\eta}^c(z, 1) = 0$$

Для $\psi^s(z, \eta)$ имеем краевую задачу Дирихле, так как функция ψ^s задана везде на границе (6), (7), а для $\psi^c(z, \eta)$ имеем краевую задачу Неймана (8), (9). Разделение решения на симметричную и несимметричную части не уменьшает общего объема вычислений, но позволяет повысить точность счета в условиях, когда $\psi^c(z, \eta)$ много меньше $\psi^s(z, \eta)$. При стационарном обтекании цилиндра без вращения имеем $\psi^c(z, \eta) = 0$. Появление $\psi^c \neq 0$ связано с нарушением симметрии вследствие вращения цилиндра и вследствие неустойчивости течения ψ^s , приводящего к развитию автоколебаний.

Проинтегрируем уравнения для функций тока по области $0 \leq z \leq z_\infty, 0 \leq \eta \leq 1$. Учитывая условия на границе цилиндра и условия периодичности функций, получим следующие соотношения:

$$\int_0^1 \psi_z^c(z_\infty, \eta) d\eta = \pi \varepsilon + \pi^2 \int_0^1 \int_0^{z_\infty} \omega^c \exp(2\pi z) dz d\eta$$

$$\int_0^1 \psi_z^{\text{н}}(z_{\infty}, \eta) d\eta = \int_0^{z_{\infty}} [\psi_{\eta}^{\text{н}}(z, 0) - \psi_{\eta}^{\text{н}}(z, 1)] dz + \pi^2 \int_0^1 \int_0^{z_{\infty}} \omega^{\text{н}} \exp(2\pi z) dz d\eta \quad (10)$$

Соотношения (10) дают возможность оценить главные члены в асимптотическом поведении решения на бесконечности при $z=z_{\infty}$. В частности, допуская, что $\psi_z^c(z_{\infty}, \eta) = M$, имеем

$$M = \pi \varepsilon + \pi^2 \int_0^1 \int_0^{z_{\infty}} \omega^c \exp(2\pi z) dz d\eta \quad (11)$$

Отметим, что в предельном случае цилиндра, вращающегося в неподвижной жидкости, $\psi_z^c = M$ является точным решением. Численное решение уравнения Пуассона для $\psi^{\text{н}}(z, \eta)$ и $\psi^c(z, \eta)$ проводилось методом динамического программирования [5], уравнение для завихренности решалось явным по времени методом [1].

Пусть на шаге n в момент $t^n = n\Delta t$ известно все поле решения. Проследим порядок вычислений на одном шаге по времени.

Прежде чем начать переход на следующий $(n+1)$ -й шаг, проверяем согласованность граничных условий на n -м шаге. Вычисляем значения завихренности на границе цилиндра $\omega_w^{\text{н}}$ и ω_w^c , используя известные способы аппроксимации [6]. Контролируем выполнение периодичности давления на цилиндре с помощью интеграла

$$\int_0^1 \omega_z^c d\eta = 0$$

Первым этапом решения является вычисление завихренности на слое $(n+1)$

$$\omega^{\text{н}, n+1} = \omega^{\text{н}, n} + \Delta t F^n, \quad \omega^c, n+1 = \omega^c, n + \Delta t Q^n \quad (12)$$

Шаг Δt выбирается так, чтобы удовлетворялось условие Куранта для сохранения устойчивости счета. Определяющим здесь является шаг по времени для уравнения относительно $\omega^c(z, \eta)$, как более быстро меняющейся части решения. В результате этого интегрирования получаем поле $\omega^{\text{н}, n+1}$ и $\omega^c, n+1$ во внутренних точках. По соотношению (11) вычисляем значение $\psi_z^c, n+1(z_{\infty}, \eta)$.

Следующий этап — интегрирование уравнений Пуассона методом динамического программирования в одном из вариантов его возможной реализации [5]. Выше упоминалось, что по характеру граничных условий имеем задачу Дирихле для функции $\psi^{\text{н}}(z, \eta)$ и смешанную задачу Неймана для $\psi^c(z, \eta)$. Набор прогоночных матриц в этом методе для каждой задачи будет свой. Этот набор не зависит от граничных условий, а зависит от числа расчетных точек и поэтому в ходе решения он не пересчитывается, а вычисляется только один раз. Число матриц равно числу точек на оси η , а размерность матриц равна числу внутренних точек по z . Отметим, что основные варианты в данной работе получены на сетке 22×37 . Вариации числа точек были возможны весьма незначительные и не могли внести существенного вклада в точность полученного решения.

Давление на поверхности вращающегося цилиндра определяется по формуле

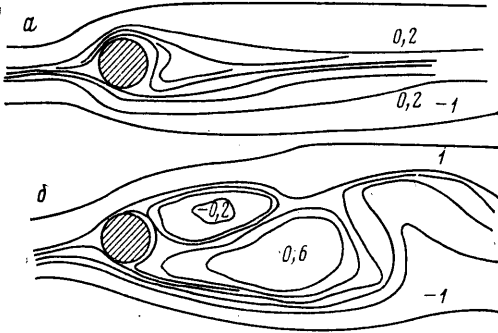
$$P(\eta) - P_{\infty} = 1 - \varepsilon^2 + 2 \int_0^{z_{\infty}} \left[\frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial \omega^{\text{н}}}{\partial \eta} - \omega^c \frac{\partial \psi^c}{\partial z} \right]_{\eta=0} dz + \frac{4}{\text{Re}} \int_0^{\eta} \frac{\partial \omega^{\text{н}}}{\partial z} \Big|_{z=0} d\eta \quad (13)$$

Коэффициенты нормальной и подъемной силы C_x и C_y через новые функции ω^a и ω^c вычисляются следующим образом:

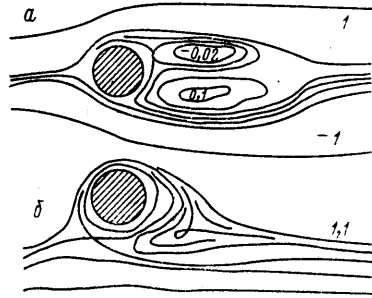
$$C_x = \frac{4\pi}{\text{Re}} \int_0^1 \left(\omega^a - \frac{1}{\pi} \frac{\partial \omega^a}{\partial z} \right)_{z=0} \sin(\pi\eta) d\eta$$

$$C_y = \frac{4\pi}{\text{Re}} \int_0^1 \left(\omega^c - \frac{1}{\pi} \frac{\partial \omega^c}{\partial z} \right)_{z=0} \cos(\pi\eta) d\eta \quad (14)$$

Эти формулы показывают, что подъемная сила на круговом цилиндре появляется всегда, когда существует ненулевая симметричная часть реше-



Фиг. 1



Фиг. 2

ния ψ^c , ω^c , определяемая системой (8), (9). Такая часть появляется в силу граничных условий $\psi_z^c(t, 0, \eta) = \pi\epsilon$ или в силу неустойчивости, вызывающей рост начального возмущения $\psi^c(0, z, \eta) \neq 0$ с течением времени при числах Re больше критического.

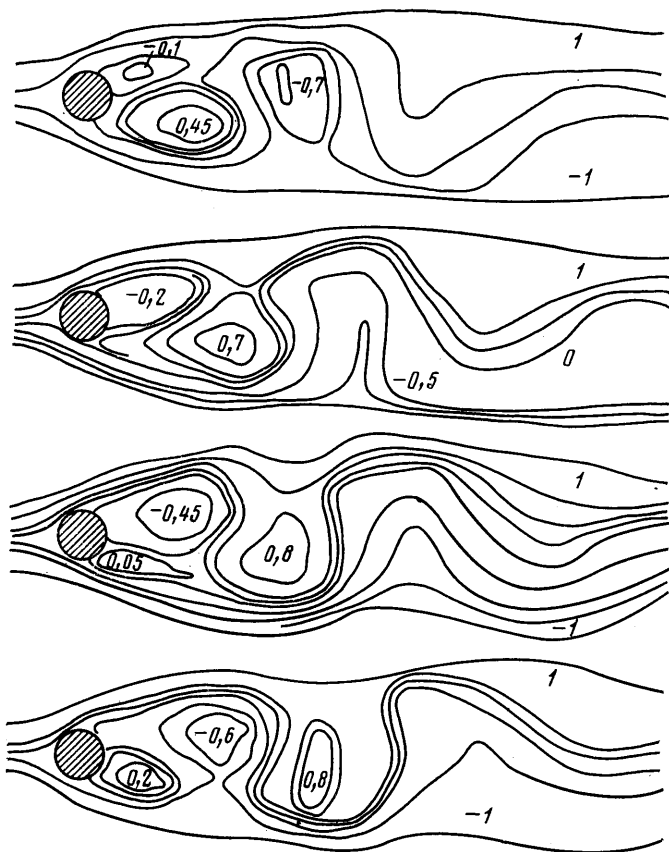
Вращающийся цилиндр. По изложенной методике были проведены две серии расчетов со следующими параметрами течения: при $\text{Re}=40$ ϵ изменялось от 0 до 3 и при $\epsilon=0,2$ число Re изменялось от 10 до 80.

Основной механизм влияния вращения на поток, обтекающий цилиндр, связан с разрушением циркуляционной зоны затягиванием отрыва от тела. Известно, что циркуляционная зона, состоящая из пары вихрей, появляется за цилиндром в потоке с числом $\text{Re} \geq 7$. На фиг. 1 приведены физические картины течения (линии равных значений функции тока) для двух чисел Re при $\epsilon=0,2$ (а — случай $\text{Re}=20$, б — $\text{Re}=80$). Очевидно, что вращение с такой скоростью способно разрушить циркуляционную зону в потоке с числом $\text{Re}=20$, а в потоке с $\text{Re}=80$ оно ее только искажает. На фиг. 2 картины течения приведены для $\text{Re}=40$ (а — случай $\epsilon=0,2$, б — $\epsilon=3$). Если вращение со скоростью $\epsilon=0,2$ не разрушает циркуляционную зону в таком потоке, то более быстрое вращение со скоростью $\epsilon=3$ приводит поток в состояние бесциркуляционного обтекания; вокруг цилиндра образуется слой жидкости, который вращается с цилиндром как целое.

Отражением этого механического факта является сильная несимметрия в распределении давления по цилиндру. Вместо обычных двух минимумов давления на невращающемся цилиндре при $\theta=\pi/2$ и $3\pi/2$ при вращении образуется один глубокий минимум в области $\theta=\pi/2$, чем и объясняется перемещение цилиндра вверх. При этом нормальное сопротивление цилиндра для рассмотренных чисел Re мало отличается от сопротивления неподвижного цилиндра при соответствующих числах Re . Коэффи-

циент подъемной силы C_y практически линейно возрастает с изменением ε от 0 до 2 для тех течений, которые можно считать стационарными, при $Re < 60$. Численные значения для C_y находятся в хорошем соответствии с результатами [4].

Неподвижный цилиндр. Предложенный метод решения задачи позволяет исследовать вопрос о развитии симметричных возмущений при обте-



Фиг. 3

канию неподвижного цилиндра. В этом случае система (8), (9) с соответствующими нулевыми граничными условиями является однородной и нетривиальное решение может иметь место, если будет задано начальное возмущение. Было проверено численно, что произвольные симметричные возмущения, накладываемые на поток с числами $Re \leq 40$, затухают по времени. В поток с числом $Re = 40$ в качестве эксперимента были внесены возмущения трех различных типов и по истечении определенного времени каждое из них затухло, так что установившиеся режимы не отличались друг от друга.

Другая картина наблюдалась при расчете потока за цилиндром при числе $Re > 40$. В этом случае симметричные возмущения приводят к развитию колебательного режима за цилиндром с определенной частотой, наиболее четко проявляющегося для $Re \geq 60$. Например, в поток с числом $Re = 80$ вносились возмущения разных типов. Время выхода на колебательный режим зависит от величины внесенного возмущения, но число Стру-

халю, подсчитанное по среднему периоду изменения функции $\psi^c(z, \eta)$, осредненному по нескольким точкам, для $Re=80$ во всех случаях оказалось равным 0,16.

На фиг. 3 представлены последовательные картины за цилиндром при $Re=80$ через равные интервалы времени, начиная с некоторого момента, когда можно считать течение развившимся. Положение линий равных значений функции $\psi(z, \eta)$ отчетливо показывают колебательный характер течения в следе. Вихри поочередно отрываются от цилиндра и разрушаются потоком. Эти колебания передаются вперед на цилиндр, в результате чего колеблется значение C_x и появляется $C_y \neq 0$.

Автор выражает свою благодарность Г. И. Петрову и В. Я. Шкадову за постоянный интерес к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Симуни Л. М. Решение некоторых задач движения вязкой жидкости, связанных с обтеканием цилиндра и шара.— Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1967, № 8, вып. 2.
2. Корявов П. П., Павловский Ю. Н. Численное решение задачи о движении кругового цилиндра в потоке вязкой жидкости.— В кн.: Проблемы прикладной математики и механики. М.: Наука, 1971, с. 241.
3. Los T. P. Etude numérique de l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible autour d'un cylindre fixe ou en rotation.— J. Mec., 1975, v. 14, № 1, p. 107.
4. Люлька В. А. Численное решение задачи о вращении цилиндра в потоке вязкой несжимаемой жидкости.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1977, т. 17, № 2.
5. Беллман Р., Энджел Э. Динамическое программирование и уравнения в частных производных. М.: Мир, 1974.
6. Кускова Т. В., Чудов Л. А. О приближенных граничных условиях для вихря при расчете течений вязкой несжимаемой жидкости.— В кн.: Вычисл. методы и программирование. Вып. 11. М., 1968.

Москва

Поступила в редакцию
26.VI.1980