МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1981

УДК 532.72

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ИНВАРИАНТНОСТИ В ЗАДАЧАХ О КОНВЕКТИВНОМ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНЕ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ ПЕКЛЕ

ГУПАЛО Ю. П., ПОЛЯНИН А. Д., РЯЗАНЦЕВ Ю. С.

Получен ряд общих соотношений инвариантности интегральных диффузионных потоков реагента на поверхность одной или нескольких реагирующих частиц произвольной формы, обтекаемых стоксовым потоком вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Пекле. Рассматривается также случай потенциального обтекания.

1. Конвективная диффузия к одиночной частице. Рассмотрим двумерную (осесимметричную или плоскую) задачу о стационарной конвективной диффузии к реагирующей частице произвольной формы, обтекаемой ламинарным потоком несжимаемой жидкости. Считаем, что на поверхности частицы происходит полное превращение растворенного в жидкости реагента, концентрация которого вдали от частицы постоянна. Предполагается также, что число Пекле $P=aUD^{-1}$ велико; здесь a — характерный размер частицы (радиус эквивалентной по объему сферы), U — характерная скорость потока (на бесконечности), D — коэффициент диффузии.

При анализе используем ортогональную криволинейную систему координат ξ, η, λ, связанную с поверхностью тела. Считаем, что координаты η, λ направлены вдоль поверхности тела, а ξ — по нормали к ней; при этом сама поверхность задается фиксированным значением $\xi=\xi_0$, и поле течения (следовательно, поле концентрации) не зависит от координаты λ ($\partial/\partial\lambda=0$).

В силу граничных условий на поверхности частицы в общем случае функцию тока вблизи частицы можно представить в виде

$$\xi\to\xi_0,\quad \psi(\xi,\eta)\to(\xi-\xi_0)^n f(\eta)\quad (g=g_{\xi\xi}g_{\eta\eta}g_{\lambda\lambda}) \tag{1.1}$$

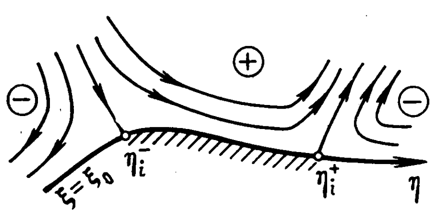
$$v_\xi=-\sqrt{\frac{g_{\xi\xi}}{g}}\frac{\partial\psi}{\partial\eta},\quad v_\eta=\sqrt{\frac{g_{\eta\eta}}{g}}\frac{\partial\psi}{\partial\xi},\quad v_\lambda=0$$

Здесь $g_{\xi\xi}$, $g_{\eta\eta}$, $g_{\lambda\lambda}$ — компоненты метрического тензора.

В конкретных задачах при ламинарном вязком обтекании частиц с гладкой поверхностью параметр n, фигурирующий в соотношении (1.1), для капли и пузыря принимает значение $n=1$, а для твердых частиц обычно $n=2$; кроме того, существует несколько примеров обтекания (поперечное стоксово обтекание кругового диска), в которых $n=3$ [1]. При невязком обтекании, например в задачах фильтрации, $n=1$.

Нули функции $f(\eta)$ (1.1) определяют критические точки (линии) поверхности тела и отделяют области, в которых постоянен знак функции тока. Критическая точка (или линия) поверхности частицы $\xi=\xi_0$ называется точкой натекания (стекания), если в ее окрестности нормальная компонента скорости жидкости направлена к поверхности (от поверхности) тела. Критические точки (линии) натекания обозначаем η_i^-, а стекания — η_i^+ ($i=1,\ldots,m$, фиг. 1). В силу закона сохранения массы линии (точки) натекания и стекания должны чередоваться. При этом, например в осесимметричном случае, всегда имеются, по крайней мере, две изолированные критические точки, лежащие на оси симметрии, а в плоском случае число критических точек всегда четное. На фиг. 1 схематически показано распределение скоростей жидкости вблизи поверхности тела при наличии критических точек, знаки плюс и минус соответствуют знаку функции тока (1.1).

Отметим, что здесь не рассматриваются случаи полей течения с замкнутыми линиями тока, окружающими поверхность тела, которые могут возникнуть, например, при движении жидкости в зазоре между двумя вращающимися цилиндрами (т. е. когда на поверхности тела отсутствуют критические точки). Достаточно общий анализ такой ситуации проведен в [2]. Кроме того, не анализируются поля течения с областями стационарного присоединенного вихря замкнутой циркуляции, примыкающими к поверхности частицы.



Фиг. 1

При больших числах Пекле и выполнении указанных условий безразмерный полный диффузионный поток I на поверхность частицы S и среднее число Шервуда Sh определяются выражениями [1] ($0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_0$)

$$(1.2)\qquad I=I(f)=\lambda_0\nu^{-2n\nu}\Gamma^{-1}(\nu)P^\nu\sum_{i=1}^{m-1}t^{n\nu}(\eta_{i+1},\eta_i),\quad \mathrm{Sh}=\frac{I}{S}$$

$$(1.3)\qquad t(\alpha,\beta)=\frac{1}{n}\left|\int_\alpha^\beta\Lambda(\tau)|f(\tau)|^{1/n}d\tau\right|,\quad \Lambda=\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\xi\xi}}\right)_{\xi=\xi_0},$$

$$\nu=\frac{1}{n+1}$$

Здесь $\Gamma(\nu)$ — гамма-функция, $\eta_1<\ldots<\eta_i<\eta_{i+1}<\ldots<\eta_m$ — нули уравнения $f(\eta)=0$; параметр λ_0 в плоском случае принимает значение, равное единице, а в осесимметричном случае — значение 2π.

Из формул (1.1)—(1.3) вытекает несколько полезных следствий, представляющих собой (асимптотические) соотношения инвариантности полных диффузионных потоков (или чисел Шервуда).

Следствие 1. Из выражения для переменной t (1.3) и формул (1.1), (1.2) видно, что при замене ψ на $-\psi$, соответствующей изменению направления скоростей жидкости (в стоксовом потоке) на обратное, величина полного диффузионного потока не меняется, т. е. $I(f)=I(-f)$. Это утверждение не связано с типом внешних граничных условий (на бесконечности) для поля скоростей жидкости и при помощи результатов [3, 4] легко распространяется и на случай произвольного трехмерного (стоксова) обтекания тел, что является обобщением (при $P\to\infty$) результатов [5, 6], полученных для поступательного [5] и линейного поля [6] скоростей жидкости на бесконечности.

Следствие 2. Если форма тела симметрична относительно средней линии $\eta^\circ={}^1/_2|\eta_m-\eta_1|$, где η_1 и η_m — минимальный и максимальный корни уравнения $f(\eta)=0$, определяющие изолированные точки натекания и стекания, то полные диффузионные потоки, соответствующие функциям $f(\eta)$ и $\varphi(\eta)=f(|\eta_m-\eta_1|-\eta)$, будут совпадать, т. е. $I(f)=I(\varphi)$. Это объясняет результаты [7, 8], полученные для сдвигового и поступательно-сдвигового потоков. В частности, для последнего [8] случаи *а* и *в*, а также *б* и *г* соответствуют замене θ на $\pi-\theta$.

Следствие 3. Пусть поле обтекания капли или пузыря (при $n=1$) характеризуется только двумя критическими точками на ее поверхности, а форма капли симметрична относительно средней линии $\eta^\circ={}^1/_2|\eta_2-\eta_1|$. Если при этом функция $f=f(\eta)$ зависит от параметров $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ таким образом, что сумма $f(\eta)+f(|\eta_2-\eta_1|-\eta)$ от $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ не зависит, то полный диффузионный поток также не зависит от $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

Хорошей иллюстрацией этого следствия является поступательно-сдвиговый поток в случаях *а* и *в* (см. [8]), в которых полный диффузионный поток не зависит от параметра сдвига ω_f и изображается на фиг. 5 [8] прямой линией.

Отметим, что хотя полный диффузионный поток в следствиях 1 и 2 одинаков для функций f и $-f$ (f и φ), локальные диффузионные потоки на поверхности частиц будут различаться.

2. Конвективная диффузия к двум (или нескольким частицам). Рассмотрим здесь задачу о стационарной конвективной диффузии к двум поглощающим частицам произвольной формы с достаточно гладкой поверхностью, обтекаемым несжимаемым стоксовым потоком. Считаем, что частицы расположены на оси потока симметрично относительно плоскости $z=0$, имеют лишь по две критические точки (расположенные на оси потока), а безразмерное расстояние между ними l удовлетворяет неравенству $l<O(P^{1/3})$ (здесь, как и ранее, за характерный масштаб длины выбирается радиус эквивалентной по объему сферы для одной из частиц).

В этом случае массообмен второй частицы с потоком жидкости определяется взаимодействием ее диффузионного пограничного слоя с конвективно-погранслойной областью диффузионного следа первой частицы, в котором концентрация переносится без изменений вдоль линий тока [3, 4, 9, 10]. Полный I_k и суммарный $I_\Sigma^{(k)}$ диффузионные потоки реагирующего вещества на поверхности частиц в этом случае определяются формулами [3, 4]

$$I_k=I_\Sigma^{(k)}-I_\Sigma^{(k-1)},\quad I_\Sigma^{(k)}=2\pi\nu^{-2n\nu}\Gamma^{-1}(\nu)P^\nu\sum_{i=1}^k t_i^{n\nu},\tag{2.1}$$

$$t_i=t(\eta_i^+,\eta_i^-)$$

Здесь приведено общее выражение для цепочки, состоящей из любого числа частиц, расположенных на расстояниях $l_i<O(P^{1/3})$ друг за другом на оси потока; переменная $t(\alpha,\beta)$ определена в формуле (1.3), а значения η_i^- и η_i^+ задают критические точки стекания и натекания на поверхности i-й частицы.

В цилиндрической системе координат ρ, z уравнения и граничные условия, определяющие поле скоростей $\mathbf{v}=\{v_\rho, v_z\}$ несжимаемой жидкости в случае стоксова обтекания твердых частиц, имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\Delta v_\rho-\frac{v_\rho}{\rho^2}\right)-\frac{\partial}{\partial\rho}(\Delta v_z)=0,\tag{2.2}$$

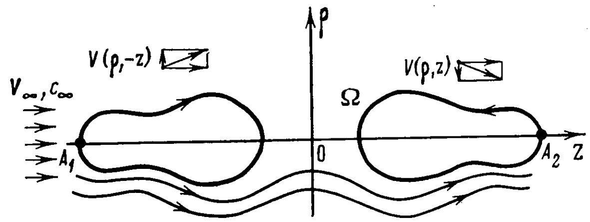
$$\Delta\equiv\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho v_\rho)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)=0\tag{2.3}$$

(2.4) $\Omega(\rho,\ z)=0,\quad v_\rho=v_z=0;\quad \Omega(\rho,\ -z)=0,\quad v_\rho=v_z=0$

$$r=\sqrt{\rho^2+z^2}\to\infty,\quad \mathbf{v}\to\{U_\rho^{(\infty)}(\rho,z),\ U_z^{(\infty)}(\rho,z)\}$$

Здесь уравнение движения (2.2) приведено после применения операции rot, исключающей члены с давлением, а первые два граничных условия (2.4) соответствуют условию прилипания на поверхностях $\Omega(\rho,\ z)=0$ и $\Omega(\rho,\ -z)=0$ частиц. Относительно граничного условия в на-



Фиг. 2

бегающем потоке (2.4) предполагается, что выполняются соотношения

(2.5) $v_\rho^{(\infty)}(\rho,z)=-U_\rho^{(\infty)}(\rho,-z),\quad U_z^{(\infty)}(\rho,z)=U_z^{(\infty)}(\rho,-z)$

и задача (2.2)–(2.5) имеет единственное решение. Отметим, что условию (2.5) удовлетворяет однородный поступательный поток, где

$$U_\rho^{(\infty)}=0,\ U_z^{(\infty)}=U.$$

Пусть $v_\rho=v_\rho(\rho,\ z)$ и $v_z=v_z(\rho,\ z)$ – решение задачи (2.2)–(2.5). Тогда из уравнений и граничных условий (2.2)–(2.5) следует, что $u_\rho=-v_\rho(\rho,\ -z)$ и $u_z=v_z(\rho,\ -z)$ также является решением задачи (2.2)–(2.5). В силу единственности решения это означает, что выполняются равенства

(2.6) $v_\rho(\rho,\ z)=-v_\rho(\rho,-z),\quad v_z(\rho,z)=v_z(\rho,\ -z)$

Эти равенства означают, что если отсчет продольной координаты η вдоль поверхности каждой частицы вести от точек A_1 и A_2 соответственно (фиг. 2), то в любой точке вектор скорости жидкости в системе координат ξ, η, связанной с первой частицей, будет отличаться только изменением своего направления на противоположное в соответствующей симметричной точке вблизи второй частицы. Это в свою очередь означает, что если поле скоростей жидкости в окрестности первой частицы задавалось функцией тока $\psi(\xi,\ \eta)$ (или f), то в окрестности второй оно задается $-\psi(\xi,\eta)\,(-f)$.

Поэтому для переменной t_i (2.1) с учетом (1.3) (при $n=2$, $k=2$), получаем

(2.7) $t_1=t_2$

Подстановка этого выражения в формулу (2.1) при $k=2$ приводит к следующему общему соотношению для интегральных потоков:

(2.8) $$\frac{I_2}{I_1}=\frac{\mathrm{Sh}_2}{\mathrm{Sh}_1}=2^{2/3}-1=0{,}587$$

В частности, соотношение (2.8) выполняется в случае стоксова обтекания сфер равного радиуса, расположенных одна за другой на оси однородного поступательного стоксова потока [11, 12]. Отметим, что при получении формулы (2.8) не потребовалось выполнения условия $O(1)<l$, ко-

торое использовалось в [3, 9] для конкретизации поля течения в окрестности реагирующих частиц.

Формула (2.8) при помощи результатов [3] может быть распространена и на трехмерный случай стоксова обтекания цепочки, состоящей из двух частиц, расположенных на безразмерном расстоянии $l<O(P^{1/2})$ друг от друга симметрично относительно плоскости $z=0$. В частности, оно справедливо для трехмерного стоксова обтекания двух одинаковых эллипсоидов вращения, оси которых расположены параллельно друг другу, а направление линии, проходящей через их центры, совпадает с направлением однородного поступательного потока на бесконечности.

Аналогичным образом можно рассмотреть и случай двух капель (пузырей) в стоксовом потоке, что соответствует более сложным, чем (2.4), граничным условиям на поверхностях капель ($n=1$). В частности, для сферических капель (пузырей) равного радиуса, расположенных одна за другой на оси стоксова потока [13, 14], при условии $l<O(P^{1/2})$ получаем формулу

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{\mathrm{Sh}_2}{\mathrm{Sh}_1}=\sqrt{2}-1=0{,}414 \tag{2.9}$$

Рассматривая соответствующие уравнения и граничные условия, можно показать, что формула (2.9) будет справедлива также и в случае идеального безвихревого обтекания двух сфер равного радиуса, движущихся с постоянной скоростью.

В заключение отметим, что при произвольном трехмерном стоксовом обтекании цепочки, состоящей из любого числа (твердых или жидких) частиц k суммарный диффузионный поток $I^{(k)}$ не изменится, если направление вектора скоростей жидкости во всей области течения изменить на прямо противоположное, т. е. выполняется равенство

$$I_\Sigma^{(k)}(\psi)=I_\Sigma^{(k)}(-\psi) \tag{2.10}$$

В осесимметричном случае это непосредственно следует из формулы (2.1), а в общем случае из результатов [3, 4]. При этом из выражений (2.1), видно, что полные диффузионные потоки на поверхность каждой фиксированной частицы цепочки изменятся, т. е. имеет место неравенство $I_i(\psi)\neq I_i(-\psi)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полянин А. Д., Прядкин П. А.* О двух задачах конвективной диффузии к поверхностям плохообтекаемых тел.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 6.
2. *Pan Y.-F., Acrivos A.* Heat transfer at high Péclet number in regions of closed streamlines.— Int. J. Heat and Mass Transfer, 1968, v. 11, No. 3.
3. *Полянин А. Д.* О диффузионном взаимодействии твердых частиц при больших числах Пекле.– ПММ, 1978, т. 42, вып. 2.
4. *Полянин А. Д.* О диффузионном взаимодействии капель в жидкости.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 2.
5. *Brenner H.* On the invariance of the heat-transfer coefficient to flow reversal in Stokes and potential streaming flows past particles of arbitrary shape.— J. Math. Phys. Sci., 1967, v. 1, p. 173.
6. *Batchelor G. K.* Mass transfer from a particle suspended in fluid with a steady linear ambient velocity distribution.— J. Fluid Mech., 1979, v. 95, pt 2.
7. *Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С.* Диффузия к частице в случае сдвигового течения вязкой жидкости. Приближение диффузионного пограничного слоя.– ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
8. *Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Улин В. И.* Диффузия к частице в однородном поступательно-сдвиговом потоке.– ПММ, 1975, т. 39, вып. 3.

9. *Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С.* О массообмене частиц, расположенных на оси потока, при больших числах Пекле.– Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 2.
10. *Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С.* О диффузии к цепочке капель (пузырей) при больших числах Пекле.– Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 1.
11. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976.
12. *Stimson M., Jeffery G. B.* The motion of two spheres in a viscous flow.— Proc. Roy. Soc. London, 1926, v. A 111, No. 757.
13. *Reed L. D., Morrison F. A.* The slow motion of two touching fluid spheres along their line of centers.— Int. J. Multiphase Flow, 1974, v. 1, No. 4.
14. *Wacholder E., Weihs D.* Slow motion of a fluid sphere in the vicinity of another sphere or a plane boundary.— Chem. Engng Sci., 1972, v. 27, No. 10.

Москва

Поступила в редакцию
29.IV.1980