

УДК 536.6.011

**ГИПЕРЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТОРЦА
ПРИ СИЛЬНОМ ВДУВЕ ГАЗА ЧЕРЕЗ ЕГО ПОВЕРХНОСТЬ**

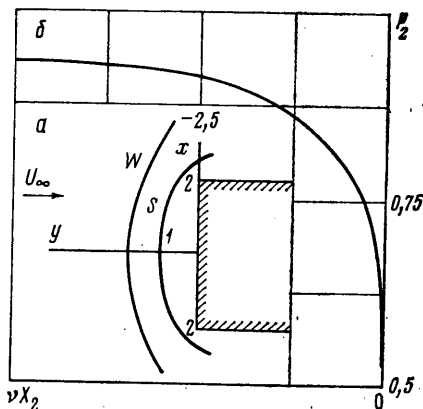
ВИГДОРОВИЧ И. И.

Изучению сильного вдува в сверхзвуковой поток, когда вязкостью вдуваемого газа можно пренебречь, посвящен целый ряд теоретических [1–10] и экспериментальных [4, 11] работ. Исследовался как вдув с искривленной лобовой поверхности затупленных [1–4, 11], так и вдув на плоских поверхностях [5–11].

В данной работе рассматривается гиперзвуковое обтекание прямоугольного профиля и торца цилиндра при сильном распределенном вдуве газа на их плоской передней части. Вдуваемый газ считается невязким, а давление на разделяющей внешней поток и слой вдува контактной поверхности определяется по формуле Ньютона. Применение метода возмущений при малой толщине слоя вдува позволило получить предельные задачи для различных областей течения, в результате аналитического решения которых и последующего асимптотического сращения найдены форма контактной поверхности и распределение давления на теле. Установлен немонотонный характер зависимости лобового сопротивления торца от расхода вдуваемого газа. Определены оптимальные параметры вдува и соответствующее им минимальное сопротивление тела.

Форма контактной поверхности вблизи критической точки для осесимметричного случая этой задачи исследовалась в работе [8].

1. Постановка задачи. Рассмотрим обтекание гиперзвуковым потоком газа прямоугольного контура или кругового цилиндра вдоль образующей при дозвуковом вдуве газа на их плоской передней части. Вдув происходит по нормали к поверхности навстречу набегающему потоку равномерно по всей площади передней грани с постоянными расходом q_w и температурой газа на теле T_w .



Фиг. 1

Общая схема течения представлена на фиг. 1, а, где показаны контактная поверхность S , отделяющая область вдува от внешнего течения, и головная ударная волна W . Используются декартова, а при осесимметричном течении цилиндрическая система координат.

Будем рассматривать режим сильного вдува, когда течение вдуваемого газа можно считать невязким. Для определения давления на контактной поверхности при гиперзвуковых условиях обтекания используем модифицированную формулу Ньютона $p = p_0 \cos^2 \theta$ [12], где p_0 — давление торможения за пря-

мым скачком, θ — угол наклона контактной поверхности к оси x .

При гиперзвуковом обтекании цилиндрического торца или прямоугольного профиля давление в центральной части передней грани мало отличается от p_0 , а вблизи кромок, где скорость в ударном слое близка к звуко-

вой, наблюдается значительное понижение давления [13]. Таким образом, ньютоновская формула давления для этих тел неприменима. При наличии на плоской передней грани тонкого слоя вдуваемого газа форма контактной поверхности в центральной части также близка к плоской, а давление соответственно близко к p_0 . В окрестности кромок контактная поверхность сильно искривлена, а давление в слое вдува падает. В этом случае формула Ньютона может быть использована, поскольку при вдуве эффективное обтекаемое тело является гладким.

Будем использовать безразмерные переменные. Декартовы и цилиндрические координаты отнесем соответственно к половине толщины прямоугольного профиля или радиусу цилиндра r , давление отнесем к p_0 , плотность — к p_0/RT_w , скорость — к $\sqrt{RT_w}$, функцию тока — к $r^2 p_0 (RT_w)^{-1/2}$, где ν — показатель размерности, равный 1 при плоском и 2 при осесимметричном течении, R — газовая постоянная. Возьмем уравнения движения газа в слое вдува в форме Мизеса для независимых переменных x и ψ . Граничные условия на теле и контактной поверхности имеют вид

$$y=0, \quad 0 \leq x \leq 1: \quad \rho v = q_w \frac{\sqrt{RT_w}}{p_0}, \quad u=0, \quad \rho=p \quad (1.1)$$

$$\psi=0, \quad 0 \leq x \leq 1: \quad p = \cos^2 \theta$$

Обозначим порядок относительной толщины слоя вдува вблизи оси симметрии через δ . Рассмотрим характерные области в этом слое. В центральной части 1 (фиг. 1, а) переменные имеют следующие порядки:

$$x \sim 1, \quad y \sim \delta, \quad p-1 \sim \delta^2, \quad \rho-1 \sim \delta^2, \quad u \sim \delta, \quad v \sim \delta^2, \quad \psi \sim \delta^2$$

Из оценки для поперечной скорости и граничного условия на теле (1.1) следует, что можно принять $\delta = (RT_w)^{1/2} (q_w/p_0)^{1/2}$. Так что δ имеет порядок квадратного корня из числа Маха на теле.

В работах [1-4, 8, 11] толщина слоя вдува выражена через отношение скоростных напоров $K = \rho_w V_w^2 / \rho_\infty U_\infty^2$ (ρ_w, V_w — плотность и скорость вдуваемого газа в критической точке на теле, индексом ∞ обозначены параметры набегающего потока). Установим связь δ и K . Параметры вдуваемого газа в критической точке на теле и точке торможения на контактной поверхности связаны следующими четырьмя соотношениями: интегралами Бернулли и адиабатичности, заданием расхода и температуры газа на теле. Незвестными величинами будут ρ_w, V_w , давление в критической точке и плотность торможения. Разрешая эту систему уравнений относительно V_w , будем иметь

$$K = \frac{p_0}{\rho_\infty U_\infty^2} \delta^4 (1 + O(\delta^4)) \quad (1.2)$$

Отсюда видно, что полученная выше оценка толщины слоя вдува совпадает с данной в [8]. На телах с ненулевой кривизной поверхности толщина слоя вдува в критической точке имеет другой порядок [1, 2]. Это обстоятельство не учитывалось в [3, 4, 11], в которых для порядка толщины слоя вдува на торце даны ошибочные выражения.

В окрестности кромок 2 (фиг. 1, а)

$$x-1 \sim \delta^2, \quad y \sim \delta^2, \quad p-1 \sim 1, \quad \rho-1 \sim 1, \quad u \sim 1, \quad v \sim 1, \quad \psi \sim \delta^2$$

В соответствии с приведенными выше оценками параметров в слое вдува введем в областях 1 и 2 новые независимые переменные Мизеса, а зависимые переменные разложим в асимптотические ряды по малому параметру δ^2 . Внешнее (в области 1) и внутреннее (в области 2) асимптотические разложения, а также системы уравнений и граничные условия для первых членов этих разложений имеют соответственно вид

$$\psi = \delta^2 \Psi, \quad y = \delta Y_1 + O(\delta^3), \quad p = 1 + \delta^2 P_1 + O(\delta^4) \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \rho &= 1 + \delta^3 R_1 + O(\delta^4), \quad u = \delta U_1 + O(\delta^2), \quad v = \delta V_1 + O(\delta^4) \\ U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial P_1}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial P_1}{\partial \Psi} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} (P_1 - \gamma R_1) = 0 \\ \frac{\partial Y_1}{\partial \Psi} &= \frac{x^{1-\nu}}{U_1}, \quad \frac{\partial Y_1}{\partial x} = \frac{V_1}{U_1} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} Y_1 &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1: \quad U_1 = 0, \quad V_1 = 1 \\ \Psi &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1: \quad P_1 = - \left(\frac{dY_1}{dx} \right)^2 \\ x &= 1 + \delta^2 X_2, \quad \psi = \delta^2 \Psi, \quad y = \delta^2 Y_2 + O(\delta^4) \\ p &= P_2 + O(\delta^2), \quad \rho = R_2 + O(\delta^2) \\ u &= U_2 + O(\delta^2), \quad v = V_2 + O(\delta^2) \\ Y_2 &= 0, \quad -\infty < X_2 \leq 0: \quad V_2 = 0 \\ \Psi &= 0, \quad -\infty < X_2 \leq 0: \quad P_2 = \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (1.5)$$

Первые члены разложений (1.5) удовлетворяют полным уравнениям газовой динамики для плоского течения.

В области 2 вблизи обтекаемой поверхности $u \sim 1$, $v \sim \delta^2$, откуда следует, что газ, вдуваемый на участке 2, находится в подслое толщиной $\sim \delta^2$. Эта величина есть бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с толщиной слоя вдува в области 2. Поэтому точные граничные условия на теле (1.1) для первых членов внутренних асимптотических разложений должны быть отброшены [14].

2. Внешнее решение. Уравнения (1.4) описывают течения в «тонком слое» несжимаемой жидкости [5, 6]. Интегрируя систему (1.4) с учетом граничных условий на теле, получим следующее выражение для ординаты контактной поверхности Y_{1s} [6]:

$$Y_{1s}(x) = \frac{x^{1-\nu}}{\nu \sqrt{2}} \int_0^x (P_1(\xi) - P_1(x))^{-1/2} d\xi^\nu$$

С другой стороны, из граничного условия на разделяющей поверхности тока $\Psi = 0$ будем иметь

$$Y_{1s}(x) = Y_0 - \int_0^x \sqrt{-P_1(\xi)} d\xi$$

где Y_0 — отход контактной поверхности в критической точке. Объединив два выражения для ординаты контактной поверхности, получим интегральное уравнение для давления.

Введем функцию, необходимую для вычисления лобового сопротивления тела

$$F_1(x) = \int_0^x P_1(\xi) d\xi^\nu$$

Значение константы Y_0 будет определено при сращивании внешнего и внутреннего решений. Введем новые переменные $x_0 = x/Y_0$, $y_0 = Y_{1s}/Y_0$, $f_0 = -F_1/Y_0^\nu$, $t = -P_1$.

Для функции $x_0(t)$ будем иметь уравнение

$$x_0^{\nu-1}(t) \left(1 - \int_0^t \sqrt{\tau} x_0'(\tau) d\tau \right) = \frac{\sqrt{2}}{2\nu} \int_0^t \frac{[x_0'(\tau)]' d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (2.1)$$

Поскольку пределы изменения давления в области I заранее не известны, уравнение (2.1) будем решать для $0 \leq t < +\infty$.

Переходя к переменной t , для величины f_0 получим

$$f_0 = \int_0^t [x_0'(\tau)]' \tau d\tau$$

3. Решение интегрального уравнения для случая плоского течения.
При $\nu=1$ искомые функции можно представить следующими степенными рядами:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1/2} t^{n+1/2}, & y_0(t) &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} \\ f_0(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+3/2} t^{n+3/2} \\ a_0 &= \frac{\sqrt{2}}{\pi}, & a_n &= -\frac{2^{n+1/2}(n-1)!}{\pi(2n-1)!!} a_{n-1}, \quad n=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

Рекуррентная формула для коэффициентов a_n получена в результате подстановки первого ряда (3.1) в уравнение (2.1). По признаку Даламбера ряды (3.1) сходятся при всех t .

Для исследования асимптотики искомых функций при $t \rightarrow +\infty$ рассмотрим, следуя [15], функциональное уравнение для аналитической функции $a(z)$:

$$a(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+1/2)} a(z-1)$$

Здесь $\Gamma(z)$ — гамма-функция. Если принять $a(0) = \sqrt{2}/\pi$, то $a_n = (-1)^n a(n)$. В работе [9] подробно исследована функция $h_0(z)$, являющаяся решением функционального уравнения

$$h_0(z-1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+1/2)} h_0(z), \quad h_0(0) = 1$$

Легко видеть, что можно положить $a(z) = \sqrt{2}/(\pi h_0(z))$. Согласно [9]

$$\begin{aligned} h_0(z) &= \exp \left(\int_z^{z+1/2} \xi \psi(\xi) d\xi + \left(\ln \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \right) z + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2} + G \right) \\ G &= \int_0^{1/2} \ln \Gamma(\xi+1) d\xi = -0,0428536 \end{aligned}$$

Здесь $\psi(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции. Функция $h_0(z)$ имеет в точках $z = -m$ и $z = -1/2 - m$ (m — натуральное число) соответственно полюсы и нули порядка m [9].

Докажем теперь, что искомые функции представимы следующими контурными интегралами:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\sqrt{2} t^{z+1/2} dz}{h_0(z) (z+1/2) \sin \pi z}, & -\frac{1}{2} < \sigma < 0 \\ y_0(t) &= 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\sqrt{2} t^{z+1} dz}{h_0(z) (z+1) \sin \pi z}, & -1 < \sigma < 0 \\ f_0(t) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\sqrt{2} t^{z+3/2} dz}{h_0(z) (z+3/2) \sin \pi z}, & -\frac{3}{2} < \sigma < 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Действительно, подынтегральные функции (3.2), как показывает асимптотическое разложение функции $h_0(z)$ при $z \rightarrow \infty$ [9], удовлетворяет лемме Жордана [17] в правой полуплоскости. Следовательно, эти интегралы могут быть представлены рядами по вычетам подынтегральных функций в полюсах $z=0, 1, \dots$. Эти суммы вычетов совпадают с рядами (3.1).

Можно показать, что суммы вычетов подынтегральных функций в полюсах, лежащих в левой полуплоскости, дают асимптотические представления интегралов (3.2) при $t \rightarrow +\infty$.

Вычисление этих вычетов дает

$$x_0(t) \sim \alpha_1 \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{4t} - \frac{3 \ln t + l_1}{32t^2} + O(t^{-3} \ln^2 t) \right] \quad (3.3)$$

$$y_0(t) \sim \alpha_1 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} t^{-1/2} + O(t^{-3/2} \ln t) \right]$$

$$f_0(t) \sim \alpha_1 \left[\frac{\sqrt{2}}{4} \ln t + f_1 + O(t^{-1} \ln t) \right]$$

$$t \rightarrow +\infty, \alpha_1 = 1/h_0(1/2), l_1 = 1/2(33 \ln 2 - 3 \ln \pi - 19 + 3C)$$

$$f_1 = 2^{-5/2}(C - 3 - \ln \pi + 7 \ln 2) = 0,2271$$

Здесь $C=0,577215$ — постоянная Эйлера [16].

4. Решение интегрального уравнения для случая осесимметричного течения. При $\nu=2$ будем иметь

$$x_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^{n+1/2}, \quad y_0(t) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1/2}{n+1} b_n t^{n+1}$$

$$f_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \left(\sum_{k=0}^n b_k b_{n-k} \right) t^{n+2} \quad (4.1)$$

$$b_0 = \sqrt{2}, \quad b_n \left(\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(2n+1)!!} - 1 \right) =$$

$$= -\frac{2^{n-1/2}(n+1)!}{(2n+1)!!} \sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k} - \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2k} \right) b_{k-1} b_{n-k}, \quad n=1, 2, \dots$$

Рекуррентная формула для коэффициентов степенных рядов получена подстановкой первого ряда (4.1) в уравнение (2.1).

Для исследования асимптотики решения нелинейного при $\nu=2$ интегрального уравнения (2.1) при $t \rightarrow +\infty$ метод предыдущего пункта неприменим. Будем искать асимптотическое разложение функции $x_0(t)$ в виде, аналогичном (3.3)

$$x_0(t) \sim \alpha_2 \left[1 - \frac{d_1}{t} + \frac{d_2 \ln t + d_3}{t^2} + \dots \right]$$

где коэффициенты α_2, d_1, d_2, d_3 подлежат определению. Тогда

$$x_0^2(t) \sim \alpha_2^2 \left[1 - \frac{2d_1}{t} + (2d_2 \ln t + 2d_3 + d_1^2) t^{-2} + \dots \right]$$

$$x_0(t) y_0(t) \sim \alpha_2^2 \left[2d_1 t^{-1/2} - \left(\frac{4}{3} d_2 \ln t + 2d_1^2 + \frac{2}{9} d_2 + \frac{4}{3} d_3 \right) t^{-3/2} + \dots \right] \quad (4.2)$$

Отсюда для изображений по Лапласу получим [18] (L – оператор Лапласа, z – комплексный аргумент функций-изображений)

$$L[x_0^2(t)] \sim \alpha_2^2 \left(\frac{1}{z} + 2d_1 \ln z + k_1 + \dots \right)$$

$$L[x_0(t) y_0(t)] \sim \alpha_2^2 \left[2d_1 \sqrt{\frac{\pi}{z}} + k_2 + \frac{8d_2}{3} \sqrt{\pi z} (2 - C - 2 \ln 2 - \ln z) + \right. \\ \left. + 4\sqrt{\pi z} \left(d_1^2 + \frac{d_2}{9} + \frac{2d_3}{3} \right) + \dots \right] \quad (4.3)$$

$z \rightarrow 0$

Коэффициенты k_1, k_2 в разложении (4.3) зависят от поведения оригиналов на всей полуоси и не могут быть вычислены из асимптотических представлений (4.2). Применяя к уравнению (2.1) оператор Лапласа, по теореме о свертке [17] будем иметь

$$L[x_0(t) y_0(t)] = \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{\pi z} L[x_0^2(t)].$$

Подставляя сюда выражения (4.3), найдем $d_1 = \sqrt{2}/8, d_2 = -3/64$. Коэффициент d_3 выражается через k_1 и поэтому остается неопределенным.

Таким образом, асимптотические разложения искомых функций имеют вид

$$x_0(t) \sim \alpha_2 \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{8t} - \frac{3 \ln t + l_2}{64t^2} + O(t^{-3} \ln^2 t) \right] \\ y_0(t) \sim \alpha_2 \left[\frac{\sqrt{2}}{4} t^{-1/2} + O(t^{-3/2} \ln t) \right] \quad (4.4)$$

$$f_0(t) \sim \alpha_2 \left[\frac{\sqrt{2}}{4} \ln t + f_2 + O(t^{-1} \ln t) \right] \quad t \rightarrow +\infty$$

Сравнивая численные значения рядов (4.1) и асимптотических представлений (4.4) при больших значениях t , определим величины входящих в (4.4) констант $\alpha_2 = 1,305; f_2 = 0,13; l_2 = 4,6$.

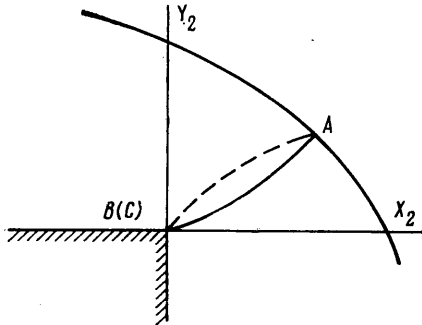
6. Внутреннее решение. Предельное течение в области 2 описывается полными уравнениями газовой динамики для плоского движения. Гранич-

ные условия при $X_2 = -\infty$ будут $P_2 = R_2 = 1$, $U_2 = V_2 = \theta = 0$. Откуда следует, что в нулевом приближении по δ^2 движение газа в области 2 потенциально.

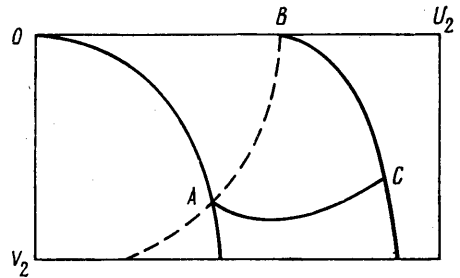
Для получения замкнутой системы граничных условий будем считать предельное течение в области 2 безотрывным. Это предположение справедливо, когда толщиной отрывной зоны, возникающей за кромкой передней грани на боковой поверхности тела, можно пренебречь.

Предельное течение в слое вдува в окрестности кромки имеет вид, данный на фиг. 2. Штриховая линия AB есть звуковая линия в слое вдува, сплошная линия AB — характеристика 1-го семейства, выходящая из точки A на контактной поверхности.

Ограничимся рассмотрением дозвуковой и примыкающей к ней сверхзвуковой части течения, лежащей между звуковой линией и характери-



Фиг. 2



Фиг. 3

стикой AB , поскольку сверхзвуковая область за этой характеристикой не оказывает влияния на дозвуковой поток.

В силу потенциальности течения функция тока от переменных $\tau = \frac{1}{2}(1 - 1/\gamma)(U_2^2 + V_2^2)$ и θ будет удовлетворять уравнению Чаплыгина [19]. Интеграл Бернулли на контактной поверхности имеет вид

$$\cos^2 \theta = (1 - \tau)^\kappa, \quad \kappa = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \quad (5.1)$$

В плоскости годографа скорости (фиг. 3) контактная поверхность OA задается формулой (5.1), BA — окружность критической скорости, AC — эциклоида 1-го семейства, отрезку эциклоиды 2-го семейства BC в физической плоскости соответствует одна точка B . На контактной поверхности OA $\Psi = 0$, на стенке OB и характеристике BC , являющейся также линией тока, $\Psi = -v^{-1}$. Это есть полная система граничных условий для обобщенной краевой задачи Трикоми смешанного типа [20], в результате решения которой функция $\Psi(\tau, \theta)$ определится как в дозвуковой области OAB , так и в сверхзвуковом треугольнике ABC .

Асимптотическое разложение функции тока при $\tau \rightarrow 0$ будем искать в виде следующего ряда, составленного из частных решений уравнения Чаплыгина [19]:

$$\begin{aligned} v\Psi \sim & -1 - \kappa^{-1/2} \left\{ \tau^{-1/2} (1 - \tau)^\kappa \sin \theta + A_1 \tau^{-1/2} [1 - (1 - \tau)^\kappa] \sin \theta + \right. \\ & \left. + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \tau^{n-1/2} F(\alpha_n, \beta_n; 2n; \tau) \sin[(2n-1)\theta] \right\}, \quad \tau \rightarrow 0 \quad (5.2) \\ & \alpha_n + \beta_n = 2n - \kappa, \quad \alpha_n \beta_n = -n(2n-1)(\kappa-1) \end{aligned}$$

Здесь F — гипергеометрическая функция Гаусса [16]. Условие обращения функции тока в нуль на кривой (5.1) дает

$$\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{1-(1-\tau)^{\kappa}}} \sim (1-\tau)^{\kappa} + A_1[1-(1-\tau)^{\kappa}] + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \tau^n F(\alpha_n, \beta_n; 2n; \tau) U_{2n-2}((1-\tau)^{\kappa/2}) \tag{5.3}$$

Здесь U_n — многочлены Чебышева 2-го рода, для которых [16]

$$U_n(\cos \theta) \sin \theta = \sin[(n+1)\theta]$$

Разлагая обе части (5.3) в степенной ряд по τ и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях, можно получить рекуррентные формулы для искомого коэффициентов асимптотического разложения. В частности, получим $A_1 = 1/4(5-1/\kappa)$. Коэффициенты A_n выбраны таким образом, что (5.2) является асимптотическим разложением функции тока на границе области OAB в окрестности начала координат. Опираясь на свойства эллиптических уравнений [21], можно показать, что (5.2) дает асимптотическое разложение $\Psi(\tau, \theta)$ при $\tau \rightarrow 0$ также и внутри области OAB .

Таким образом, асимптотика функции тока в окрестности $\tau=0$ определяется исключительно формой области в этой окрестности. Это показывает, что асимптотическое поведение решения внутренней задачи при $X_2 \rightarrow -\infty$ не зависит от условий непосредственно на кромке торца и, например, одно и то же как при безотрывном течении, так и в случае отрыва потока за кромкой. В частности, для давления на теле из (5.2), осуществляя переход в физическую плоскость [19], получим

$$P_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{X_2}} + O(X_2^{-2} \ln(-X_2)), \quad X_2 \rightarrow -\infty \tag{5.4}$$

Для приближенного решения поставленной трансзвуковой задачи используем предложенный Л. И. Седовым метод аппроксимации адиабаты ломаной в плоскости P_2, R_2^{-1} [22]. В качестве уравнения состояния примем

$$P_2 = \begin{cases} p_* + \frac{1-p_*}{1-\rho_*} \left(1 - \frac{\rho_*}{R_2} \right), & R_2 \geq \rho_* \\ p_* + \sigma \left(1 - \frac{\rho_*}{R_2} \right), & R_2 \leq \rho_* \end{cases} \tag{5.5}$$

$$\rho_* = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\kappa-1}, \quad p_* = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\kappa}$$

Здесь индексом * обозначены критические параметры. Дозвуковой участок ломаной проведен через точку торможения и критическую точку. Величина σ , задающая наклон сверхзвукового луча ломаной, будет определена ниже.

Введем новую переменную t :

$$t = \begin{cases} \arctg \rho_* - \operatorname{arctg} R_2, & R_2 \geq \rho_*, \quad t \leq 0 \\ \operatorname{arctg}(\mu \rho_*) - \operatorname{arctg}(\mu R_2), & R_2 \leq \rho_*, \quad t \geq 0 \end{cases}$$

$$\mu = \rho_*^{-1} \sqrt{(1-p_*)(1+\rho_*)/\sigma-1}$$

Тогда при выбранной аппроксимации адиабаты функция тока от переменных θ и t в дозвуковой области при $t < 0$ будет удовлетворять уравнению Лапласа, а в сверхзвуковой области при $t > 0$ — волновому уравнению. Кроме того, на звуковой линии $t=0$ должны выполняться условия сопряжения [22]

$$\Psi(\theta, -0) = \Psi(\theta, +0), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Big|_{t=-0} = \mu \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Big|_{t=+0}$$

Обозначим через D область дозвукового течения в плоскости θ, t , ограниченную контактной поверхностью, на которой $\Psi=0$, звуковой линией $t=0$, $-\theta_* \leq \theta \leq 0$ ($\theta_* =$

$=\arccos\sqrt{p_*}$) и стенкой $\theta=0$, на которой $\Psi=-v^{-1}$. В сверхзвуковой области на отрезке характеристики волнового уравнения $t=-\theta$, $-\theta_*/2 \leq \theta \leq 0$ также $\Psi=-v^{-1}$.

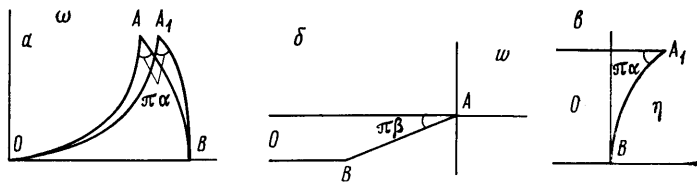
Сформулированная смешанная задача может быть сведена к краевой задаче Гильберта для комплексного потенциала $w=v(\Phi+i\Psi)$ (Φ — потенциал течения) в области D с условием $\Phi=\mu\Psi$ на звуковой линии [23].

Теперь остается выбрать угол между звеньями ломаной, аппроксимирующей адиабату. Проведем сверхзвуковой луч ломаной через точку адиабаты с координатами ρ_c , ρ_c^{-1} , соответствующими наименьшим давлению и плотности в сверхзвуковой области, оказывающей влияние на дозвуковое течение. В соответствии с используемой теорией такие параметры будут достигаться при $t=\theta_*/2$. Отсюда для ρ_c получим

$$\frac{(p_*-\rho_c^\gamma)[(1-p_*)(1+\rho_*)(\rho_*-\rho_c)-\rho_c(p_*-\rho_c^\gamma)]}{\rho_c[p_*-\rho_c^\gamma+(1+\rho_*)(1-p_*)]^2} = \frac{1-\sqrt{p_*}}{1+\sqrt{p_*}}$$

После численного определения корня этого трансцендентного уравнения при $\gamma=1,4$ будем иметь $\mu=2,01$.

Введем новую переменную $\omega=V \exp(-i\theta)$, $V^2=(1-R_2)/(1+R_2)$. Область D при этом конформно отобразится на криволинейный треугольник OAB плоскости ω



Фиг. 4

(Фиг. 4, а). Из уравнения состояния (5.5) для контактной поверхности OA получим

$$\sin \theta = -\frac{kV}{\sqrt{1-V^2}}, \quad k = \sqrt{(1-p_*)(1/V_*^2-1)}, \quad V_*^2 = \frac{1-p_*}{1+\rho_*}$$

Звуковой линии соответствует дуга AB окружности $V=V_*$, угол $\pi\alpha = \arctg[(1-V_*^2) \operatorname{ctg} \theta_*]$.

Решение задачи Гильберта сводится к определению конформного отображения области OAB плоскости ω на треугольник плоскости w , изображенный на фиг. 4, б, где $\beta = \operatorname{arctg} \mu$ ($\beta=0,1475$).

Учитывая приближенный характер метода аппроксимации адиабаты, ограничимся приближенным определением конформного отображения. С этой целью заменим область OAB близкой областью OA_1B (Фиг. 4, а). Кривая OA_1 имеет уравнение $\sin \theta = -kV/(1-V^2/2)$ и при $\gamma=1,4$ отличается от точной не более чем на 0,8%, A_1B — дуга эллипса, который будет определен ниже.

При отображении Жуковского

$$\eta = \frac{2+V_*^2}{2kV_*^2} - \frac{1}{k} \left(\frac{1}{\omega} + \frac{\omega}{2} \right) \quad (5.6)$$

OA_1 переходит в луч прямой (Фиг. 4, в). Построим в плоскости η окружность A_1B , составляющую с OA_1 угол $\pi\alpha$. Определим эллипс A_1B в плоскости ω как прообраз этой окружности. Как показывает расчет, отличие AB от A_1B не превышает различия между кривыми OA и OA_1 .

Отобразим теперь круговой треугольник OA_1B плоскости η на верхнюю полу-плоскость вспомогательной переменной ξ так, чтобы точки O , B , A_1 перешли соответственно в 0 , 1 , ∞ . Функцию $\eta(\xi)$ можно представить в виде отношения двух линейно-независимых частных решений некоторого гипергеометрического уравнения [24]. Не останавливаясь на деталях получения этого конформного отображения по известной схеме [24], дадим окончательное выражение для искомой функции

$$\eta = \cos \pi\alpha \left[1 - \frac{P_{1/2-\alpha}(-\sqrt{1-\xi})}{P_{1/2-\alpha}(\sqrt{1-\xi})} \right], \quad |1-\xi| < 1 \quad (5.7)$$

Здесь $P_\beta(x)$ — функция Лежандра [16].

Конформное отображение верхней полуплоскости ζ на треугольник OAB плоскости w получим с помощью интеграла Шварца — Кристоффеля [24]

$$\frac{dw}{d\zeta} = (\pi\zeta)^{-1}(1-\zeta)^{-\beta}$$

По формуле перехода к физической плоскости [22] на передней грани торца будем иметь

$$vX_2 = \int_1^\zeta \frac{1-\omega^2(\zeta)}{k\sqrt{2}\omega(\zeta)} \frac{dw}{d\zeta} d\zeta, \quad 0 < \zeta \leq 1 \quad (5.8)$$

Поскольку по (5.5) $P_2=1-k^2V^2(1-V^2)^{-1}$, (5.8) вместе с (5.6), (5.7) дают распределение давления на передней грани в области 2, построенное на фиг. 1, б.

Для функции

$$F_2(X_2) = \int_{X_2}^0 (P_2(X_2, -v^{-1}) - 1) dX_2$$

необходимой для вычисления лобового сопротивления тела, согласно (5.8) получим

$$vF_2(\zeta) = \frac{k}{\sqrt{2}} \int_1^\zeta \omega(\zeta) \frac{dw}{d\zeta} d\zeta$$

На основании (5.8) асимптотику этого интеграла при $\zeta \rightarrow 0$ можно представить в виде

$$vF_2(X_2) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \ln(-2\sqrt{2}vX_2) + \lambda + O(X_2^{-1} \ln(-X_2)), \quad X_2 \rightarrow -\infty \quad (5.9)$$

$$\lambda = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[vF_2(\zeta) + \frac{\sqrt{2}}{2} \ln\left(-\frac{1}{\pi} \ln \zeta\right) \right]$$

При $\gamma=1,4$ $\lambda=0,4886$.

6. Составное разложение для давления на теле. Срастим теперь давление во внешнем и внутреннем решениях. Одночленное внутреннее разложение для давления на теле, переписанное во внешних переменных (1.3), имеет вид $P_2(\delta^{-2}(x-1), -v^{-1})$. Раскладывая его до второго члена по параметру δ^2 с помощью асимптотического представления (5.4), получим $P_2 \sim 1 + \sqrt{2}\delta^2/[4v(x-1)]$. Согласно принципу асимптотического сращивания [14], это выражение должно быть равно двучленному внешнему разложению $1 + \delta^2 P_2(x)$, переписанному во внутренних переменных (1.5) и разложенному затем по δ^2 до первого члена. Такое равенство возможно, если во внешнем решении $P_1(x) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow 1$. Отсюда из асимптотических разложений (3.3), (4.4) получим $Y_0 = \alpha v^{-1}$. Таким образом, отход контактной поверхности на оси симметрии равен

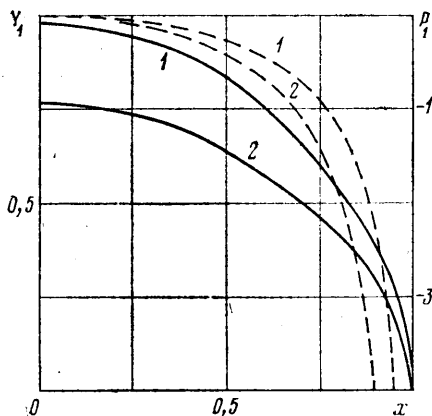
$$Y_0 = h_0 \left(\frac{1}{2}\right) = 2^{1/4} \pi^{-3/4} \exp\left(\frac{3}{4} + 2G\right) = 0,97925, \quad Y_0 = 0,766 \quad (6.1)$$

соответственно при плоском и осесимметричном течении.

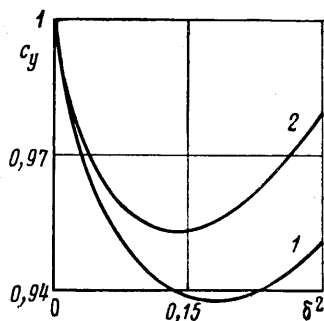
Асимптотические значения отхода контактной поверхности определены на основании разложения (5.4), не зависящего от условий на кромке

торца. Это показывает, что для принятой схемы течения, когда существует большой перепад давления между критической точкой и кромкой, область влияния последней имеет размеры порядка δ^2 . Условия на кромке будут оказывать влияние на все поле течения вверх по потоку при перепаде давления между критической точкой и кромкой порядка δ^2 .

Проведенная в [8] обработка численных результатов работы [4] по вдуву газа с торца цилиндра показала, что толщина слоя вдува на оси симметрии, отнесенная к радиусу торца, хорошо аппроксимируется величиной $(K/2)^{1/4}$ вплоть до значения $K=0,49$ при числах Маха набегающего потока больших двух. В соответствии с (1.2) это дает $Y_0=(p_0/2\rho_\infty U_\infty^2)^{1/4}$.



Фиг. 5



Фиг. 6

Отсюда, например, при $\gamma=1,4$; $M_\infty=3$ по формуле для давления торможения за прямым скачком [12] $Y_0=0,814$. Таким образом, рассчитанная в рамках полных уравнений газовой динамики [4] толщина слоя вдува в критической точке близка к своему асимптотическому значению (6.1) даже при отношении скоростных напоров, равном $1/2$.

Обращая разложение (3.3), (4.4), будем иметь

$$P_1 = \frac{\sqrt{2}}{4\nu(x-1)} + \frac{3\sqrt{2}}{16} \ln(1-x) + \frac{\sqrt{2}}{16} \left[3 \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \ln 2 - l_\nu \right] + O[(1-x) \ln(1-x)] \quad (6.2)$$

$$F_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln(1-x) + \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \ln 2 - f_\nu + O[(1-x) \ln(1-x)], \quad x \rightarrow 1$$

Условие срачивания определяет положение особенности во внешнем решении, перенося ее в точку $x=1$.

На фиг. 5 даны форма контактной поверхности (сплошные линии) и распределение давления на передней грани (штриховые линии), полученные из внешнего решения. На фиг. 5 кривые 1 соответствуют плоскому, а 2 — осесимметричному течению.

Составное разложение для давления будет равно сумме внешнего и внутреннего решений за вычетом их общей части [14]. Таким образом, на поверхности передней грани будем иметь

$$p = P_2(\delta^{-2}(x-1), -\nu^{-1}) + \delta^2 P_1(x) - \frac{\delta^2 \sqrt{2}}{4\nu(x-1)} \quad (6.3)$$

Первый член в этом выражении представляет собой одночленное составное разложение для давления, данное на фиг. 1, б. Выражение (6.3) не является двучленным составным разложением, поскольку содержит не все члены порядка δ^2 . В нем отсутствует следующий член внутреннего разложения (1.5). В связи с этим (6.3), как это следует из (6.2), имеет логарифмическую особенность при $x=1$.

Интегрируя (6.3) по площади передней грани, для лобового сопротивления тела F на основании (5.9) и (6.2) получим

$$((3-\nu)\pi^{\nu-1}r^{\nu}p_0)^{-1}F \equiv c_{\nu} = 1 + \delta^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \ln \delta - f_{\nu} + \lambda \right) + O(\delta^4 \ln^2 \delta) \quad (6.4)$$

Члены внутреннего разложения порядка δ^2 дают вклад в силу сопротивления порядка δ^4 и поэтому в (6.4) не вошли.

На фиг. 6 дана зависимость лобового сопротивления торца от интенсивности вдува для значения показателя адиабаты вдуваемого газа 1,4. Кривая 1 соответствует прямоугольному профилю, 2 — цилиндрическому торцу. Относительное снижение за счет вдува лобового сопротивления у осесимметричного тела несколько меньше, чем у профиля за счет разницы в величине констант f_{ν} .

График зависимости, данной на фиг. 6, имеет минимум. Это указывает на существование оптимального расхода вдуваемого газа, дающего наибольший выигрыш в снижении сопротивления торца за счет вдува. Из (6.4) для такой оптимальной величины δ^2 и минимального сопротивления тела при равномерном вдуве получим

$$\delta_{\min}^2 = \exp[2\sqrt{2}(f_{\nu}-\lambda)-1], \quad c_{\nu \min} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \delta_{\min}^2$$

$$\nu=1: \delta_{\min}^2=0,175; \quad c_{\nu \min}=0,938$$

$$\nu=2: \delta_{\min}^2=0,133; \quad c_{\nu \min}=0,953$$

Центральная часть передней грани 1 и окрестность кромок 2 дают вклад в сопротивление торца одного порядка. Однако, как легко убедиться, первая из этих величин убывает, а вторая возрастает при увеличении δ . Этим и объясняется немонотонный характер зависимости волнового сопротивления от расхода вдуваемого газа, который подтверждается численными расчетами и экспериментами [4, 11].

Автор признателен В. А. Левину за внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершбейн Э. А., Тирский Г. А. Течение вязкого теплопроводного многокомпонентного газа в ударном слое в окрестности притупления при интенсивных вдувах. — Научн. тр. Ин-та мех. Моск. ун-та, 1970, № 1, с. 46.
2. Стулов В. П., Сильный вдув на поверхности затупленного тела в сверхзвуковом потоке. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 2, с. 89.
3. Гилинский М. М., Лебедев М. Г. К расчету сильного вдува на затупленном теле и профиле. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 1, с. 117.
4. Коваль М. А. Экспериментальное и теоретическое исследование сильного вдува навстречу сверхзвуковому потоку: Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук: М.: МГУ, 1978.
5. Матвеева Н. С., Нейланд В. Я. Сильный вдув на теле конечной длины в сверхзвуковом потоке. — Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 5, с. 13.
6. Левин В. А. Сильный вдув на поверхности тела, обтекаемого сверхзвуковым потоком газа. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 5, с. 97.

7. *Вигдорович И. И., Левин В. А.* Сильный вдув жидкости в сверхзвуковой поток с поверхности пластины конечной длины.— В кн.: Неравновесные течения газа и оптимальные формы тел в сверхзвуковом потоке. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978, с. 51.
8. *Осипцов А. Н.* Вдув с торца цилиндра навстречу гиперзвуковому потоку газа.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 1, с. 192.
9. *Вигдорович И. И.* Сильный вдув жидкости в гиперзвуковой поток с поверхности пластины конечной длины.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 5, с. 829.
10. *Вигдорович И. И.* Вдув жидкости в сверхзвуковой поток через проницаемую поверхность.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 4, с. 108.
11. *Коваль М. А., Стулов В. П., Швец А. И.* Экспериментальное исследование сверхзвукового обтекания затупленных тел с сильным распределенным вдувом.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 3, с. 84.
12. *Черный Г. Г.* Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
13. *Лунев В. В.* Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975. 327 с.
14. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
15. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 464 с.
16. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
17. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Операционное исчисление. М.: Высшая школа, 1966. 405 с.
18. *Брычков Ю. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 287 с.
19. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Т. 2. 4-е перераб. изд. М.: Гостехиздат, 1963. 727 с.
20. *Франкль Ф. И.* О задачах С. А. Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1945, т. 9, № 2, с. 121.
21. *Петровский И. Г.* Лекция об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961. 400 с.
22. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.
23. *Руднев Ю. В.* О некоторых смешанных задачах газовой динамики.— В кн.: Теоретическая гидромеханика. Вып. 2. М.: Оборонгиз, 1955, с. 143.
24. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.— Л.: Гостехиздат, 1950. 436 с.

Москва

Поступила в редакцию
16.VI.1980