

УДК 533.6.011-3

**ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ФОРМА ТЕЛА МИНИМАЛЬНОГО
АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ В ГИПЕРЗВУКОВОМ
ПОТОКЕ ГАЗА**

ГУСАРОВ А. А., ЛЕВИН В. А.

В работе определена пространственная аэродинамическая форма тонкого тела минимального сопротивления. Решение соответствующей вариационной задачи рассмотрено в специальном классе поверхностей, среди которых находятся поверхности вращения. Проведено приближенное аналитическое исследование, представлены результаты численного расчета методом локальных вариаций. Показано, что контур поперечного сечения оптимального тела имеет лепестковую форму, которая преобразуется в окружность в миделевом сечении.

Исследование тел звездообразной формы [1, 2] показало большие возможности существенно пространственных форм в решении вопроса снижения аэродинамического сопротивления. При этом выигрыш в сопротивлении определяется тем, что мощная головная ударная волна, возникающая перед телом вращения, заменяется системой скачков слабой интенсивности, образованной при обтекании ребристых поверхностей. Вариационная задача о форме тела минимального сопротивления при условии, что заданы длина (или объем) тела и форма (или площадь) миделя, без ограничения на класс варьируемых поверхностей даже с привлечением закона Ньютона сложна, так как приводит к минимизации пространственного функционала и к решению уравнений Эйлера в частных производных. Ограничивая же класс рассматриваемых поверхностей, можно свести задачу к минимизации одномерных функционалов и, следовательно, к решению обыкновенных дифференциальных уравнений Эйлера. Кроме того, в [3] показана некорректность постановки задачи о теле минимального волнового сопротивления при заданной длине (или объеме) и форме миделя тела без каких-либо других ограничений на поверхность тела в рамках теории Ньютона.

Для решения проблемы сопряжения носовой части с основным корпусом летательного аппарата необходим такой класс тел существенно пространственной формы, который позволил бы решить вариационную задачу о теле минимального сопротивления для заданного контура миделя. Если контур миделевого сечения является окружностью (в общем случае он может быть произвольным), то такая задача в классе линейчатых тел решена в [4, 5], для многоугольной формы миделя построены поликлиновые тела [6, 7], обобщение которых дано в [8] уже с окружностью в миделевом сечении.

1. Рассмотрим цилиндрическую систему координат r, θ, z , в которой ось z выбирается в направлении невозмущенного потока (фиг. 1). Будем рассматривать задачу о теле минимального аэродинамического сопротивления в классе поверхностей, которые описываются уравнениями вида

$$(1.1) \quad f(r, z, \theta) = r - (z/L)^{m(\theta)} R = 0$$

где L — длина тела, R — радиус миделя.

Такие тела не обладают свойством гомотетии, миделем здесь является круг радиуса R (см. фиг. 1), тогда как любое другое сечение в плоскости r, θ может иметь произвольную (в том числе и звездообразную) форму. Продольный контур этих тел представляет собой степенной контур с показателем $m(\theta)$, зависящим от угла θ . Функционал сопротивления будем минимизировать на множестве функций $m(\theta)$.

В настоящей работе вклад сопротивления трения в полное аэродинамическое сопротивление учитывается приближенно; коэффициент тре-

ния C_f принимается постоянным на всей поверхности тела, коэффициент давления определяется по формуле Ньютона. Таким образом, коэффициент аэродинамического сопротивления выражается через геометрические параметры следующим образом:

$$(1.2) \quad \frac{C_D}{\tau^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(m, \dot{m}) d\theta$$

$$(1.3) \quad F(m, \dot{m}) = \int_0^{\infty} \left[\frac{m^3 \exp[-2(2m-1)\xi]}{1 + \dot{m}^2 \xi^2 + (R/L)^2 m^2 \exp[-2(m-1)\xi]} + \right. \\ \left. + K_f \exp[-(1+m)\xi] \sqrt{1 + \dot{m}^2 \xi^2} \right] d\xi$$

где C_D — коэффициент аэродинамического сопротивления, $K_f = 4C_f/\tau^3$ — параметр трения, $\tau = 2R/L$ — относительная толщина, $\xi = \ln z/L$, $\dot{m} = dm/d\theta$.

Вариационная задача заключается в том, чтобы среди функций $m(\theta)$, которые удовлетворяют условиям на концах $m(0) = m(2\pi)$, найти такую, для которой интеграл (1.2) принимает минимальное значение.

Основная функция не содержит явно независимой переменной, поэтому уравнение Эйлера допускает первый интеграл

$$(1.4) \quad F - \dot{m} F_m = C_1$$

где $C_1 = \text{const}$, $F_m = \partial F / \partial \dot{m}$.

Аналогично работе [2], в которой все рассуждения проводятся для класса тел, обладающих свойством гомотетии, можно показать, что одним из решений вариационной задачи будет экстремаль, составленная из n одинаковых циклов, каждый из которых в свою очередь представлен двумя зеркально-симметричными кривыми. Ограничимся рассмотрением только этого класса решений.

Основная функция (1.3) в общем случае имеет довольно громоздкий вид, затрудняющий проведение аналитического исследования. Поэтому ниже задача рассматривается в приближении тонкого тела.

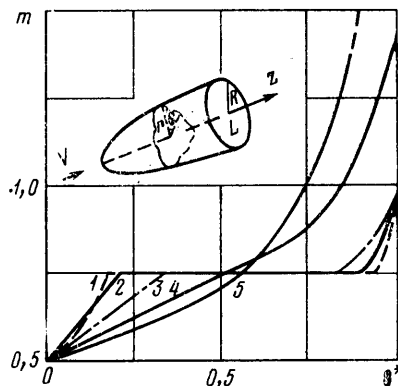
2. Для тонких тел ($R/L \ll 1$ или $\tau \ll 1$) из (1.2) получаем выражение для коэффициента волнового сопротивления

$$(2.1) \quad \frac{C_D}{r^2} = \frac{n}{\pi} \int_0^{n/\pi} F(m, \dot{m}) d\theta$$

$$(2.2) \quad F(m, \dot{m}) = \frac{1}{\dot{m}^2} \int_0^{\infty} \frac{m^3 \exp(-\alpha\xi)}{\beta^2 + \xi^2} d\xi$$

$$\beta = \frac{1}{|\dot{m}|}, \quad \alpha = 2(2m-1)$$

Из сходимости интеграла (2.2) вытекает ограничение на показатель m , а именно $m \geq 0,5$ (это ограничение является следствием приближения



Фиг. 1

тонкого тела). Выражение (2.2) можно записать в специальных функциях

$$(2.3) \quad F(m, \dot{m}) = m^3 \beta (\text{ci}(\beta\alpha) \sin(\beta\alpha) - \text{si}(\beta\alpha) \cos(\beta\alpha))$$

где si , ci — интегральные синус и косинус.

Если правую часть выражения (2.3) разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $\beta\alpha=0$ (т. е. $\dot{m} \gg 1$ или $m=0,5$), получим

$$(2.4) \quad F(m, \dot{m}) = m^3 (\alpha\beta(\alpha\beta C - \alpha\beta \ln(\alpha\beta) + \pi/2 - \alpha\beta) + O((\alpha\beta)^3)) / \alpha$$

где $C \approx 0,577$ — постоянная Эйлера.

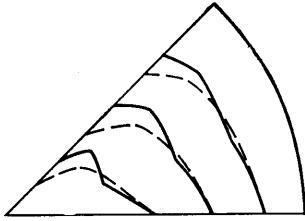
Оставим в (2.4) только члены первого порядка малости, тогда из (1.4) получаем уравнение экстремали

$$(2.5) \quad m = m_i \sqrt{C_1 / (C_1 - 2\pi m_i^2 \theta)}, \quad m_i = m(0)$$

Экстремаль удовлетворяет условию Лежандра. Если концы экстремали не закреплены, из условия трансверсальности (учитывая ограничение $m \geq 0,5$), получим $m_f = \infty$, $C_1 = 2\pi^2 m_i^2 / n$, $m_i = 0,5$. Коэффициент волнового сопротивления имеет простую зависимость от числа циклов n :

$$(2.6) \quad C_D / \tau^2 = \pi^2 / 4n$$

Последнее выражение дает удовлетворительное совпадение (порядка 10%) с (2.1) только при $n \geq 40$ (из выражения (2.6) $C_D / \tau^2 = 0,062$, из (2.1) — $C_D / \tau^2 = 0,056$), при меньших значениях n выражение (2.3) значительно завышает коэффициент сопротивления. Так, при $n=4$ из (2.6) имеем $C_D / \tau^2 = 0,61$, а из (2.5) и (2.1) — $C_D / \tau^2 = 0,29$.



Фиг. 2

На фиг. 1 кривая 5 есть экстремаль, рассчитанная по выражению (2.5), а кривая 4 получена в результате решения вариационной задачи численным методом локальных вариаций ($\theta^* = n\theta/\pi$). На фиг. 2 пунктиром изображена $1/8$ часть поперечных контуров тела с экстремалью, полученной численно, для $n=4$. Сопротивление таких тел $C_D / \tau^2 = 0,29$ в 1,5 раза меньше, чем сопротивление эквивалентного по длине и радиусу миделя оптимального осесимметричного тела, у которого $C_D / \tau^2 = 0,42$.

У тела, показатель продольного контура которого изменяется по закону (2.5), имеются глубокие впадины, образуемые вогнутыми продольными контурами. Для таких тел формула Ньютона дает большую погрешность, кроме того, впадины заполняются пограничным слоем и картина обтекания не соответствует ньютоновской, поэтому естественно наложить ограничение $m \leq 1$, из которого следует, что все продольные контуры выпуклые. Это ограничение приводит к односторонним вариациям при $m=1$, $\delta m \leq 0$, при которых из условия трансверсальности имеем $m_f = 1$. Из (2.5) получаем $C_1 = 2\pi^2 m_i^2 m_f^2 / n (m_f^2 - m_i^2)$.

Кроме того, существуют и другие решения вариационной задачи, экстремали которых имеют угловые точки. Эти решения можно получить, если учесть условие типа неравенства $\dot{m} \geq 0$. Без этого условия можно получить тело с нулевым сопротивлением (поперечный контур такого тела имеет вид дисковой пилы с числом зубьев, стремящимся к бесконечности). Заменим условие $\dot{m} \geq 0$ дифференциальным условием. Для этого введем дополнительную неизвестную функцию $\gamma(\theta)$, которая связана с функцией $m(\theta)$ дифференциальным уравнением $\dot{m} = \gamma^2$. Тогда основная функция примет вид $\Phi = F + \lambda(\dot{m} - \gamma^2)$. Из уравнения Эйлера для функции $\gamma(\theta)$ по-

лучаем, что экстремаль состоит из дуг двух типов: 1) $\dot{m}=0$, $\lambda \neq 0$ и 2) $\dot{m} \neq 0$, $\lambda=0$. Для дуг второго типа будем использовать приближенное выражение для экстремали (2.4). Рассмотрим случай двух угловых точек, представленный на фиг. 1 (кривые 1, 2, 3). Из условия трансверсальности получаем (учитывая ограничения $0,5 \leq m \leq 1$) $m_i=0,5$; $m_f=1$. Соотношения в угловых точках имеют вид

$$(2.7) \quad \Delta(\Phi - \dot{m}\Phi_{\dot{m}}) = 0, \quad \Delta(\Phi_{\dot{m}}) = 0$$

Из первого условия следует, что константа в первом интеграле Эйлера одна и та же на всех дугах

$$(2.8) \quad C_1 = \frac{2\pi\theta_1 m_i^2 m_f^2}{m_i^2 - m_f^2} = \frac{m_i^2}{2(2m_i - 1)} = \frac{2\pi m_i^2 m_f^2 (\pi/n - \theta_2)}{m_f^2 - m_i^2}$$

Тогда из второго соотношения (2.7) имеем

$$(2.9) \quad F_{\dot{m}}|_{\theta=\theta_1} = F_{\dot{m}}|_{\theta=\theta_2} = \lambda$$

Отсюда и из уравнения Эйлера на дуге первого типа $F_m - d\lambda/d\theta = 0$ следует, что $\lambda = \text{const}$ на дуге первого типа и $F_m = 0$, т. е. $m_i = 0,75$. Из (2.8) имеем $C_1 = 27/64$ и $C_D/\tau^2 = 0,5C_1(1 + n\theta_2/\pi - n\theta_1/\pi)$, где

$$Q_1 = \frac{c_1}{2\pi} \left(\frac{1}{m_i^2} - \frac{1}{m_f^2} \right),$$

$$Q_2 = \frac{\pi}{n} - \frac{c_1}{2\pi} \left(\frac{1}{m_i^2} - \frac{1}{m_f^2} \right)$$

Из условия $\theta_2 \geq \theta_1$ получаем ограничение на число циклов, при котором такое решение имеет место, $n \leq 14$ (метод локальных вариаций дает гладкую экстремаль уже при $n=10$). Выше было отмечено, что условие Лежандра для дуг второго типа выполняется. Рассмотрим аналогичное условие для дуг первого типа, имеющее следующий вид: $F_{\dot{m}\dot{m}} - \lambda/2\dot{m} \geq 0$. Отсюда следует, что на дуге первого типа $\lambda \leq 0$. Из (2.9) имеем $\lambda = -C_1/2\dot{m}(\theta_1)$. Из (2.8) получаем, что условие Лежандра $\lambda \leq 0$ на дуге первого типа выполняется. На фиг. 1 для $n=4$ и 2 представлены экстремали с двумя угловыми точками, определенные с использованием приближения $\alpha\beta \ll 1$ (кривая 1), и экстремаль, рассчитанная методом локальных вариаций, когда основная функция вычислялась по формуле (2.3) (кривая 2 для $n=2$ и кривая 3 для $n=4$ ($\theta^* = n\theta/\pi$)). На фиг. 2 (сплошные линии) для $n=4$ представлена $1/8$ часть поперечных сечений тел, соответствующих данному виду экстремалей. Аналогично можно рассмотреть экстремали с большим числом угловых точек.

При решении вариационной задачи с учетом трения получим тело, поперечный контур которого будет более плавным, чем у тела минимального волнового сопротивления. В тех случаях, когда сопротивление трения по порядку величины становится сравнимым с волновым сопротивлением, поперечный контур оптимального тела близок к окружности. Поэтому наряду с рассмотренным выше случаем $\dot{m} \gg 1$ исследуем и $\dot{m} \ll 1$, причем здесь будем учитывать и сопротивление трения. Для тонких тел выражения для основной функции можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} F &= m^3 \beta (ci(\beta\alpha) \sin(\beta\alpha) - si(\beta\alpha) \cos(\beta\alpha)) + \\ &+ K_f \pi (H_1(\beta p) - N_1(\beta p)) / 2p \\ \beta &= 1/|\dot{m}|, \quad \alpha = 2(2m-1), \quad p = m+1 \end{aligned}$$

где $H_1(z)$ — функция Струве, $N_1(z)$ — функция Неймана. Пользуясь разложением в ряд в окрестности точки $\dot{m}=0$, получим

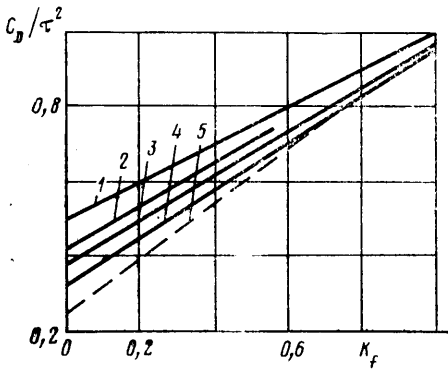
$$F = \frac{m^3}{\alpha} \left(1 + 2 \left(\frac{\dot{m}}{\alpha} \right)^2 \right) + \frac{K_f}{m+1} \left(1 + \frac{\dot{m}^2}{(m+1)^2} \right) + O(\dot{m}^3)$$

Если взять только два члена в разложении, то из уравнения Эйлера (1.4), которое в данном случае примет вид $m^3/2(2m-1) + K_f/(m+1) = C_1$, получим, что оптимальным телом является осесимметричное тело, у которого показатель степени для продольного контура зависит от параметра трения и определяется из выражения

$$\frac{2m^2(m-3/4)}{(2m-1)^2} - \frac{K_f}{(m+1)^2} = 0$$

Условие Лежандра в этом случае имеет вид $2K_f/(m+1)^3 - m^3/2(2m-1)^3 \geq 0$. Из последних двух выражений получаем, что осесимметричное тело будет оптимальным при $\sqrt[3]{K_f/2} \geq 1$. При этом $m \geq 1$.

При $0 < \sqrt[3]{K_f/2} \leq 1$ аналитическое исследование задачи провести затруднительно, поэтому соответствующие результаты были получены решением вариационной задачи с помощью прямого метода локальных вариаций. На фиг. 3 представлены графики зависимости коэффициента аэродинамического сопротивления от параметра трения для конуса (кривая 1), оптимального осесимметричного тела (кривая 2) и тел со степенным продольным контуром, рассмотренных в данной работе (кривая 3 для $n=2$; 4 — $n=4$). Видим, что сопротивление рассмотренных тел не превосходит сопротивления оптимальных осесимметричных тел во всем диапазоне изменения параметра трения. При малых значениях K_f такие тела имеют значительный выигрыш (10% при



Фиг. 3

$n=2$; 24% при $n=4$ и 52% при $n=10$) в сопротивлении по сравнению с оптимальными осесимметричными телами. Сравнение с линейчатыми телами [4, 5] (кривая 5 для $n=4$ на фиг. 3) показывает, что при равном числе циклов n сопротивление тел с продольным степенным контуром больше, чем у линейчатых тел, однако данные тела обладают большей устойчивостью в полете и, кроме того, у них нет острых кромок в начальном сечении как у линейчатых тел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chernyi G. G., Gonor A. L. The determination of body of minimum drag using the Newton and the Busemann pressure laws. Paper presented at the symposium an extremal problems in aerodynamics, Boeing Scientific Research Laboratories, Seattle, Washington, 1962.
2. Miele A., Saaris G. R. On the optimum transversal contour of a body at hypersonic speeds. — *Astronautica Acta*, 1963, v. 9, № 3, p. 184–198.
3. Бердичевский В. Л. О форме тела минимального сопротивления в гиперзвуковом потоке газа. — *Вестн. МГУ. Сер. матем. и мех.*, 1975, № 3, с. 90–96.

4. Гусаров А. А., Деев А. А., Левин В. А., Пилюгин Н. Н., Черный Г. Г. Оптимальные аэродинамические формы тел, летящих с гиперзвуковыми скоростями. — В кн.: 4-й Всес. съезд по теор. и прикл. мех. 1976: Аннот. докл. Киев: Наукова думка, 1976, с. 53.
5. Гусаров А. А., Дворецкий В. М., Иванов М. Я., Левин В. А., Черный Г. Г. Теоретическое и экспериментальное исследование аэродинамических характеристик пространственных тел. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 3, с. 97–102.
6. Кравец В. В., Швеу А. И. О некоторых режимах сверхзвукового обтекания поликлиновых тел. — ПМТФ, 1974, № 3, с. 59–66.
7. Ведерников Ю. А., Дулов В. Г., Латыпов А. Ф. Трехмерные гиперзвуковые конфигурации минимального сопротивления. — В кн.: Исследование по гиперзвуковой аэродинамике. Новосибирск, 1978, с. 51–67.
8. Ведерников Ю. А. Обобщенная задача оптимизации поликлиновых носовых частей. — В кн.: Аэрофизические исследования. Вып. 4. Новосибирск, 1975, с. 166–169.

Москва

Поступила в редакцию
20.VIII.1979