

УДК 533.6.011.8

ОБ ИСПАРЕНИИ СФЕРИЧЕСКИХ КАПЕЛЬ В БИНАРНОЙ ГАЗОВОЙ СМЕСИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЧИСЛАХ КНУДСЕНА

ИВЧЕНКО И. Н., МУРАДЯН С. М.

При малых числах Кнудсена (диффузионный режим) определяющим механизмом тепло- и массопереноса является диффузия и теплопроводность и процесс испарения описывается континуальными уравнениями. При больших числах Кнудсена (свободномолекулярный режим) скорость испарения определяется путем микроскопического анализа, основанного на свободномолекулярных функциях распределения. Если в указанных предельных случаях процесс испарения исследован достаточно хорошо [1, 2], то для промежуточного режима до сих пор отсутствует удовлетворительный анализ. Это связано с тем, что для промежуточных чисел Кнудсена анализ должен быть основан на решении уравнений Больцмана для бинарной смеси, что представляет существенные математические трудности. В ряде работ [1, 3] были сделаны попытки избежать указанную трудность применением метода сшивания свободномолекулярного и континуального потоков массы. Полученные интерполяционные формулы не могут быть строго обоснованы для произвольных режимов испарения. Анализ различных интерполяционных и эмпирических формул, основанных на использовании методов решения кинетического уравнения в задаче о переносе нейтронов к «черной» сфере, дан в работе [4]. В этой работе указан способ улучшения интерполяционных формул путем использования более строгих выражений для коэффициента диффузии с использованием потенциала Ленарда – Джонса для межмолекулярного взаимодействия.

Анализ, основанный на решении уравнений Больцмана для бинарной смеси, впервые развит в работе [5]. Однако ряд упрощающих предположений (равенство температур компонентов смеси, использование максвелловской модели для потенциала межмолекулярных взаимодействий, задание определенной температуры капли), использованных в этой работе, существенно ограничивают область применимости полученных результатов. В последующих работах исследовано испарение сферических капель в среде собственного пара [6, 7] и в условиях термостатирования их поверхности [8].

В данной работе исследован процесс квазистационарного испарения капель, находящихся в бинарной газовой смеси, при произвольных числах Кнудсена. Анализ основан на решении кинетических уравнений с интегралами столкновений в форме Больцмана методом Лиза [9]. Полученное решение позволяет рассмотреть произвольную модель межмолекулярных взаимодействий. В работе анализировали формулы для времени испарения капель, используя для взаимодействия молекул модель жестких упругих сфер.

1. Постановка задачи и метод решения. Рассмотрим сферическую каплю радиуса R , находящуюся в бинарной газовой смеси испаряющегося и неконденсирующегося на ее поверхности газа и пара вещества капли. На большом расстоянии от капли плотность n_i и температура T_i пара и газа задаются в виде

$$n_1(\infty) = n_{10}(1 + v_0), \quad n_2(\infty) = n_{20}, \quad T_1(\infty) = T_2(\infty) = T_0 \quad (1.1)$$

Здесь $i=1$ соответствует параметрам пара, а $i=2$ — параметрам газа, n_{10} — плотность насыщенного пара при температуре T_0 , $(1+v_0) \cdot 100\%$ — относительная влажность газовой смеси.

При газокинетическом анализе задаются микроскопические граничные условия, т. е. условия на функции распределения компонентов смеси. Эти граничные условия формулируются посредством задания коэффициентов

аккомодации, определяемых следующими формулами:

$$\alpha_m = \frac{N_1^+ - |N_1^-|}{N_{is}^+ - |N_1^-|}, \quad \alpha_{ir} = \frac{Q_i^+ - |Q_i^-|}{Q_{is}^+ - |Q_i^-|}, \quad N_2^+ = |N_2^-| \quad (i=1, 2) \quad (1.2)$$

Здесь α_m — коэффициент испарения, α_{ir} — коэффициенты аккомодации энергии пара и газа, N_i^+ , Q_i^+ , N_i^- , Q_i^- — потоки числа молекул и энергии компонентов смеси, летящих от капли и падающих на нее, N_{is}^+ , Q_{is}^+ — соответствующие величины при условии, что молекулы отражались бы с поверхности капли, находясь с ней в термодинамическом равновесии, т. е. с температурой капли и с плотностью насыщенного пара.

Кроме условий (1.2) необходимо использовать условие баланса энергии, которое выражает равенство потока тепла, падающего на каплю, теплоте фазового перехода. Это условие имеет вид

$$(Q_1^+ + Q_1^-) + (Q_2^+ + Q_2^-) = -q(N_1^+ + N_2^-) \quad (1.3)$$

Здесь $q = q(T_0)$ — теплота испарения, отнесенная к одной молекуле.

Плотность насыщенного пара вблизи поверхности капли определяется из уравнения Клайперона — Клаузиуса, которое приводит к следующему выражению:

$$n_s(T_s) = n_{s0} [1 + (q/kT_0 - 1)\tau_s], \quad T_s = T_0(1 + \tau_s) \quad (1.4)$$

Здесь T_s — температура поверхности капли.

В (1.4) пренебрегалось влиянием кривизны капель и поверхностного натяжения жидкости на плотность насыщенного пара. Это допущение справедливо при $R_0 \gg 2\sigma V/kT_s$, где σ — коэффициент поверхностного натяжения, V — объем, приходящийся на одну молекулу жидкости. Так, для капель воды при температуре порядка 300 К это допущение справедливо при $R_0 \geq 10^{-6}$ см.

Для нахождения скорости изменения радиуса капли необходимо с помощью функции распределения пара вычислить поток числа молекул пара на каплю. Будем считать, что скорость изменения радиуса капли мала по сравнению с тепловыми скоростями молекул. В этих условиях процесс испарения можно считать квазистационарным. Уравнения Больцмана для функций распределения в сферических координатах имеют вид

$$\begin{aligned} v_{ir} \frac{\partial f_i}{\partial r} + \frac{v_{i\vartheta}^2 + v_{i\theta}^2}{r} \frac{\partial f_i}{\partial v_{ir}} - \left(\frac{v_{i\vartheta} v_{i\theta}}{r} \operatorname{ctg} \theta + \right. \\ \left. + \frac{v_{ir} v_{i\vartheta}}{r} \right) \frac{\partial f_i}{\partial v_{i\vartheta}} + \left(\frac{v_{i\vartheta}^2}{r} \operatorname{ctg} \theta - \frac{v_{ir} v_{i\theta}}{r} \right) \frac{\partial f_i}{\partial v_{i\theta}} = J_{ii} + J_{ij} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$(i, j=1, 2; \quad i \neq j)$$

Здесь J_{ii} и J_{ij} — интегралы столкновений для молекул одного сорта и разных сортов. В дальнейшем будем предполагать, что $n_{20} \gg n_{10}$. При этом предположении в уравнениях Больцмана можно пренебречь J_{11} , J_{21} .

Из уравнений (1.5) можно получить систему моментных уравнений для макроскопических величин. Умножая (1.5) на m_i , $m_i v_{ir}$, $1/2 m_i v_i^2$, $1/2 m_i v_i^2 v_{ir}$, где m_i — масса молекул компонентов смеси, и интегрируя по всему пространству скоростей, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 n_i u_{ir}) = 0 \\ m_i n_i u_{ir} \frac{du_{ir}}{dr} + \frac{d}{dr} P_{irr} + \frac{1}{r} (2P_{irr} - P_{i\theta\theta} - P_{i\varphi\varphi}) = (\Delta m_i v_{ir})_{ij} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \left(Q_{ir} + \frac{3}{2} p_i u_{ir} + u_{ir} P_{irr} - \frac{1}{2} m_i n_i u_{ir}^3 \right) \right] &= \left(\Delta \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)_{ij} \\
 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \int r^2 \frac{m_i v_i^2}{2} v_{ir}^2 f_i dv_i - \frac{1}{r} \int \frac{m_i v_i^2}{2} (v_{i0}^2 + v_{i\varphi}^2) f_i dv_i &= \\
 = \left(\Delta \frac{1}{2} m_i v_i^2 v_{ir} \right)_{ii} + \left(\Delta \frac{1}{2} m_i v_i^2 v_{ir} \right)_{ij} \\
 (\Delta q_i)_{ii} \equiv \int q_i J_{ii} dv_i, \quad (\Delta q_i)_{ij} \equiv \int q_i J_{ij} dv_i
 \end{aligned}
 \tag{1.6}$$

В системе уравнений (1.6) неизвестных функций больше числа уравнений. В принципе уравнения Больцмана эквивалентны лишь бесконечной системе моментных уравнений. Однако, как правило, рассматривается конечная система моментных уравнений, а замыкание системы производится за счет специального выбора функций распределения. Для того чтобы функции распределения отражали характерные черты свободномолекулярного и континуального режимов, будем искать их в виде разрывных в пространстве скоростей линейризованных локально-максвелловских функций [10]. В каждой точке пространства существует свой конус влияния, ограниченный конической поверхностью с вершиной в данной точке и касающейся поверхности капли. В любой точке необходимо различать две группы молекул: молекулы, траектории которых начинаются на поверхности капли и лежат внутри конуса влияния для данной точки (область 2 в пространстве скоростей v_i), и все остальные молекулы (область 1). Функции распределения в этих областях будем искать в виде

$$\begin{aligned}
 f_{ij} &= f_i^{(0)} [1 + v_{ij}(r) + (c_i^2 - 3/2) \tau_{ij}(r)] \\
 f_i^{(0)} &= n_{i0} (m_i/2\pi kT_0)^{3/2} \exp(-c_i^2), \quad c_i = (m_i/2kT_0)^{1/2} v_i
 \end{aligned}
 \tag{1.7}$$

Здесь первый индекс относится к различным компонентам бинарной смеси, второй — к различным областям в пространстве скоростей, v_{ij} , τ_{ij} — восемь неизвестных функций, зависящих только от радиальной координаты.

Такой выбор функций распределения позволяет замкнуть систему (1.6), поскольку все моменты, входящие в эту систему, можно выразить через восемь неизвестных функций. Аналитическое решение задачи получено путем линеаризации системы (1.6). Предполагается, что выполнены условия $v_{ij} \ll 1$, $\tau_{ij} \ll 1$, которые будут иметь место в случае слабого испарения ($v_0 \ll 1$).

2. Вычисление моментов от интегралов столкновений. Правые части (1.6) содержат моменты от интегралов столкновений. При вычислении моментов будем использовать интегралы столкновений в форме Больцмана. Это позволяет не только в строгой форме учесть влияние столкновений молекул на изменение функций распределения, но и проанализировать зависимость процесса испарения от модели межмолекулярного взаимодействия.

При вычислении моментов от интеграла столкновений используем функции распределения, разложенные в ряд по полиномам Сонина в пространстве скоростей, в виде

$$f_i = f_i^{(0)} [1 + v_i(r) + (c_i^2 - 3/2) \tau(r) + 2c_{ir} G_{ir}(r) + A_i(r) c_{ir} S_{ir}^{(1)}(c_i^2)] \tag{2.1}$$

Здесь $v_i(r)$ — поправка к плотности i -го компонента, $G_{ir}(r)$ — радиальная составляющая безразмерной скорости i -го компонента, $\tau(r)$ — поправка к температуре смеси.

Коэффициенты $A_i(r)$ выбираем таким образом, чтобы поток тепла от (2.1) совпадал с потоком, вычисленным от функции распределения. Это условие приводит к соотношению

$$Q_{ir}^* = \frac{1}{n_{i0}} \int c_{ir} c_i^2 f_i dv_i = -\frac{5}{4} A_i(r) + \frac{5}{2} G_{ir}(r) \quad (2.2)$$

Здесь Q_{ir}^* — радиальная составляющая безразмерного потока тепла.

Используя (2.1), все моменты от интегралов столкновений можно выразить через стандартные скобочные интегралы, таблицы которых приведены в [11]. Моменты от интегралов столкновений даются следующими формулами:

$$(\Delta m_i v_{ir})_{12} = -^{16}/_3 m_1 n_{10} n_{20} M_2 (2kT_0/m_1)^{1/2} \Omega_{12}^{(4)}(1) G_1(r) \quad (2.3)$$

$$(\Delta m_2 v_{2r})_{21} = - (m_2/m_1)^{1/2} (\Delta m_1 v_{1r})_{12} \quad (2.4)$$

$$(\Delta^{1/2} m_1 v_1^2)_{12} = (\Delta^{1/2} m_2 v_2^2)_{21} = 0 \quad (2.5)$$

$$(\Delta^{1/2} m_1 v_1^2 v_{1r})_{12} = -^{1/2} m_1 n_{10} n_{20} (2kT_0/m_1)^{1/2} \{2G_1(r) [^{5/2} c_{1r} - \quad (2.6)$$

$$-S_{1/2}^{(4)}(c_1^2) c_{1r}], c_{1r}\} + A_1(r) [^{5/2} c_{1r} - S_{1/2}^{(4)}(c_1^2) c_{1r}], c_{1r} S_{1/2}^{(4)}(c_1^2)]_{12} +$$

$$+ A_2(r) [^{5/2} c_{1r} - S_{1/2}^{(4)}(c_1^2) c_{1r}], c_{2r} S_{1/2}^{(4)}(c_2^2)]_{12}$$

$$(\Delta^{1/2} m_2 v_2^2 v_{2r})_{22} = -^{8/15} m_2 n_{20}^2 (2kT_0/m_2)^{1/2} \Omega_2^2(2) Q_{2r}^* \quad (2.7)$$

Здесь использованы стандартные обозначения из [11]. Интегралы $\Omega_{12}^{(l)}(r)$ содержат зависимость от потенциала межмолекулярного взаимодействия.

3. Аналитические результаты для молекул, взаимодействующих как жесткие упругие сферы. Выражая все моменты от функции распределения через восемь неизвестных функций v_{ij} , τ_{ij} и подставляя эти выражения в систему (1.6), получим линейную неоднородную систему. Решение этой системы дает следующую формулу для потока числа молекул пара через поверхность частицы:

$$N_i = N_i^* \frac{1 + \beta_1 R}{1 + \gamma_1 R + \gamma_2 R^2}, \quad N_i^* = -\alpha_m n_{i0} v_0 R^2 \left(\frac{8\pi kT_0}{m_1} \right)^{1/2} \xi \quad (3.1)$$

$$\xi = 2(\alpha_{1T} + \alpha_{2T}\mu) \delta^{-1}, \quad \delta = \alpha_m \xi^2 + 2\alpha_{1T}\xi + 2\alpha_{2T}\mu$$

$$\xi = q/kT_0, \quad \mu = (n_{20}/n_{10}) (m_1/m_2)^{1/2}, \quad (\mu \gg 1, \xi \gg 1)$$

$$\beta_1 = -\alpha_{1T}\alpha_{2T}\mu a_2 [2(\alpha_{1T} + \alpha_{2T}\mu)]^{-1}$$

$$\gamma_1 = (2\delta)^{-1} [\alpha_m \alpha_{2T} (3\mu a_1 + \mu a_3 - \xi^2 a_4) - \alpha_{1T}\alpha_{2T} (\mu a_2 + 2\xi a_4) - \alpha_m \alpha_{1T} \xi^2 a_2]$$

$$\gamma_2 = (4\delta)^{-1} \alpha_m \alpha_{1T}\alpha_{2T} [a_2 (\xi^2 a_4 - 2a_1\mu)]$$

Здесь N_i^* — поток пара в свободномолекулярном режиме, величины a_i выражаются через моменты от интегралов столкновений.

В частном случае для молекул, взаимодействующих как жесткие упругие сферы, эти величины имеют вид

$$a_1 = (2kT_0/m_1)^{1/2} (\sqrt{\pi} D_{12})^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 a_2 &= -(2kT_0/m_1)^{1/2} (\sqrt{\pi} D_{12})^{-1} [0,4M_2 + 1,04M_2^2 + \\
 &+ 2,4M_1^2 + 1,28M_1M_2], \quad M_i = m_i(m_1 + m_2)^{-1}; \quad i=1, 2 \\
 a_3 &= -(2kT_0/m_1)^{1/2} (\sqrt{\pi} D_{12})^{-1} [1 - 0,3M_2 - 3M_1^2 - 1,3M_2^2 - \\
 &- 1,6M_1M_2], \quad a_4 = -(2kT_0/m_2)^{1/2} (2kn_{20}/\sqrt{\pi}\kappa_2)
 \end{aligned}$$

Здесь D_{12} — коэффициент диффузии, κ_2 — коэффициент теплопроводности газа.

Скорость изменения радиуса капли может быть найдена из уравнения (ρ — плотность вещества капли)

$$dR/dt = -m_1 N_1 / 4\pi R^2 \rho \quad (3.2)$$

Подставив в (3.2) выражение (3.1) для потока числа молекул пара и проведя интегрирование, будем иметь

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{2\sqrt{\pi} \rho}{\sqrt{2kT_0 m_1 n_{10} v_0 \alpha_m \xi}} \left[\frac{\gamma_1 \beta_1 - \gamma_2}{\beta_1^2} (R - R_0) + \right. \\
 &+ \left. \frac{\beta_1^2 - \gamma_1 \beta_1 + \gamma_2}{\beta_1^3} \ln \frac{\beta_1 R + 1}{\beta_1 R_0 + 1} + \frac{\gamma_2}{2\beta_1} (R^2 - R_0^2) \right] \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

Здесь R_0 — начальный радиус капли.

Полученная формула определяет зависимость радиуса капли от времени при произвольных режимах испарения (по числам Кнудсена). В свободномолекулярном и континуальном режимах она точно переходит в соответствующие предельные формулы.

4. Анализ полученной формулы для случая испарения капель воды в воздухе. Исследуем с помощью формулы (3.3) процесс испарения капель воды в воздухе при следующих условиях: $v_0 = -0,2$, $T_0 = 293$ К и парциальном давлении воздуха $p_{20} = 10^5$ Па. Предполагая, что $\alpha_{1T} = \alpha_{2T} = \alpha_T$, будем иметь следующие выражения для величин, входящих в (3.3):

$$\begin{aligned}
 \xi &= 68,4\alpha_T \delta^{-1}, \quad \delta = 101,80\alpha_T + 278,89\alpha_m \\
 \beta_1 &= 0,864 \cdot 10^5 \alpha_T, \quad \gamma_1 = (3,895\alpha_m \alpha_T + 0,405\alpha_T^2) \cdot 10^7 \delta^{-1} \\
 \gamma_2 &= 1,186 \cdot 10^{12} \alpha_m \alpha_T^2 \delta^{-1}, \quad [\beta_1] = [\gamma_1] = \text{см}^{-1}, \quad [\gamma_2] = \text{см}^{-2}
 \end{aligned}$$

Время полного испарения капли, имеющей начальный радиус R_0 ($[R_0] = \text{см}$, $[t] = \text{с}$), дается следующим выражением:

$$t = \frac{19,72}{\alpha_m \xi} \left[\frac{\gamma_1 \beta_1 - \gamma_2}{\beta_1^2} R_0 + \frac{\beta_1^2 - \gamma_1 \beta_1 + \gamma_2}{\beta_1^3} \ln(1 + \beta_1 R_0) + \frac{\gamma_2}{2\beta_1} R_0^2 \right] \quad (4.1)$$

На фиг. 1 (кривая 1) изображена зависимость времени испарения капель от коэффициента испарения. При изменении коэффициента испарения α_m от 1 до 0,1 время испарения увеличивается в 1,5 раза.

Зависимость времени испарения от коэффициента α_T оказывается более существенной. Из фиг. 1 (кривая 2) видно, что при изменении коэффициента аккомодации энергии от 1 до 0,1 время испарения увеличивается в 3,5 раза.

Заметим, что в формуле для времени испарения капель в диффузионном режиме вообще отсутствует зависимость от коэффициентов α_m и α_T .

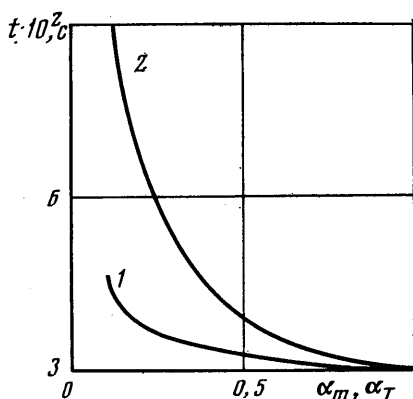
Время полного испарения капли в диффузионном режиме дается формулой

$$t = \frac{(1 + D_{12} k n_{10} \xi^2 / \kappa_2) \rho}{2 m_1 n_{10} v_0 D_{12}} R_0^2 \quad (4.2)$$

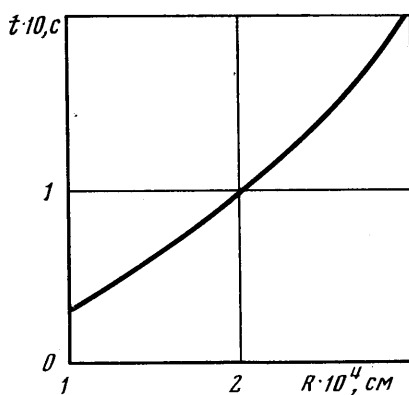
В условиях испарения, рассмотренных выше, эта формула имеет вид

$$t = 1,98 \cdot 10^6 R_0^2 \quad (4.3)$$

На фиг. 2 приведена зависимость времени испарения от R_0 ($\alpha_m = \alpha_T = 1$). Так, при $R_0 = 10^{-4}$ см $t_1 = 2,98 \cdot 10^{-2}$ с, при $R_0 = 3 \cdot 10^{-4}$ см $t_2 = 2,08 \cdot 10^{-1}$ с.



Фиг. 1



Фиг. 2

По формуле (4.3) $t_1 = 1,98 \cdot 10^{-2}$ с, $t_2 = 1,78 \cdot 10^{-1}$ с. Время испарения, вычисленное по (4.1), превышает время, вычисленное по (4.3), на 50% в первом и на 17% во втором случае. Таким образом, даже в случаях, когда в начальный момент определяющим механизмом тепло- и массопереноса является теплопроводность и диффузия, по мере уменьшения радиуса капли влияние молекулярных механизмов переноса становится существенным. В тех случаях, когда в начальный момент времени числа Кнудсена порядка единицы, результаты, полученные в формуле (4.1), существенно отличны от результатов, полученных по предельным формулам. Полученная формула позволяет не только корректно описывать процесс испарения при произвольных числах Кнудсена, но и позволяет установить пределы применимости предельных формул.

5. Область применимости теории. Развитый анализ соответствует предположению об изотермичности капли. Это накладывает определенные ограничения на начальный размер капель, параметры среды и жидкости капля. Изотермичность капли будет иметь место, если время выравнивания температуры капли значительно меньше времени испарения. Время релаксации температуры капли имеет порядок R_0^2 / χ , где χ — теплопроводность капли. Для крупных капель, начальный радиус которых больше длины свободного пробега газовых молекул, время испарения, как следует из формулы (4.2), будет порядка $\rho R_0^2 / \rho_1 v_0 D_{12}$. В этом случае указанное приближение применимо, если $\rho \chi / \rho_1 v_0 D_{12} \gg 1$.

Для мелких капель, радиус которых не превосходит длины свободного пробега, время испарения по порядку величины дается формулой

$$t \sim \rho R_0 / v_0 \rho_1 v^*, \quad v^* = (2kT_0 / m_1)^{1/2}$$

Для таких капель развитая теория применима при выполнении условия $R_0 \ll \rho \chi / v_0 \rho_1 v^*$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фукс Н. А. Испарение и рост капель в газообразной среде. М.: Изд-во АН СССР, 1958. 91с.
2. Monaco R. Time-evolution of spherical droplets in vapour environment: a physical-mathematical model.— Int. J. Heat and Mass Transfer., 1979, v. 22, № 6, p. 805–812.
3. Кань Сангук. Исследование роста конденсированных частиц в разреженных и континуальных средах.— Ракетная техника и космонавтика, 1967, т. 5, № 7, с. 91–99.
4. Davis E., Ray A. Submicron droplet evaporation in the continuum and non-continuum regimes.— J. Aerosol Sci., 1978, v. 9, № 5, p. 411–422.
5. Shankar P. N. A kinetic theory of steady condensation.— J. Fluid Mech., 1970, v. 40, № 2, p. 385–400.
6. Ивченко И. Н., Яламов Ю. И. Об испарении и конденсации сферических капель при произвольных числах Кнудсена.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 3, с. 164–166.
7. Жук В. И. Кинетика испарения сферической капли.— В кн.: Численные методы в динамике разреж. газов. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1979, № 4, с. 69–90.
8. Ивченко И. Н. Об испарении сферических капель в условиях термостатирования их поверхности.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 5, с. 184–185.
9. Lees L. Kinetic theory description of rarefied gas flow.— J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1965, v. 13, № 1, p. 278–311.
10. Ивченко И. Н. Приближенные методы решения граничных задач для уравнения Больцмана. М., Моск. эконом.-стат. ин-т, 1979. 84 с.
11. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 510 с.

Ереван

Поступила в редакцию
15.VII.1980