МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1982

УДК 533.924

ПРИЭЛЕКТРОДНАЯ ОБЛАСТЬ В ХИМИЧЕСКИ РАВНОВЕСНОЙ СЛАБОИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЕ

БЕНИЛОВ М. С.

Работа посвящена анализу пристеночной (приэлектродной) зоны возмущения электрических параметров слабоионизованной плазмы, т. е. зоны изменения концентраций заряженных частиц и электрического поля от распределения, соответствующего условиям в невозмущенном ядре, к значениям, определяемым граничными условиями на стенке.

Как известно, при достаточно высоких температурах и давлениях концентрации заряженных частиц в объеме химически реагирующей слабоионизованной плазмы удовлетворяют условиям ионизационного равновесия и квазинейтральности. Однако в пристеночной возмущенной зоне эти условия в общем случае несправедливы.

Асимптотическая теория области возмущения в химически замороженной плазме, учитывающая разделение зарядов, изложена в [1–3]. С другой стороны, в [4, 5] развита асимптотическая теория области возмущения в химически реагирующей квазинейтральной плазме. Настоящая работа посвящена асимптотическому расчету области возмущения слабоионизованной плазмы молекулярных газов вблизи горячего электрода с учетом как разделения зарядов, так и газофазных реакций ионизации и рекомбинации. Ранее в работе [6] рассматривались постановка такой задачи и некоторые результаты ее приближенного решения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим многокомпонентную слабоионизованную термически равновесную плазму молекулярных газов, содержащую M нейтральных компонент, одного сорта ионы и электроны. Ионизация нейтральных атомов может происходить при столкновениях как с электронами, так и молекулами нейтральной компоненты номер 1. Для простоты изложения будем предполагать, что плазма покоится, а давление ее и молярные концентрации нейтральных компонент постоянны. Температура плазмы считается заданной функцией координаты y (ось y направлена по нормали от стенки).

В рамках сделанных предположений имеем следующую систему определяющих уравнений [5, 6]:

$$J_i=-nD_i\left(\frac{dx_i}{dy}-x_i\frac{eE^\circ}{kT}\right),\qquad J_e=-nD_e\left(\frac{dx_e}{dy}+x_e\frac{eE^\circ}{kT}\right)\tag{1.1}$$

$$\frac{dJ_i}{dy}=n^3(k_{r1}x_1+k_{re}x_e)(x_r^2-x_ix_e),\qquad j^\circ=e(J_i-J_e)$$

$$\frac{dj^\circ}{dy}=0,\qquad \frac{dE^\circ}{dy}=4\pi en(x_i-x_e)$$

$$\frac{1}{D_i}=\sum_{k=1}^{M}\frac{x_k}{D_{ik}},\qquad \frac{1}{D_e}=\sum_{k=1}^{M}\frac{x_k}{D_{ek}},\qquad x_r=\frac{n_{er}}{n}$$

Здесь J_i, J_e, x_i, x_e — числовые плотности диффузионных потоков и молярные концентрации ионов и электронов, n, T — полная концентрация частиц и температура плазмы, e — заряд электрона, E° — напряженность электрического поля, k — постоянная Больцмана, k_{r1}, k_{re} — константы скорости рекомбинации для реакций с участием в качестве третьего тела молекул 1-й компоненты и электронов соответственно, x_k, D_{jk} ($k=1, \ldots, M$; $j=i, e$) — молярная концентрация k-й нейтральной компоненты и коэффициент бинарной диффузии заряженная частица — нейтрал, j° — плотность электрического тока, n_{er} — локальная химически равновесная квазинейтральная концентрация заряженных частиц.

На идеально каталитической, поглощающей и неэмиттирующей поверхности электрода концентрации заряженных частиц могут быть приняты равными нулю [7]; при удалении от электрода концентрации стремятся к заданному значению $x_{r\infty}$, соответствующему химически равновесному и электрически нейтральному ядру

$$y=0, \quad x_i=x_e=0; \quad y\to\infty, \quad x_i\to x_{r\infty}, \quad x_e\to x_{r\infty} \tag{1.2}$$

В качестве граничного условия для уравнения Пуассона будем задавать значение плотности электрического тока j°.

После решения сформулированной задачи можно найти распределение электрического потенциала. Введем функцию $\psi^\circ(y)$, характеризующую отклонение распределения потенциала в области возмущения от соответствующего невозмущенному ядру линейного распределения, экстраполированного в область возмущения

$$\psi^\circ = \int\limits_\infty^y (E_\infty{}^\circ - E^\circ)\,dy \tag{1.3}$$

Здесь и ниже индекс ∞ приписан невозмущеным значениям соответствующих величин.

Преобразуем задачу (1.1)—(1.3) к безразмерным переменным (L — характерный масштаб изменения температуры плазмы)

$$\eta=\frac{y}{L}, \quad z_j=\frac{x_j}{x_{r\infty}}, \quad I_j=\frac{LJ_j}{D_{j\infty}n_{er\infty}}, \quad E=\frac{eLE^\circ}{kT_\infty}, \quad \psi=\frac{e\psi^\circ}{kT_\infty} \quad (j=i,e)$$

$$I_i=-a(z_i'-\theta^{-1}z_iE), \qquad I_e=-a(z_e'+\theta^{-1}z_eE) \tag{1.4}$$

$$\chi I_i' = \frac{2b}{1+\beta}(1+cz_e)(r^2-z_iz_e), \qquad I_e=\beta(I_i-j)$$

$$\varepsilon\theta E'=z_i-z_e, \qquad \psi'=E_\infty-E$$

$$\eta=0, \quad z_i=z_e=0; \quad \eta\to\infty, \quad z_i\to1, \quad z_e\to1, \quad \psi\to0 \tag{1.5}$$

$$a=\frac{nD_i}{n_\infty D_{i\infty}}, \quad \theta=\frac{T}{T_\infty}, \quad b=\frac{k_{r1}n^3}{k_{r1\infty}n_\infty{}^3}, \quad c=\frac{k_{re}x_{r\infty}}{k_{r1}x_1}, \quad r=\frac{x_r}{x_{r\infty}}=\theta^{5/4}e^{-t}$$

$$t=mq, \qquad q=\frac{1-\theta}{\theta}, \qquad \chi=\frac{d_{1\infty}{}^2}{2L^2}, \qquad \beta=\frac{D_i}{D_e}, \qquad j=\frac{Lj^\circ}{eD_{i\infty}n_{er\infty}}$$

$$\varepsilon=\frac{h_\infty{}^2}{L^2}, \qquad m=\frac{I}{2kT_\infty}, \qquad d_1=\left[\frac{4D_i}{k_{r1}nx_1n_{er}(1+\beta)}\right]^{1/2}, \qquad h=\left(\frac{kT}{4\pi n_{er}e^2}\right)^{1/2}$$

Здесь I — энергия ионизации нейтральных атомов, штрих означает дифференцирование по η. При записи системы уравнений предполагалось, что коэффициенты бинарной диффузии заряженная частица — нейтрал в рассматриваемом диапазоне изменения температуры плазмы зависят от нее одинаковым образом, тогда отношение β коэффициентов диффузии в плазме постоянно [8].

Сформулированная задача содержит в качестве коэффициентов заданные функции $a(\eta)$, $b(\eta)$, $c(\eta)$, $\theta(\eta)$ и заданные параметры ε, χ, β, m, j. Первые два из этих параметров будут предполагаться малыми [1—3, 4—5]. Установим между ними следующее отношение порядка: $\varepsilon/\chi \to 0$ (например, для типичных условий в плазме продуктов сгорания при $T=2000°$ K и давлении 1 *атм* $h^2/d_1^2 \sim 10^{-4}$). Параметр β будет считаться фиксированным. Также фиксированным будет считаться в данной работе параметр m (предел горячей стенки [4, 5]). Наконец, безразмерная плотность тока j может меняться в широких пределах; в настоящей работе будут рассмотрены случаи умеренных токов $j=O(\chi^{-1/2})$ и больших токов $j=O(\chi^{-1})$.

2. Случай умеренных токов $j=\chi^{-1/2}j_1$ (здесь j_1 — заданная постоянная). Внешнее асимптотическое разложение решения задачи (1.4), (1.5), справедливое при $\eta>0$, будем искать в виде

$$\begin{aligned} &z_i(\eta;\,\varepsilon,\chi,j)=g_1(\eta)+\ldots; && z_e(\eta;\,\varepsilon,\chi,j)=f_1(\eta)+\ldots \\ &I_i(\eta;\,\varepsilon,\chi,j)=\chi^{-1/2}G_1(\eta)+\ldots; && I_e(\eta;\,\varepsilon,\chi,j)=\chi^{-1/2}F_1(\eta)+\ldots \\ &E(\eta;\,\varepsilon,\chi,j)=\chi^{-1/2}E_1(\eta)+\ldots; && \psi(\eta;\,\varepsilon,\chi,j)=\chi^{-1/2}\psi_1(\eta)+\ldots \end{aligned} \tag{2.1}$$

Подставляя это разложение в уравнения (1.4), получаем систему уравнений

$$G_1=a\theta^{-1}g_1E_1,\quad F_1=-a\theta^{-1}f_1E_1,\quad g_1f_1=r^2$$

$$F_1=\beta(G_1-j_1),\quad g_1=f_1,\quad \psi_1'=E_{1\infty}-E_1$$

Решение этой системы будет

$$g_1=f_1=r,\quad G_1=\frac{\beta}{1+\beta}j_1,\quad F_1=-\frac{\beta}{1+\beta}j_1 \tag{2.2}$$

$$E_1=\frac{\beta\theta}{(1+\beta)ar}j_1,\quad \psi_1=\frac{\beta}{1+\beta}j_1\int_\eta^\infty\left(\frac{\theta}{ar}-1\right)d\eta$$

При записи последнего выражения предполагается, что несобственный интеграл в правой части сходится. Нетрудно видеть, что это предположение эквивалентно предположению о сходимости интеграла

$$\int_0^\infty(1-\theta)\,d\eta$$

Поскольку химически равновесное квазинейтральное решение (2.2) не удовлетворяет граничным условиям на стенке, необходимо рассматривать пристеночную внутреннюю зону, в которой разложение (2.1) несправедливо. Структура этой внутренней зоны зависит от величины j_1. Будем рассматривать следующие два случая:

$$-1<\frac{j_1}{2a_w\gamma_w}<\frac{1}{\beta},\qquad \frac{j_1}{2a_w\gamma_w}<-1,\qquad \gamma=\gamma(\eta)=r\left[\frac{br(8+3cr)}{6a}\right]^{1/2}$$

Индекс w здесь и ниже приписан значениям соответствующих величин на стенке.

Будем рассматривать сначала первый случай. Первое внутреннее разложение — разложение неравновесного слоя — имеет вид

$$\begin{gathered} z_i=g_2(\eta_2)+\ldots;\quad z_e=f_2(\eta_2)+\ldots;\quad I_i=\chi^{-1/2}G_2(\eta_2)+\ldots \\ I_e=\chi^{-1/2}F_2(\eta_2)+\ldots;\quad E=\chi^{-1/2}E_2(\eta_2)+\ldots;\quad \psi=\chi^{-1/2}\psi_{1w}+\psi_2(\eta_2)+\ldots \\ \eta_2=\eta/\chi^{1/2}>0 \end{gathered} \tag{2.3}$$

Имеем систему уравнений

$$G_2=-a_w\left(\frac{dg_2}{d\eta_2}-\frac{1}{\theta_w}g_2E_2\right),\qquad F_2=-a_w\left(\frac{df_2}{d\eta_2}+\frac{1}{\theta_w}f_2E_2\right)\tag{2.4}$$

$$\frac{dG_2}{d\eta_2}=\frac{2b_w}{1+\beta}(1+c_wf_2)(r_w^2-g_2f_2),\qquad F_2=\beta(G_2-j_1)$$

$$g_2=f_2,\qquad \frac{d\psi_2}{d\eta_2}=E_{1\infty}-E_2$$

Условия сращивания с внешним разложением (2.1) будут

$$\eta_2\to\infty,\qquad g_2\to r_w,\qquad f_2\to r_w,\qquad G_2\to\frac{\beta}{1+\beta}j_1,\tag{2.5}$$

$$F_2\to-\frac{\beta}{1+\beta}j_1,\qquad E_2\to\frac{\beta\theta_w}{(1+\beta)a_wr_w}j_1,\qquad \psi_2\sim\frac{\beta}{1+\beta}j_1\left(1-\frac{\theta_w}{a_wr_w}\right)\eta_2+\ldots$$

Решение задачи (2.4), (2.5), удовлетворяющее формально граничным условиям на стенке, имеет вид (выражение для функции $\tau(u,\,v)$ приведено в [5]

$$g_2=f_2=r_w\tau\left\{\eta_2\left[\frac{(1+c_wr_w)b_wr_w}{2a_w}\right]^{1/2},\ c_wr_w\right\}\tag{2.6}$$

$$G_2=\frac{1}{1+\beta}\left(\beta j_1-2a_w\frac{dg_2}{d\eta_2}\right),\qquad F_2=-\frac{\beta}{1+\beta}\left(j_1+2a_w\frac{dg_2}{d\eta_2}\right)$$

$$E_2=\frac{\theta_w}{(1+\beta)a_wg_2}\left[\beta j_1-a_w(1-\beta)\frac{dg_2}{d\eta_2}\right]$$

$$\psi_2=\frac{1}{1+\beta}\left[\beta j_1\eta_2+(1-\beta)\theta_w\ln g_2-\frac{\beta\theta_w}{a_w}j_1\int\frac{d\eta_2}{g_2}\right]$$

Для определения постоянной интегрирования в последнем выражении необходимо при сращивании учитывать второй член внешнего разложения.

Поскольку при $\eta_2=0$ полученное решение имеет особенности в выражениях для электрического поля и ψ_2, необходимо рассматривать второе внутреннее разложение — разложение дебаевского слоя, которое имеет вид

$$z_i=\varepsilon^{1/3}\chi^{-1/3}g_3(\eta_3)+\ldots;\qquad z_e=\varepsilon^{1/3}\chi^{-1/3}f_3(\eta_3)+\ldots\tag{2.7}$$

$$I_i=\chi^{-1/2}G_3(\eta_3)+\ldots;\qquad I_e=\chi^{-1/2}F_3(\eta_3)+\ldots;\qquad E=\varepsilon^{-1/3}\chi^{-1/6}E_3(\eta_3)+\ldots$$

$$\psi=\chi^{-1/2}\psi_{1w}+\ln(\varepsilon^{-1}\chi)\theta_w\frac{\beta j_1-a_w\gamma_w(1-\beta)}{3a_w\gamma_w(1+\beta)}+\psi_3(\eta_3)+\ldots$$

$$\eta_3=\eta/(\varepsilon^{1/3}\chi^{1/6})\geqslant0$$

Имеем систему уравнений

$$G_3=-a_w\left(\frac{dg_3}{d\eta_3}-\frac{1}{\theta_w}g_3E_3\right),\qquad F_3=-a_w\left(\frac{df_3}{d\eta_3}+\frac{1}{\theta_w}f_3E_3\right)\tag{2.8}$$

$$\frac{dG_3}{d\eta_3}=0,\qquad F_3=\beta(G_3-j_1)\tag{2.9}$$

$$\theta_w\frac{dE_3}{d\eta_3}=g_3-f_3,\qquad \frac{d\psi_3}{d\eta_3}=-E_3\tag{2.10}$$

Граничными условиями при $\eta_3\to\infty$ будут условия сращивания с разложением (2.3), граничными условиями при $\eta_3=0$ будут первые условия (1.5)

$$\eta_3\to\infty,\quad g_3\sim\gamma_w\eta_3+\ldots,\quad f_3\sim\gamma_w\eta_3+\ldots \tag{2.11}$$

$$G_3\to\frac{\beta j_1-2a_w\gamma_w}{1+\beta},\quad F_3\to-\frac{\beta(j_1+2a_w\gamma_w)}{1+\beta} \tag{2.12}$$

$$E_3\sim\theta_w\frac{\beta j_1-a_w\gamma_w(1-\beta)}{a_w\gamma_w(1+\beta)\eta_3}-\ldots,\quad \psi_3\sim\theta_w\frac{-\beta j_1+a_w\gamma_w(1-\beta)}{a_w\gamma_w(1+\beta)}\ln\eta_3+\ldots \tag{2.13}$$

$$\eta_3=0,\quad g_3=f_3=0 \tag{2.14}$$

Здесь учтено, что на основании выражения [5] для функции τ $(dg_2/d\eta_2)_w=\gamma_w$.

Нетрудно видеть, что в рассматриваемом предельном случае химические реакции в дебаевском слое в первом приближении можно считать замороженными. Потоки G_3, F_3 заряженных частиц в слое постоянны и равны

$$G_3=\frac{\beta j_1-2a_w\gamma_w}{1+\beta},\quad F_3=-\frac{\beta(j_1+2a_w\gamma_w)}{1+\beta} \tag{2.15}$$

Задача для концентраций заряженных частиц, электрического поля и потенциала (2.8), (2.10), (2.11), (2.13), (2.14) тождественна соответствующей задаче в случае химически замороженной плазмы, численное решение которой приведено в [1]. Для вольт-амперной характеристики, удерживая в разложении величины ψ_w первые два члена, находим следующее аналитическое выражение:

$$\psi_w=\frac{\beta}{1+\beta}j\int_0^\infty\left(\frac{\theta}{ar}-1\right)d\eta+\ln(\varepsilon^{-1}\chi)\theta_w\frac{\beta\chi^{1/2}j-a_w\gamma_w(1-\beta)}{3a_w\gamma_w(1+\beta)} \tag{2.16}$$

Очевидно, задача (2.8), (2.10), (2.11), (2.13), (2.14) разрешима и анализ настоящего пункта справедлив при условии, что $G_3<0$, $F_3<0$. Нетрудно видеть, что в рассматриваемом диапазоне изменения величины j_1 это условие выполняется.

Перейдем теперь к рассмотрению второго случая, когда $j_1<-2a_w\gamma_w$. Разложение неравновесного слоя, как и в предыдущем случае, имеет вид (2.3) (вместо функций g_2, f_2, G_2, F_2, E_2, ψ_2 будут функции g_4, f_4, G_4, F_4, E_4, ψ_4), однако в данном случае область справедливости этого разложения ограничена условием $\eta_2>\eta_{2D}$ (здесь η_{2D} — некоторая пока неизвестная положительная постоянная). Для функций g_4, f_4, G_4, F_4, E_4, ψ_4 получаем задачу, совпадающую с (2.4), (2.5) (вместо индекса 2 при искомых функциях будет индекс 4). Полагая, что при $\eta_2=\eta_{2D}$ функции g_4 и f_4 обращаются в ноль, вновь получаем решение (2.6), если в этом последнем индекс 2 при искомых функциях заменить на индекс 4 и, кроме того, в первом выражении η_2 заменить на $\eta_2-\eta_{2D}$.

К неравновесному слою примыкает дебаевский переходный слой, разложение которого связано с переменной $\eta_5=(\eta-\eta_{2D}\chi^{1/2})/(\varepsilon^{1/3}\chi^{1/6})$ и справедливо при $-\infty<\eta_5<\infty$. Это разложение имеет вид, аналогичный (2.7) (вместо индекса 3 будет индекс 5). Для функций g_5, f_5, G_5, F_5, E_5, ψ_5 получаем задачу, совпадающую, за исключением последнего граничного условия, с задачей (2.8)—(2.14); вместо граничного условия (2.14) будет условие

$$\eta_5\to-\infty,\quad g_5\to0,\quad f_5\to0 \tag{2.17}$$

Отметим, что в отличие от случая химически замороженной плазмы [2] уравнение для электронной концентрации в дебаевском переходном слое является в данном случае неоднородным.

Производя аналогично [2] частичное интегрирование задачи (2.8), (2.10), (2.11), (2.13) (вместо индекса 3 будет индекс 5), (2.17), находим

$$g_5=\left(\frac{-G_5}{a_w}\right)\exp\left(-\frac{\psi_5}{\theta_w}\right)\int\limits_{-\infty}^{\eta_5}\exp\left(\frac{\psi_5}{\theta_w}\right)dp$$

$$f_5=\frac{F_5}{a_w}\exp\left(\frac{\psi_5}{\theta_w}\right)\int\limits_{\eta_5}^{\infty}\exp\left(-\frac{\psi_5}{\theta_w}\right)dp$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\psi_5}{d\eta_5}\right)^2=g_5+f_5-2\gamma_w\eta_5+\text{const}$$

Из этих соотношений удобно найти асимптотику функций g_5, f_5, E_5, ψ_5 при $\eta_5\to-\infty$, необходимую для последующего сращивания

$$g_5\sim\frac{(-G_5)\theta_w}{2a_w\gamma_w^{1/2}}(-\eta_5)^{-1/2}+\ldots,\quad f_5\sim\frac{F_5\theta_w}{2a_w\gamma_w^{1/2}}(-\eta_5)^{-1/2}+\ldots$$

$$E_5\sim-2\gamma_w^{1/2}(-\eta_5)^{1/2}+\ldots,\quad \psi_5=-\frac{4}{3}\gamma_w^{1/2}(-\eta_5)^{3/2}+\ldots$$

К дебаевскому переходному слою примыкает основной дебаевский слой, разложение которого справедливо при $0<\eta_2<\eta_{2D}$ и имеет вид

$$z_i=\varepsilon^{1/2}\chi^{-1/2}g_6(\eta_2)+\ldots;\ z_e=\varepsilon^{1/2}\chi^{-1/2}f_6(\eta_2)+\ldots$$

$$I_i=\chi^{-1/2}G_6(\eta_2)+\ldots;\ I_e=\chi^{-1/2}F_6(\eta_2)+\ldots;\ E=\varepsilon^{-1/2}E_6(\eta_2)+\ldots$$

$$\psi=\begin{cases}\varepsilon^{-1/2}\chi^{1/2}\psi_6(\eta_2)+\ldots; & \varepsilon\chi^{-2}\to k_1,\quad \varepsilon\chi^{-2}\to0\\ \chi^{-1/2}\psi_{1w}+\varepsilon^{-1/2}\chi^{1/2}\psi_6(\eta_2)+\ldots; & \varepsilon\chi^{-2}\to\infty\end{cases}$$

Здесь k_1 — заданная положительная постоянная. Для функций g_6, f_6, G_6, F_6, E_6, ψ_6 получаем задачу

$$G_6=\frac{a_wg_6E_6}{\theta_w},\quad F_6=-\frac{a_wf_6E_6}{\theta_w},\quad \frac{dG_6}{d\eta_2}=\frac{2b_wr_w^2}{1+\beta}$$

$$F_6=\beta(G_6-j_1),\quad \theta_w\frac{dE_6}{d\eta_2}=g_6-f_6,\quad \frac{d\psi_6}{d\eta_2}=-E_6$$

$$\eta_2\to\eta_{2D},\quad g_6\sim\frac{(-G_5)\theta_w}{2a_w\gamma_w^{1/2}}(\eta_{2D}-\eta_2)^{-1/2}+\ldots,\quad f_6=\frac{F_5\theta_w}{2a_w\gamma_w^{1/2}}(\eta_{2D}-\eta_2)^{-1/2}+\ldots$$

$$G_6\to G_5,\quad F_6\to F_5,\quad E_6\sim-2\gamma_w^{1/2}(\eta_{2D}-\eta_2)^{1/2}+\ldots$$

$$\psi_6\sim\psi_{6D}-\frac{4}{3}\gamma_w^{1/2}(\eta_{2D}-\eta_2)^{3/2}+\ldots$$

$$\psi_{6D}=\begin{cases}0; & \varepsilon\chi^{-2}\to0,\quad \varepsilon\chi^{-2}\to\infty\\ k^{1/2}\psi_{1w}; & \varepsilon\chi^{-2}\to k_1\end{cases}$$

Решение этой задачи будет

$$g_6=\frac{G_6\theta_w}{a_wE_6},\quad G_6=-\frac{2}{1+\beta}b_wr_w^2(\eta_{2D}-\eta_2)-\frac{2a_w\gamma_w-\beta j_1}{1+\beta}$$

$$f_6=-\frac{F_6\theta_w}{a_wE_6},\quad F_6=-\frac{2\beta}{1+\beta}b_wr_w^2(\eta_{2D}-\eta_2)-\frac{\beta(j_1+2a_w\gamma_w)}{1+\beta}$$

$$E_6=-\left[\frac{2b_w r_w^2}{a_w}(\eta_{2D}-\eta_2)^2+4\gamma_w(\eta_{2D}-\eta_2)\right]^{1/2}$$

$$\psi_6=\psi_{6D}-\left(\frac{2a_w}{b_w}\right)^{3/2}\frac{2\gamma_w^2}{r_w^3}\Phi\left[\frac{b_w r_w^2}{2a_w\gamma_w}(\eta_{2D}-\eta_2)\right]$$

$$\Phi(u)=\left(\frac{u}{2}+\frac{1}{4}\right)(u^2+u)^{1/2}-\frac{1}{8}\ln[2(u^2+u)^{1/2}+2u+1]$$

Отметим, что при $r_w\to 0$ это решение становится аналогичным решению для химически замороженного дебаевского слоя [2].

Поскольку выписанное решение не удовлетворяет граничным условиям на стенке, необходимо рассматривать промежуточное разложение — разложение ионного диффузионного слоя [2], которое в данном случае имеет следующий вид:

$$z_i=\varepsilon^{1/2}\chi^{-1/2}g_7(\eta_7)+\ldots;\ z_e=\varepsilon^{1/2}\chi^{-1/2}f_7(\eta_7)+\varepsilon\chi^{-1}f_8(\eta_7)+\ldots \tag{2.18}$$

$$I_i=\chi^{-1/2}G_7(\eta_7)+\ldots;\ I_e=\chi^{-1/2}F_7(\eta_7)+\varepsilon^{1/2}\chi^{-1}F_8(\eta_7)+\ldots$$

$$E=\varepsilon^{-1/2}E_7(\eta_7)+\ldots$$

$$\psi=\begin{cases}\varepsilon^{-1/2}\chi^{1/2}\psi_{6w}+\ldots; & \varepsilon\chi^{-2}\to k_1,\quad \varepsilon\chi^{-2}\to 0\\ \chi^{-1/2}\psi_{1w}+\varepsilon^{-1/2}\chi^{1/2}\psi_{6w}+\ldots; & \varepsilon\chi^{-2}\to\infty\end{cases}$$

$$\eta_7=\eta/\varepsilon^{1/2}\geqslant 0$$

Для функций g_7, f_7, G_7, F_7, E_7 получаем задачу

$$\frac{dg_7}{d\eta_7}-\frac{1}{\theta_w}g_7E_7=-\frac{G_7}{a_w},\quad \frac{df_7}{d\eta_7}+\frac{1}{\theta_w}f_7E_7=-\frac{F_7}{a_w} \tag{2.19}$$

$$\frac{dG_7}{d\eta_7}=0,\quad F_7=\beta(G_7-j_1),\quad \frac{dE_7}{d\eta_7}=0$$

$$\eta_7\to\infty,\ g_7\to g_{6w},\ f_7\to f_{6w},\ G_7\to G_{6w},\ F_7\to F_{6w},\ E_7\to E_{6w}$$

$$\eta_7=0,\ g_7=f_7=0$$

Для функций g_7, G_7, F_7, E_7 получаем выражения

$$g_7=[1-\exp(\theta_w^{-1}E_{6w}\eta_7)]g_{6w},\ G_7=G_{6w},\ F_7=F_{6w},\ E_7=E_{6w}$$

Поскольку единственным решением второго уравнения (2.19), ограниченным при $\eta_7\to\infty$, является постоянная, то необходимое условие разрешимости задачи для функции f_7 имеет вид $f_{6w}=0$.

Тогда первые члены разложений (2.18) для функций z_e и I_e обращаются в ноль. Для следующих членов получаем задачу

$$\frac{df_8}{d\eta_7}+\frac{1}{\theta_w}E_{6w}f_8=-\frac{F_8}{a_w},\quad \frac{dF_8}{d\eta_7}=\frac{2b_w\beta r_w^2}{1+\beta}$$

$$\eta_7=0,\ f_8=0;\ \eta_7\to\infty,\ f_8\sim\frac{2\beta\theta_w b_w r_w^2}{(1+\beta)a_w(-E_{6w})}\eta_7+\ldots,\ F_8\sim\frac{2\beta b_w r_w^2}{1+\beta}\eta_7+\ldots$$

Решение этой задачи будет

$$f_8=\frac{2\beta\theta_w b_w r_w^2}{(1+\beta)a_w(-E_{6w})}\eta_7,\quad F_8=\frac{2\beta b_w r_w^2}{1+\beta}\left(\eta_7+\frac{\theta_w}{E_{6w}}\right)$$

Наконец, значение постоянной η_{2D} находим из условия $f_{6w}=0$:

$$\eta_{2D}=-\frac{j_1+2a_w\gamma_w}{2b_w r_w^2}$$

Вольт-амперная характеристика в случаях $\varepsilon\chi^{-2}\to 0$, $\varepsilon\chi^{-2}\to k_1$, $\varepsilon\chi^{-2}\to\infty$ описывается соответственно следующими выражениями:

$$\psi_w=-\varepsilon^{-1/2}\chi^{1/2}\left(\frac{2a_w}{b_w}\right)^{3/2}\frac{2\gamma_w^2}{r_w^3}\Phi\left(-\frac{\chi^{1/2}j+2a_w\gamma_w}{4a_w\gamma_w}\right) \tag{2.20}$$

$$\psi_w=-\varepsilon^{-1/2}\chi^{1/2}\left[k_1^{1/2}\frac{\beta}{1+\beta}\chi^{1/2}j\int_0^\infty\left(1+\frac{\theta}{ar}\right)d\eta+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{2a_w}{b_w}\right)^{3/2}\frac{2\gamma_w^2}{r_w^2}\Phi\left(-\frac{\chi^{1/2}j+2a_w\gamma_w}{4a_w\gamma_w}\right)\right]$$

$$\psi_w=\frac{\beta}{1+\beta}j\int_0^\infty\left(\frac{\theta}{ar}-1\right)d\eta-\varepsilon^{-1/2}\chi^{1/2}\left(\frac{2a_w}{b_w}\right)^{3/2}\frac{2\gamma_w^2}{r_w^3}\Phi\left(-\frac{\chi^{1/2}f+2a_w\gamma_w}{4a_w\gamma_w}\right)$$

3. Случай больших токов $j=\chi^{-1}j_2$ (j_2 — заданная отрицательная постоянная). Внешнее асимптотическое разложение решения задачи (1.4), (1.5), справедливое при $\eta>\eta_D$ (η_D — некоторая пока неизвестная положительная постоянная), будем искать в виде

$$z_i=g_9(\eta)+\ldots;\ z_e=f_9(\eta)+\ldots;\ I_i=\chi^{-1}G_9(\eta)+\ldots$$
$$I_e=\chi^{-1}F_9(\eta)+\ldots;\ E=\chi^{-1}E_9(\eta)+\ldots;\ \psi=\chi^{-1}\psi_9(\eta)+\ldots \tag{3.1}$$

Для функций g_9, f_9, G_9, F_9, E_9, ψ_9 получаем систему уравнений

$$G_9=\frac{a}{\theta}g_9E_9,\quad F_9=-\frac{a}{\theta}f_9E_9,\quad G_9'=\frac{2b}{1+\beta}(1+cf_9)(r^2-g_9f_9)$$
$$F_9=\beta(G_9-j_2),\ g_9=f_9,\ \psi_9'=E_{9\infty}-E_9$$

Решение этой системы имеет вид, аналогичный (2.2) (вместо g_1, f_1, G_1, F_1, E_1, ψ_1, j_1 будут величины g_9, f_9, G_9, F_9, E_9, ψ_9, j_2).

К внешней области примыкает расположенная в окрестности точки $\eta=\eta_D$ переходная зона, отделяющая внешнюю область от области дебаевского слоя. Структура этой переходной зоны зависит от порядка величины $\varepsilon\chi^{-2}$. Рассмотрим сначала случай $\varepsilon\chi^{-2}\to k_1$.

Разложение переходного слоя имеет вид

$$z_i=g_{10}(\eta_{10})+\chi^{1/2}g_{11}(\eta_{10})+\ldots;\ z_e=f_{10}(\eta_{10})+\chi^{1/2}f_{11}(\eta_{10})+\ldots \tag{3.2}$$
$$I_i=\chi^{-1}G_{10}(\eta_{10})+\chi^{-1/2}G_{11}(\eta_{10})+\ldots;\ I_e=\chi^{-1}F_{10}(\eta_{10})+\chi^{-1/2}F_{11}(\eta_{10})+\ldots$$
$$E=\chi^{-1}E_{10}(\eta_{10})+\chi^{-1/2}E_{11}(\eta_{10})+\ldots;\ \psi=\chi^{-1}\psi_{9D}+\chi^{-1/2}\psi_{10}(\eta_{10})+\ldots$$
$$-\infty<\eta_{10}=(\eta-\eta_D)/\chi^{1/2}<\infty$$

Здесь и ниже индекс D приписан значениям соответствующих величин при $\eta=\eta_D$. Подставляя это разложение в систему уравнений (1.4) и удерживая первые члены, получаем уравнения

$$G_{10}=\frac{a_D}{\theta_D}g_{10}E_{10},\quad F_{10}=-\frac{a_D}{\theta_D}f_{10}E_{10},\quad \frac{dG_{10}}{d\eta_{10}}=0$$

$$F_{10}=\beta(G_{10}-j_2),\quad g_{10}=f_{10},\quad \frac{d\psi_{10}}{d\eta_{10}}=E_{9\infty}-E_{10}$$

Граничными условиями будут условия сращивания первых членов разложений (3.1) и (3.2)

$$\eta_{10}\to\infty,\quad g_{10}\to r_D,\quad f_{10}\to r_D,\quad G_{10}\to\frac{\beta}{1+\beta}j_2$$

$$F_{10}\to-\frac{\beta}{1+\beta}j_2,\quad E_{10}\to\frac{\beta\theta_D}{(1+\beta)a_Dr_D}j_2,\quad \psi_{10}\sim\frac{\beta}{1+\beta}j_2\left(1-\frac{\theta_D}{a_Dr_D}\right)\eta_{10}+\ldots$$

Для функций G_{10} и F_{10} находим

$$G_{10}=\frac{\beta}{1+\beta}j_2,\quad F_{10}=-\frac{\beta}{1+\beta}j_2$$

Для определения функции g_{10} необходимо рассмотреть уравнения второго приближения

$$G_{11}=-a_D\frac{dg_{10}}{d\eta_{10}}+\left(\frac{a}{\theta}\right)_D'\eta_{10}g_{10}E_{10}+\frac{a_D}{\theta_D}(g_{10}E_{11}+g_{11}E_{10})$$

$$F_{11}=-a_D\frac{dg_{10}}{d\eta_{10}}-\left(\frac{a}{\theta}\right)_D'\eta_{10}g_{10}E_{10}-\frac{a_D}{\theta_D}(g_{10}E_{11}+f_{11}E_{10})$$

$$\frac{dG_{11}}{d\eta_{10}}=\frac{1}{\beta}\frac{dF_{11}}{d\eta_{10}}=\frac{2}{1+\beta}b_D(1+c_Dg_{10})(r_D^2-g_{10}^2),\quad k_1\theta_D\frac{dE_{10}}{d\eta_{10}}=g_{11}-f_{11}$$

Дифференцируя сумму первых двух уравнений, после преобразований получим искомое уравнение для функции g_{10}:

$$\frac{d^2}{d\eta_{10}^2}\left(a_Dg_{10}-\frac{G_{10}^2\theta_D^4k_1}{4a_Dg_{10}^2}\right)=b_D(1+c_Dg_{10})(g_{10}^2-r_D^2)$$

Умножим обе части этого выражения на производную функции в квадратных скобках и проинтегрируем. После преобразований и повторного интегрирования получаем решение в виде

$$\eta_{10}=\int\limits_u^{g_{10}}\left(q_1+\frac{q_2}{2p^3}\right)\left[\frac{q_1c_D}{2}(r_D^2-p^2)^2+\frac{2q_1}{3}(r_D-p)^2(2r_D+p)+\right.$$

$$\left.+\frac{q_2c_D}{p}(r_D-p)^2+\frac{q_2}{2}\left(\frac{r_D^2}{p^2}-1-\ln\frac{r_D^2}{p^2}\right)\right]^{-1/2}dp$$

$$q_1=\frac{a_D}{b_D},\quad q_2=\frac{\beta^2\theta_D^2j_2^2k_1}{(1+\beta)^2a_Db_D}\tag{3.3}$$

где u — некоторая неизвестная постоянная, лежащая в интервале $(0, r_D)$. Функции f_{10}, E_{10}, ψ_{10} даются выражениями

$$f_{10}=g_{10},\quad E_{10}=\frac{\beta\theta_D}{(1+\beta)a_Dg_{10}}j_2,\quad \psi_{10}=\frac{\beta}{1+\beta}j_2\int\left(1-\frac{\theta_D}{a_Dg_{10}}\right)d\eta_{10}$$

Асимптотика функции g_{10} при $\eta_{10}\to-\infty$ может быть найдена из (3.3)

$$g_{10}\sim-\frac{\beta\theta_Dj_2}{(1+\beta)r_D}\left(\frac{k_1}{2a_Db_D}\right)^{1/2}\frac{1}{(-\eta_{10})}+\ldots$$

Разложение дебаевского слоя имеет вид

$$z_i=\varepsilon^{1/2}\chi^{-1/2}g_{12}(\eta)+\ldots;\quad z_e=\varepsilon^{1/2}\chi^{-1/2}f_{12}(\eta)+\ldots;\quad I_i=\chi^{-1}G_{12}(\eta)+\ldots$$

$$I_e=\chi^{-1}F_{12}(\eta)+\ldots;\quad E=\varepsilon^{-1/2}\chi^{-1/2}E_{12}(\eta)+\ldots;\quad \psi=\varepsilon^{-1/2}\chi^{-1/2}\psi_{12}(\eta)+\ldots$$

$$0<\eta<\eta_D$$

Для определения функций g_{12}, f_{12}, G_{12}, F_{12}, E_{12}, ψ_{12} и постоянной η_D получаем задачу

$$G_{12}=\frac{a}{\theta}g_{12}E_{12},\qquad F_{12}=-\frac{a}{\theta}f_{12}E_{12},\qquad G_{12}'=\frac{2br^2}{1+\beta}$$

$$F_{12}=\beta(G_{12}-j_2),\ \theta E_{12}'=g_{12}-f_{12},\ \psi_{12}'=-E_{12}$$

$$\eta\to\eta_D,\ g_{12}\sim\beta\theta_D(-j_2)[(1+\beta)(2a_Db_D)^{1/2}r_D(\eta_D-\eta)]^{-1}+\ldots$$

$$f_{12}\sim\frac{\beta\theta_D(-j_2)}{(1+\beta)(2a_Db_D)^{1/2}r_D(\eta_D-\eta)}+\ldots,\qquad G_{12}\to\frac{\beta}{1+\beta}j_2,\qquad F_2\to-\frac{\beta}{1+\beta}j_2$$

$$E_{12}\sim-\left(\frac{2b_D}{a_D}\right)^{1/2}r_D(\eta_D-\eta)+\ldots,\qquad \psi_{12}\sim-\left(\frac{b_D}{2a_D}\right)^{1/2}r_D(\eta_D-\eta)^2+\ldots$$

$$\eta=0,\quad f_{12}=0$$

Последнее граничное условие есть условие сращивания с разложением ионного диффузионного слоя; оно аналогично условию $f_{6\omega}=0$

Для функций g_{12}, f_{12}, G_{12}, F_{12}, E_{12}, ψ_{12} получаем выражения

$$g_{12}=\frac{G_{12}\theta}{aE_{12}},\qquad f_{12}=-\frac{F_{12}\theta}{aE_{12}},\qquad G_{12}=\frac{\beta}{1+\beta}j_2-\frac{2}{1+\beta}\int\limits_\eta^{\eta_D}br^2dp$$

$$F_{12}=\frac{2\beta}{1+\beta}\int\limits_0^\eta br^2dp,\qquad E_{12}=-2\left[\int\limits_\eta^{\eta_D}a^{-1}\left(\int\limits_p^{\eta_D}br^2dq\right)dp\right]^{1/2}$$

$$\psi_{12}=\int\limits_\eta^{\eta_D}E_{12}dp$$

Постоянная η_D определяется уравнением

$$2\int\limits_0^{\eta_D}br^2d\eta=-j_2 \tag{3.4}$$

Разложение ионного диффузионного слоя имеет вид

$$z_i=\varepsilon^{1/2}\chi^{-1/2}g_{13}(\eta_{13})+\ldots;\quad z_e=\varepsilon f_{13}(\eta_{13})+\ldots;\quad I_i=\chi^{-1}G_{13}(\eta_{13})+\ldots$$

$$I_e=\varepsilon^{1/2}\chi^{-1/2}F_{13}(\eta_{13})+\ldots;\quad E=\varepsilon^{-1/2}\chi^{-1/2}E_{13}(\eta_{13})+\ldots;\quad \psi=\varepsilon^{-1/2}\chi^{-1/2}\psi_{12w}+\ldots$$

$$\eta_{13}=\eta/(\varepsilon^{1/2}\chi^{1/2})\geq0$$

Для функций g_{13}, f_{13}, G_{13}, F_{13}, E_{13} получаем задачу, аналогичную задаче для функций g_7, f_8, G_7, F_8, E_7 и с аналогичным решением.

Для величины ψ_w в первом приближении получаем выражение

$$\psi_w=-2\varepsilon^{-1/2}\chi^{-1/2}\int\limits_0^{\eta_D}\left[\int\limits_\eta^{\eta_D}a^{-1}\left(\int\limits_p^{\eta_D}br^2dq\right)dp\right]^{1/2}d\eta \tag{3.5}$$

Выражения (3.4) и (3.5) определяют плотность тока на электрод и приэлектродное падение напряжения как функции от толщины дебаевского слоя η_D, поэтому эти выражения можно рассматривать как параметрическое описание вольт-амперной характеристики области возмущения.

Из полученных выше результатов нетрудно видеть, что в данном предельном случае определяющий вклад в формирование потока ионов на электрод вносит дебаевский слой. Заметим, что в случае умеренных токов вклад дебаевского слоя является либо пренебрежимо малым (при $-2a_w\gamma_w<<j_1<2a_w\gamma_w\beta^{-1}$), либо сравнимым (при $j_1<-2a_w\gamma_w$) с вкладом квазинейтральной области.

Выше рассматривался случай, когда параметры ε и χ^2 имеют одинаковый порядок величины. Можно, однако, показать, что и в случаях $\varepsilon\chi^{-2}\to0$, $\varepsilon\chi^{-2}\to\infty$ решения для дебаевского и ионного диффузионного слоев, полученные выше (и в частности формулы (3.4), (3.5)), остаются справедливыми; изменится только решение в переходном слое. Не приводя за неимением места подробных результатов, отметим лишь, что в случае $\varepsilon\chi^{-2}\to0$ для описания переходной зоны необходимо рассматривать три асимптотических разложения, первое и третье из которых связаны с переменной η_{10} и справедливы при $\eta_{10}>0$ и $\eta_{10}<0$ соответственно, а второе связано с переменной $\eta_{14}=(\eta-\eta_D)/(\varepsilon^{1/3}\chi^{-1/6})$ и справедливо при $-\infty<\eta_{14}<\infty$; в случае $\varepsilon\chi^{-2}\to\infty$ переходная зона может быть описана в рамках одного асимптотического разложения, связанного с переменной $\eta_{15}=(\eta-\eta_D)/(\varepsilon^{1/2}\chi^{-1/2})$ и справедливого при $-\infty<\eta_{15}<\infty$.

4. Вольт-амперная характеристика. Полученные в п. 2, 3 формулы для вольт-амперной характеристики можно рассматривать как асимптотические представления функции $\psi_w(j;\ \varepsilon,\ \chi)$ соответственно при $j=O(\chi^{-1/2})$, $j=O(\chi^{-1})$. Важно отметить, что в области перекрытия, т. е. при $j=O(\omega)$ (ω – большой параметр, удовлетворяющий при $\varepsilon\chi^{-2}\to0$, $\varepsilon\chi^{-2}\to k_1$ условиям $\omega/\chi^{-1}\to0$, $\omega/\chi^{-1/2}\to\infty$, а при $\varepsilon\chi^{-2}\to\infty$ – условиям $\omega/\chi^{-1}\to0$, $\omega/(\varepsilon^{1/2}\chi^{-3/2})\to\infty$), эти представления согласуются между собой.

Для нахождения асимптотического представления функции ψ_w в окрестности точки $j=-2a_w\gamma_w\chi^{-1/2}$ в общем случае необходимо отдельное рассмотрение, которое остается за рамками настоящей работы. Отметим лишь следующее. В случае $\varepsilon\chi^{-2}\to k_1$ предел выражения (2.20) при $j\to(-2a_w\gamma_w\chi^{-1/2})-0$ равен пределу выражения (2.16) при $j\to(-2a_w\gamma_w\chi^{-1/2})+0$ (с точностью до второго члена последнего выражения; нетрудно видеть, что в указанном случае этот член является малым). Аналогично к одинаковому пределу стремятся и производные $d\psi_w/dj$. В случае $\varepsilon\chi^{-2}\to\infty$ второй член выражения (2.20) является при умеренных плотностях тока малым, также малым является второй член выражения (2.16), тогда как первые члены этих выражений тождественны. Поэтому можно ожидать, что в случаях $\varepsilon\chi^{-2}\to k_1$, $\varepsilon\chi^{-2}\to\infty$ представления (2.16), (2.20) являются в первом приближении справедливыми вплоть до точки $j=-2a_w\gamma_w\chi^{-1/2}$ включительно.

При $j>-2a_w\gamma_w\chi^{-1/2}$ порядок величины производной $d\psi_w/dj$, характеризующей наклон вольт-амперной характеристики к оси токов, равен $1+\chi^{1/2}\ln(\varepsilon^{-1}\chi)$. При $j<-2a_w\gamma_w\chi^{-1/2}$ порядок этой величины в случае $\varepsilon\chi^{-2}\to0$ существенно больше и равен $\varepsilon^{-1/2}\chi$. В теории электрических зондов такое изменение наклона вольт-амперной характеристики называют ионным насыщением; величина $j=-2a_w\gamma_w\chi^{-1/2}$ соответствует значению плотности ионного тока насыщения, полученному для данных условий из общей формулы [8]. В случаях $\varepsilon\chi^{-2}\to k_1$, $\varepsilon\chi^{-2}\to\infty$ изменения наклона вольт-амперной характеристики в окрестности точки $j=-2a_w\gamma_w\chi^{-1/2}$ не происходит, т. е. насыщение отсутствует. Таким образом, сделанный в [8] на основании асимптотического анализа модели с единственным малым параметром ε вывод о токе насыщения применим и к настоящей модели с двумя малыми параметрами ε, χ при условии, что $\varepsilon\chi^{-2}\to0$.

Насыщение вольт-амперной характеристики связано с тем, что по мере превышения абсолютной величиной плотности тока на электрод значения плотности тока насыщения структура дебаевского слоя меняется и падение напряжения в этом слое начинает быстро увеличиваться. В случаях $\varepsilon\chi^{-2}\to k_1$, $\varepsilon\chi^{-2}\to\infty$ вклад дебаевского слоя в полное падение напряжения в области возмущения не является при умеренных токах доминирующим, и поэтому насыщение отсутствует.

Автор благодарит Г. А. Любимова и Г. А. Тирского за внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cohen I. M.* Asymptotic theory of spherical electrostatic probes in a slightly ionized, collision-dominated gas.— Phys. Fluids, 1963, v. 6, № 10, p. 1492.
2. *Bush W. B., Fendell F. E.* Continuum theory of spherical electrostatic probes (frozen chemistry).— J. Plasma Phys., 1970, v. 4, pt 2, p. 317.
3. *De Boer P. C. T., Ludford G. S. S.* Spherical electric probe in a continuum gas.— Plasma Phys., 1975, v. 17, № 1, p. 29.
4. *Бенилов М. С., Тирский Г. А.* Асимптотическая теория химически неравновесного слоя вблизи идеально каталитической стенки.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 2, с. 281.
5. *Бенилов М. С., Тирский Г. А.* Асимптотическая теория слоя неравновесной ионизации вблизи каталитической стенки в плазме молекулярных газов.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 5, с. 839.
6. *Любимов Г. А., Михайлов В. Н.* К анализу области возмущения плазмы вблизи электрода.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 3, с. 9.
7. *Чекмарев И. Б.* О гидродинамических граничных условиях для слабоионизованного газа около каталитической стенки.— Ж. техн. физ., 1980, т. 50, вып. 1, с. 172.
8. *Бенилов М. С., Тирский Г. А.* О токах насыщения на зонд в плотной плазме.— ПТМФ, 1979, № 6, с. 16.

Москва

Поступила в редакцию
20.V.1980