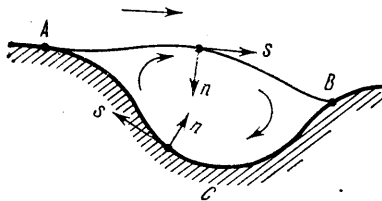


УДК 532.516.5

**О ПРИБЛИЖЕННОМ СПОСОБЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАВИХРЕННОСТИ
В ЗОНЕ ОТРЫВА ПРИ ВЯЗКОСТИ, СТРЕМЯЩЕЙСЯ К НУЛЮ**
ЧЕРНЫШЕНКО С. И.

По теореме Прандтля — Бэтчелора в ламинарном течении с исчезающе малой вязкостью завихренность в отрывной зоне постоянна. Бэтчелор предложил определять завихренность из сращивания невязкого течения и пограничного слоя на границе отрывной зоны. Построен приближенный метод, на основе которого при ряде упрощающих предположений рассмотрено течение с отрывной зоной в прямоугольной впадине.

1. Пусть ламинарный поток вязкой жидкости отрывается от криволинейной стенки в некоторой точке *A* (фиг. 1) и присоединяется в точке *B*. Если при $Re \rightarrow \infty$ отрывная зона не дробится и сохраняет конечные размеры, то в пределе завихренность в зоне отрыва $\omega = \text{const}$ [1]. Существование решения задачи о соответствующем течении невязкой жидкости с единственной зоной отрыва, зависящего ровно от двух произвольных параметров:



Фиг. 1

ω и скачка постоянной Бернулли на разделяющей линии тока Δ , не доказано строго, но давно принято в качестве рабочей гипотезы. Она подтверждена качественными рассуждениями, приближенными и численными решениями [2], а также результатами [3, 4]. Согласно программе Бэтчелора [1, 2], постоянные Δ и ω следует определить при сращивании невязкого течения с течением в пограничном слое на границе отрывной зоны.

Схема течения в погранслое изложена в [5]. Для определения ω и Δ в [3] предложено использовать сращивание с погранслоем в двух приближениях. Но из результатов [2, 3] следует, что при отрыве с угловой кромки одна из констант может быть определена с помощью условия Жуковского — Чаплыгина, задающего положение точки отрыва. Поэтому одно из условий для определения ω и Δ при отрыве с гладкой поверхности должно переходить в условие Жуковского, когда гладкая стенка, непрерывно деформируясь, превращается в стенку с угловой кромкой. Наличие такого свойства и условия, получаемого сращиванием с замкнутым погранслоем в каком бы то ни было приближении, не очевидно. Поэтому ниже рассмотрен пограничный слой только в первом приближении. Это позволяет определить лишь одну константу. При отрыве от гладкой поверхности вторую константу можно определить из условия Бриллюэна — Вилля [6].

Введем координаты в пограничном слое, как указано на фиг. 1. В переменных Мизеса уравнения и граничные условия течения в циклическом пограничном слое примут вид [7]

$$\frac{\partial g}{\partial s} = u \frac{\partial^2 g}{\partial \psi^2} \tag{1.1}$$

$$s=0, \quad \psi \leq 0, \quad g(0, \psi) = H(\psi); \quad \psi > 0, \quad g(0, \psi) = g(s_A, \psi) \quad (1.2)$$

$$s_B < s < s_A, \quad \psi = 0, \quad g(s, 0) = U^2(s)$$

Здесь $g = U^2 - u^2$, u — скорость вдоль оси s в пограничном слое, $U(s)$ — скорость в невязком течении на границе зоны отрыва. На AB взято значение скорости, получающееся при подходе к разрыву из отрывной зоны, а ψ — функция тока. Область определения $g(s, \psi)$ есть $\Omega_1 \cup \Omega_2$:

$$\Omega_1 = \{s, \psi: 0 \leq s \leq s_B, -\infty < \psi < +\infty\}, \quad \Omega_2 = \{s, \psi: s_B \leq s \leq s_A, 0 \leq \psi < +\infty\}$$

Точки $\psi = 0, s = 0$ и $s = s_A$ соответствуют точке A на фиг. 1, а точка $\psi = 0, s = s_B$ — точке B . Функция $H(\psi)$ определяется профилем скорости в пабегающем пограничном слое. Второе условие в (1.2) есть условие периодичности замкнутой части погранслоя, а третье есть условие прилипания.

Предположим, что решение задачи (1.1), (1.2) единственно в классе ограниченных функций. Попытка доказать единственность решения (1.1), (1.2) предпринята в [7], но, к сожалению, доказательство в [7] неверно. Ошибка содержится на последней странице доказательства, где неявно утверждается, что ядро полученного там интегрального уравнения ограничено в $L_2([0, \infty) \times [0, \infty))$, в то время как проверена ограниченность в $L_2(\sigma_1 \cup \sigma_2)$, что не одно и то же. Тем не менее аналогия с уравнением теплопроводности для ограниченных функций подтверждает сделанное предположение [7]. Если решение задачи (1.1), (1.2) единственно, то $g_\infty = \lim_{\psi \rightarrow \infty} g$ однозначно определяется заданием $U^2(s), H(\psi), s_A, s_B$, так что можно написать $g_\infty = g_\infty[U^2, H, s_A, s_B]$. Сращивание с внешним невязким течением дает $g_\infty = 0$. Поэтому искомое условие состоит в равенстве нулю функционала

$$g_\infty[U^2(s), H(\psi), s_A, s_B] = 0 \quad (1.3)$$

2. Заменяем в (1.1) u на некоторое среднее значение $U_*(s)$, в качестве которого можно взять, например, $U(s)$. Полученное в [8] подобным способом значение коэффициента трения для плоской пластинки отличается от точного менее чем на 5%. Такую замену можно рассматривать как первый шаг в методе последовательных приближений. Введем новые переменные τ, p :

$$\tau = \frac{t}{t_A}, \quad t = \int_0^s U_*(s) ds, \quad p = 2\sqrt{t_A \psi}, \quad t_A(s_A)$$

Тогда уравнения (1.1) и граничные условия (1.2) примут вид

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 g}{\partial p^2} \quad (2.1)$$

$$g(0, p) = h(p) = H\left(\frac{p}{2\sqrt{t_A}}\right), \quad p \leq 0; \quad g(0, p) = g(1, p), \quad p > 0 \quad (2.2)$$

$$g(\tau, 0) = V^2(\tau) = U^2(s), \quad b < \tau < 1, \quad b = t_B/t_A$$

Обозначим $g(0, p) = y(p)$, $g(b, p) = z(p)$. Используя фундаментальное решение уравнения теплопроводности [9], можно выразить $z(p)$ через $y(p)$ и $h(p)$, а используя функцию Грина для полубесконечного промежутка [9], можно выразить $g(1, p)$ через $z(p)$ и $V^2(\tau)$. Из (2.2) следует, что $y(p) = g(1, p)$. Изменив порядок интегрирования в повторном интегра-

ле, придем к интегральному уравнению

$$y(p) = \int_0^{\infty} R(p, \xi) y(\xi) d\xi + f(p) \quad (2.3)$$

$$R(p, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[e^{-(p-\xi)^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{-bp - (1-b)\xi}{\sqrt{b(1-b)}} \right) - \right.$$

$$\left. - e^{-(p+\xi)^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{bp - (1-b)\xi}{\sqrt{b(1-b)}} \right) \right], \quad \operatorname{erfc}(t) = \int_t^{\infty} \frac{2e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} dx$$

$$f(p) = \int_{-\infty}^0 R(p, \xi) h(\xi) d\xi + \int_b^1 \frac{pV^2(\tau)}{\sqrt{\pi}(1-\tau)^{3/2}} \exp \left(\frac{-p^2}{1-\tau} \right) V^2(\tau) d\tau$$

Рассмотрим решение $G(p)$ интегрального уравнения с транспонированным ядром

$$G(p) = \int_0^{\infty} R(\xi, p) G(\xi) d\xi \quad (2.4)$$

такое, что $G(p) \sim p$ при $p \rightarrow +\infty$. Доказать существование такого решения не удалось. Если решений несколько, можно взять любое из них. Некоторым обоснованием существования решения является тот факт, что его удалось получить численно, причем результаты расчета не приводят к противоречиям. Пусть $y(p) = y_{\infty} + y_1(p)$, $y_{\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} y(p)$, $R(p, \xi) = R_{\infty}(p, \xi) + R_1(p, \xi)$, $R_1 \rightarrow 0$, $p, \xi \rightarrow \infty$, $R_{\infty}(p, \xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(p-\xi)^2}$.

Подставив $f(p)$ из (2.3) и $G(p)$ из (2.4), получим

$$J = \int_0^{\infty} G(p) f(p) dp = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} [y(p) G(\xi) R(\xi, p) - y(\xi) G(p) R(p, \xi)] d\xi dp$$

Если бы каждый член разности можно было проинтегрировать отдельно, то двойные интегралы оказались бы равны и взаимно уничтожились. Но эти интегралы расходятся. Представим R в виде суммы R_{∞} и R_1 . Интегралы от членов с R_1 сходятся и, следовательно, взаимно уничтожаются. Выделив аналогично y_{∞} из y , получим

$$J = y_{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} [G(\xi) - G(p)] R_{\infty}(p, \xi) d\xi dp = \text{const } y$$

Соответствующие интегралы сходятся, а значит, взаимно уничтожаются, так как $y_1(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$ экспоненциально. Это легко доказать, заметив, что $y(p) = g(0, p)$, а $g(\tau, p)$ ведет себя как решение задачи на полупрямой без начальных данных для уравнения теплопроводности [9]. Если предположить, что функция $G_1(p) = \lim_{x \rightarrow \infty} G_1(x)$ интегрируема на $[0, \infty)$, то прием выделения главной части можно повторить еще раз. Тогда получим $\text{const} = 0,25$. Это предположение подтверждается численными расчетами.

Таким образом

$$y_{\infty} = 4 \int_0^{\infty} G(p) f(p) dp \quad (2.5)$$

Так как $y_{\infty} = g_{\infty}$, функционал (1.3) равен приближенно

$$g_{\infty} = 4 \int_0^{\infty} G(p) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} R(p, \xi) h(\xi) d\xi + \int_b^1 \frac{pV^2(\tau)}{\sqrt{\pi}(1-\tau)^{3/2}} \exp\left(\frac{-p^2}{1-\tau}\right) d\tau \right\} dp \quad (2.6)$$

Если допустить возможность перемены порядка интегрирования, то (2.6) можно упростить:

$$g_{\infty} = 4 \int_{-\infty}^0 D(\xi) h(\xi) d\xi + 4 \int_b^1 E(\tau) V^2(\tau) d\tau \quad (2.7)$$

Таблица 1

b	$p=0$	-0.1	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	-1.0	-1.5	-2.0
0.1	9,00	4,84	2,29	0,94	0,33	0,10	10^{-5}	10^{-11}	10^{-14}
0.2	12,94	8,46	5,19	2,98	1,59	0,79	0,01	10^{-5}	10^{-10}
0.3	16,19	11,50	7,84	5,11	3,19	1,89	0,06	10^{-4}	10^{-7}
0.5	22,17	17,10	12,88	9,45	6,75	4,69	0,48	0,02	10^{-4}
0.7	28,57	23,08	18,32	14,28	10,93	8,19	1,41	0,14	0,01
0.9	37,44	31,30	25,83	21,01	16,84	13,30	3,20	0,50	0,05

Таблица 2

b	$x=0$	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.96
0.1	0,252	0,253	0,254	0,255	0,260	0,272	0,309
0.3	0,264	0,267	0,271	0,279	0,301	0,340	0,433
0.5	0,288	0,294	0,304	0,329	0,370	0,443	0,616
0.7	0,340	0,353	0,374	0,411	0,500	0,636	0,955
0.8	0,394	0,415	0,477	0,502	0,631	0,841	1,204
0.9	0,521	0,588	0,614	0,710	0,953	1,296	-

Уравнение (2.4) решено численно методом последовательных приближений. Уравнение (2.5) позволяет косвенно проверить правильность расчета. Взяв произвольную функцию $y(p) \rightarrow \text{const}$ при $p \rightarrow \infty$, определим соответствующую функцию $f(p)$ из уравнения (2.3). Рассчитанное по (2.5) значение y_{∞} должно совпасть со значением $y(p)$ на бесконечности. В численных расчетах расхождение не превышало 1%. Значения функций $D(p) \cdot 10^2$ $E(\tau(x)) \cdot 10^2$ для различных b даны в табл. 1, 2 соответственно, где $x = (\tau - b) / (1 - b)$.

3. Рассмотрим в качестве модельной задачи течение около прямоугольной впадины в плоской стенке. Пусть глубина впадины равна 1, длина — a , пограничный слой на стенке начинается на расстоянии l от впадины, как это показано на фиг. 2. Пренебрежем влиянием вторичных отрывных зон, образующихся в нижних углах впадины в реальных течениях. Если бы завихренность в зоне отрыва была равна нулю, то давление вдоль AB было бы постоянным, а линия AB прямой. Следует ожидать, что по крайней мере при достаточно больших l завихренность будет мала. Поэтому

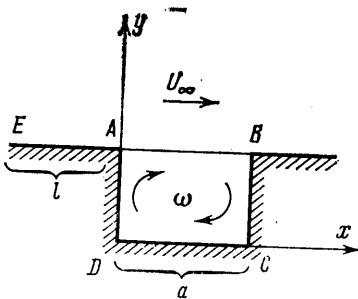
предположим, что отклонением линии AB от прямой можно пренебречь. Тогда задача о течении внутри впадины сведется к решению уравнения Пуассона для функции тока в прямоугольнике $\Delta\psi = -\omega$, которое легко находится

$$\psi = -\omega \left\{ \frac{1}{2} \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 \operatorname{ch}[\pi(2k-1)(x-a/2)]}{\pi^3(2k-1)^3 \operatorname{ch}[\pi(k-1/2)a]} \sin[\pi(2k-1)y] \right\}$$

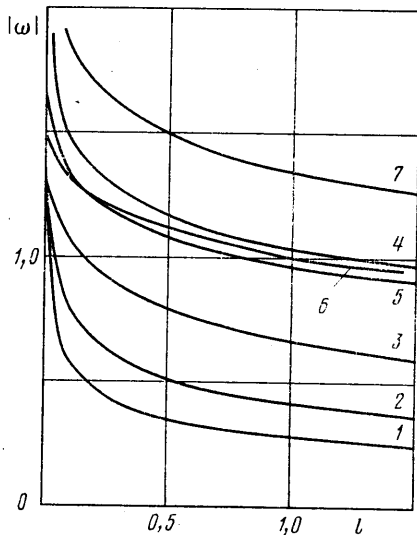
По функции тока легко вычислить $V(\tau)$, входящее в (2.7). Для вычисления $H(\psi)$ необходимо рассчитать пограничный слой на участке EA . В принятых предположениях это просто погранслоем на плоской пластине. Для определения $H(\psi)$ при численных расчетах профиль скорости в точке A аппроксимировался функцией

$$u(n) = U_{\infty} \sin \left(\frac{\pi n}{2\delta} \right), \quad n < \delta; \quad u(n) = U_{\infty}, \quad n \geq \delta; \quad \delta = \sqrt{\frac{2\pi^2 l}{4-\pi}}$$

применяющейся при расчетах пограничного слоя интегральными методами [10]. Здесь n — поперечная координата в погранслое. Предполагалось, что скорость течения на бесконечности $U_{\infty} = 1$. Функция $U^2(s)$ зависит от ω , так что и $g_{\infty}[U^2(s)]$ есть функция ω . Решив численно уравнение $g_{\infty}(\omega) = 0$, можно определить ω . Результаты расчетов с применением формулы (2.7) при различном выборе $U_*(s)$ приведены на фиг. 3. На фиг. 3 кривые 1–3 получены при $U_* = U(s)$ на AB , 4–6 — при



Фиг. 2



Фиг. 3

$U_* = 0,5(U_{\infty} + U(s))$ на AB , 7 — при $U_* = U_{\infty}$ на AB . Кривые 1, 4 и 7 отвечают $a = 0,5$, 2 и 5 — $a = 1,0$, 3 и 6 — $a = 3,0$. Как видно, результаты расчета сильно разнятся при разных U_* . Наиболее естественно выбрать U_* , как при расчете кривых 4–6. Качественное поведение решения при всех рассмотренных выборах $U_*(s)$ одинаково. Убывание $|\omega|$ при увеличении l объясняется возрастанием толщины набегающего пограничного слоя в точке A . Расчет показывает, что скорость движения жидкости внутри отрывной зоны возрастает при увеличении a . Это объясняется увеличением относительной доли длины замкнутого погранслоя, на которой происходит ускорение жидкости. Отметим, что разница между различными способами выбора $U_*(s)$ больше, чем разброс кривых на фиг. 3.

Заметим, что при l порядка 1 завихренность, а следовательно, и скорость во впадине оказываются весьма малыми. Это может объяснить наблюдающееся в экспериментах приблизительное постоянство давления в отрывной зоне и до некоторой степени оправдать предположение о прямолинейности AB .

4. Можно надеяться, что использование приближенных формул (2.7) и (2.6) для оценочных расчетов не вызовет затруднений. Однако вопрос об оптимальном выборе выражения для $U_*(s)$ остается открытым. Отметим еще, что функционал (2.7) определен на более широком классе функ-

ций $V(\tau)$, чем функционал (1.3). В самом деле, точное значение функционала (1.3) можно вычислить, решив точное уравнение пограничного слоя (1.1) вместо приближенного (2.1). Но угловые точки впадины являются точками торможения невязкого потока. Вблизи этих точек на пограничный слой действует большой обратный градиент давления, что приводит к отрыву слоя. Без учета этого отрыва продолжить решение за угловую точку невозможно. Поэтому применение (2.7) проще, чем (1.3). Это может оказаться полезным при упрощении схемы течения, так как дает возможность не учитывать вторичный отрыв.

Построенный приближенный метод определения завихренности в зоне отрыва может быть обобщен на течения около тел, если только соответствующая краевая задача для линеаризованного уравнения пограничного слоя будет иметь единственное решение. Способ вычисления функционала также допускает обобщение, так как ядро соответствующего интегрального уравнения должно обладать таким же поведением на бесконечности, как и $R(p, \xi)$.

Полученные на модельном примере результаты подтверждают возможность вычисления завихренности в отрывной зоне с помощью условия (1.3).

Автор благодарен Н. А. Слезкину и участникам его семинара за неоднократное обсуждение работы и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Batchelor G. K. On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number.— J. Fluid Mech., 1956, v. 1, pt 2, p. 177–190.
2. Childress S. Solutions of Euler's equations containing finite eddies.— Phys. Fluids, 1966, v. 9, p. 860–872.
3. Колосов Б. В., Шифрин Э. Г. К задаче обтекания тела с образованием развитой стационарной отрывной зоны при $Re \rightarrow \infty$.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 2, стр. 28–37.
4. Садовский В. С. О вихревых зонах в потенциальном потоке со скачком постоянной Бернулли на границе.— ПММ, 1974, т. 35, вып. 5, с. 773–779.
5. Нейланд В. Я., Сычев В. В. К теории течений в стационарных срывных зонах.— Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 1, с. 14–23.
6. Сычев В. В. О ламинарном отрыве.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 3, с. 47–59.
7. Колосов Б. В., Шифрин Э. Г. Об одной краевой задаче, возникающей при исследовании замкнутых стационарных отрывных зон в несжимаемой жидкости.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 5, с. 835–844.
8. Лейбензон Л. С. Об одном методе интегрирования уравнений ламинарного пограничного слоя и о вычислении лобового сопротивления в потоке жидкости.— Матем. сб., 1934, т. 41, № 2, с. 292–316.
9. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
10. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.

Москва

Поступила в редакцию
1.IV.1980