МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1981

УДК 576.8,532.546

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ БИОГЕННЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕФТЯНЫХ ПЛАСТАХ

АМЕТОВ А. М., ЕНТОВ В. М.

При заводнении нефтяных месторождений в пласте создаются условия для развития биогенных процессов, которые могут привести к интенсивному образованию сероводорода в результате сульфатредукции [1]. Например, в заводняемых нефтяных пластах Д1 Ромашкинского месторождения образование сероводорода происходит следующим образом. Через внутриконтурные нагнетательные скважины в пласт закачивалась речная вода. Анализ воды при самоизливе из этих скважин показал, что примерно через год после начала заводнения в призабойной зоне начинается развитие биоценоза аэробных углеводородокисляющих и анаэробных сульфатвосстанавливающих бактерий, сопровождающееся образованием сероводорода. Оба вида бактерий попадают в пласт вместе с закачиваемой водой, а в пластовой воде они и сероводород не содержатся [2]. В работе [3] была предложена подтвержденная лабораторными опытами схема последовательного развития биогенных процессов в призабойных зонах внутриконтурных нагнетательных скважин. Согласно этой схеме, вначале формируется аэробный биоценоз углеводородокисляющих бактерий. Этот биоценоз использует для своей жизнедеятельности кислород, растворенный в закачиваемой воде, и остаточную нефть, находящуюся в заводненной части пласта. При этом образуются продукты неполного окисления нефти, которые затем потребляются вместе с сульфатами, содержащимися в закачиваемой воде, сульфатвосстанавливающими бактериями, образующими при восстановлении сульфатов сероводород. Экспериментальные данные показывают, что в призабойной зоне восстанавливаются 90–95% сульфатов и связывается почти весь кислород [4].

Биогенное образование сероводорода в нефтяных пластах приводит к коррозии нефтепромыслового оборудования [5], ухудшению свойств нефти [6], снижению проницаемости коллекторов [7]. Поэтому исследование механизма сульфатредукции и разработка методов борьбы с образованием сероводорода в заводняемых нефтяных пластах является одной из основных задач нефтяной микробиологии.

В данной работе сделана попытка построить математическую модель развития бактерий в нефтяном пласте и на ее основе исследовать основные закономерности процесса.

1. Основные уравнения. Попытаемся построить математическую модель биоценоза бактерий, учитывающую балансовые соотношения между конвективными и диффузионными потоками и образованием и уничтожением для двух видов бактерий, основных компонентов обмена — кислорода и сульфатов и продукта реакции — сероводорода. При этом будем считать, что сами бактерии взвешены в пластовой воде, в которой растворены также все остальные компоненты биоценоза. Считая, что в пласте существует фильтрационный поток воды с полем скоростей $\mathbf{u}$, имеем уравнения баланса в очевидной форме

$$
\begin{aligned}
&m\frac{\partial n_j}{\partial t}+\operatorname{div}(n_j\mathbf{u})-\operatorname{div}(D_j\nabla n_j)=R_j \qquad (j=1,2)\\
(1.1)\qquad &\\
&m\frac{\partial c_i}{\partial t}+\operatorname{div}(c_i\mathbf{u})-\operatorname{div}(D_{i+2}\nabla c_i)=Q_i \qquad (i=1,2,3)
\end{aligned}
$$

Здесь t — время, m — пористость, $\mathbf{u}$ — скорость фильтрации воды, n_j, c_i — концентрации углеводородокисляющих и сульфатвосстанавливающих бактерий, кислорода, сульфатов и сероводорода, D_i — коэффициенты диффузии, R_i, Q_i — суммарные скорости образования или распада соответствующих компонент биоценоза.

В условиях недостаточности экспериментальных данных о динамике биогенных процессов в нефтяном пласте приходится ограничиваться качественными соображениями о поведении и свойствах функций, характеризующих динамику исследуемых процессов.

В призабойных зонах внутриконтурных нагнетательных скважин используются почти все сульфаты и кислород, поэтому можно предположить, что удельная скорость размножения бактерий зависит только от концентрации компонента, лимитирующего это размножение. Кроме того, предположим, что удельная скорость гибели бактерий постоянна для каждого вида. Тогда функции Q_i и R_i можно представить в форме

$$
\begin{aligned}
&Q_i=-b_if_i(\gamma_i)n_i\ (i=1,2),\ Q_3=b_3f(\gamma_2)n_2\\
&R_i=a_if_i(\gamma_i)n_i-d_in_i\ (i=1,2),\ \gamma_i=c_i/c_i^*
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

где a_i, b_i, d_i — размерные постоянные коэффициенты и $f_i(\gamma_i)$ — безразмерные функции, характеризующие скорости возникновения и распада соответствующих компонентов биоценоза, c_i^* — концентрации этих компонент в закачиваемой воде. Допустим, что скорость размножения бактерий пропорциональна концентрации компонента, лимитирующего размножение бактерий, если эта концентрация мала [8], и возрастает с ее возрастанием. Тогда функции $f_i(\gamma_i)$ удовлетворяют следующим ограничениям:

$$
\begin{aligned}
&f_i(\gamma_i)\sim\gamma_i,\ \gamma_i\ll 1\\
&f_i'(\gamma_i)>0,\ a_if_i(1)-d_i>0
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

На современном уровне сведений о биогенных процессах в нефтяных пластах прежде всего необходимо выявить качественно существенные закономерности этих процессов. Ограничимся здесь одномерной моделью и пренебрежем по сравнению с диффузией углеводородокисляющих и сульфатвосстанавливающих бактерий диффузией остальных компонент биоценоза. Тогда система (1.1) примет вид

$$
\begin{aligned}
&m\frac{\partial n_i}{\partial t}+u\frac{\partial n_i}{\partial x}-D_i\frac{\partial^2 n_i}{\partial x^2}=a_if_i(\gamma_i)n_i-d_in_i\\
&m\frac{\partial c_i}{\partial t}+u\frac{\partial c_i}{\partial x}=-b_if_i(\gamma_i)n_i\quad (i=1,2)\\
&m\frac{\partial c_3}{\partial t}+u\frac{\partial c_3}{\partial x}=b_3f_2(\gamma_2)n_2
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Рассмотрим задачу о распределении бактерий обоих видов, кислорода, сульфатов и сероводорода по пласту после начала процесса сульфатредукции, если в пласт непрерывно закачивается вода с постоянными концентрациями кислорода и сульфатов. Сформулируем начальные и граничные условия. Так как адаптация бактерий к условиям пласта продолжается долго (месяцы или годы), предположим, что перед началом процесса сульфатредукции пласт насыщен кислородом и сульфатами и в нем отсутствуют бактерии. Тогда при условии, что на входе в пласт поддерживаются постоянные потоки бактерий (это соответствует тому, что концентрации бактерий в воде, поступающей в пласт через нагнетательные скважины, постоянны), имеем начальные и граничные условия

$$
t=0,\ n_1=0,\ n_2=0,\ c_1=c_1^*,\ c_2=c_2^*,\ c_3=0 \tag{2.5}
$$

$$x=0,\quad un_1-D_1\frac{\partial n_1}{\partial x}=A_1$$

$$un_2-D_2\frac{\partial n_2}{\partial x}=A_2,\quad c_1=c_1^*,\quad c_2=c_2^*,\quad c_3=0$$

Из уравнений (2.4) и (2.5) легко получить, что $c_3=b_3/b_2\,(c_2^*-c_2)$.

Система (2.4) при принятых предположениях распадается на две системы, описывающие развитие двух видов бактерий и решаемые независимо. Системы эти однотипны, и достаточно исследовать решение одной из них. Так, для динамики углеводородоокисляющих бактерий имеем задачу (в безразмерной форме)

$$\frac{\partial n}{\partial \tau}+V\frac{\partial n}{\partial \xi}-\frac{\partial^2 n}{\partial \xi^2}=f(c)n-\alpha n$$

$$\frac{\partial c}{\partial \tau}+V\frac{\partial c}{\partial \xi}=-\beta f(c)n$$

$$\tau=0,\ n=0,\ c=1,$$

$$\xi=0,\quad Vn-\frac{\partial n}{\partial \xi}=A,\quad c=1$$

$$\tau=\frac{a_1}{m}t,\quad \xi=\sqrt{\frac{a_1}{D_1}}x,\quad V=\frac{u}{\sqrt{a_1D_1}},\quad \alpha=\frac{d_1}{a_1} \tag{1.6}$$

$$\beta=\frac{b_1n_1^*}{a_1c_1^*},\quad c=\frac{c_1}{c_1^*},\quad n=\frac{n_1}{n_1^*},\quad f(c)=f_1(c),\quad A=\frac{A_1}{n_1^*\sqrt{a_1D_1}}$$

Здесь n_1^* — характерная концентрация углеводородокисляющих бактерий.

Решение задачи (1.6) асимптотически при больших временах распадается на сумму решения типа бегущей волны и стационарного решения для зоны, примыкающей к $\xi=0$; ниже эти решения рассматриваются по отдельности.

2. Решение типа бегущей волны. Будем искать решение задачи (1.6) в виде $n=n(\zeta)$, $c=c(\zeta)$, где $\zeta=\xi-(V+v)\tau$, v — подлежащая определению скорость волны. Имеем

$$\frac{d^2n}{d\zeta^2}+v\frac{dn}{d\zeta}+f(c)n-\alpha n=0 \tag{2.1}$$

$$v\frac{dc}{d\zeta}-\beta f(c)n=0$$

$$\zeta=-\infty:\ n=0,\ \zeta=+\infty:\ n=0,\ c=1 \tag{2.2}$$

Уравнения (2.1) имеют интеграл

$$\frac{dn}{d\zeta}+vn+\frac{v}{\beta}c+\frac{v\alpha}{\beta}\int\limits_c^1\frac{d\rho}{f(\rho)}=\frac{v}{\beta} \tag{2.3}$$

используя который и условие (2.2), получим для $c_*=c(-\infty)$ уравнение

$$c_*+\alpha\int\limits_{c_*}^1\frac{d\rho}{f(\rho)}=1 \tag{2.4}$$

имеющее единственное решение, если выполняются условия (1.3).

Используя второе уравнение (2.1), получим

$$\int_c^1 \frac{d\rho}{f(\rho)} = \frac{1-c_*}{\alpha} y, \quad c=g\left(\frac{1-c_*}{\alpha} y\right) \tag{2.5}$$

$$y = \frac{\alpha\beta}{v(1-c_*)} \int_\zeta^\infty n(\rho)\, d\rho \tag{2.6}$$

где g — известная монотонно убывающая функция. Подставляя (2.5) и (2.6) в (2.2) и (2.3), получим следующую задачу для определения v:

$$s\frac{ds}{dy} = \omega s + \Phi(y)$$

$$s(0)=0, \quad s(1)=0, \quad s = \frac{\beta n}{v} \tag{2.7}$$

$$\omega = \frac{1-c_*}{\alpha} v, \qquad \Phi(y) = \frac{1-c_*}{\alpha}\left[g\left(\frac{1-c_*}{\alpha} y\right) + (1-c_*)y - 1\right]$$

$$\Phi(0)=\Phi(1)=0, \quad \Phi'(y) = \frac{(1-c_*)^2}{\alpha^2}[\alpha - f(c)]$$

Возникшая задача рассматривалась в [9], где исследовалось нелинейное уравнение диффузии, описывающее распространение гена, имеющего преимущество в борьбе за существование. В ней было показано, что задача (2.7) имеет решение при всех $\omega \geqslant 2\sqrt{-\Phi'(0)}$, но только решение, соответствующее значению $\omega = 2\sqrt{-\Phi'(0)}$, является асимптотикой решения некоторой задачи Коши для нелинейного уравнения диффузии. Исходя из этого, примем, что в рассматриваемом случае скорость волны также определяется соотношением $\omega = 2\sqrt{-\Phi'(0)}$ или $v = 2\sqrt{f(1)-\alpha}$. Численные расчеты на ЭВМ подтвердили это предположение.

3. Стационарное решение. Будем искать решение задачи (2.6), не зависящее от времени. В этом случае эта задача примет вид

$$\frac{d^2n}{d\xi^2} - V\frac{dn}{d\xi} + f(c)n - \alpha n = 0 \tag{3.1}$$

$$V\frac{dc}{d\xi} + \beta f(c) n = 0$$

$$\xi=0: \quad Vn - \frac{dn}{d\xi} = A, \quad c=1; \quad \xi=\infty: \quad n=0 \tag{3.2}$$

Задача (3.1), (3.2) имеет интеграл

$$\frac{dn}{d\xi} - Vn - \frac{V}{\beta}c - \frac{V\alpha}{\beta}\int_c^1 \frac{d\rho}{f(\rho)} = -A - \frac{V}{\beta} \tag{3.3}$$

Из (3.2) и (3.3) для отыскания $c_\infty = c(\infty)$ получим уравнение

$$\frac{\dfrac{\beta A}{V} + 1 - c_\infty}{\alpha} = \int_{c_\infty}^1 \frac{d\rho}{f(\rho)} = B \tag{3.4}$$

имеющее единственное решение при $A\geqslant 0$ и выполнении условий (1.3). Введя новые переменные z, p, из (3.1) получим

$$z=\frac{\beta}{BV}\int_{c}^{\xi}n(\rho)\,d\rho,\quad z(\infty)=1,\quad p=\frac{\beta}{V}n \tag{3.5}$$

$$\int_{c}^{1}\frac{d\rho}{f(\rho)}=Bz,\quad c=\varphi(Bz) \tag{3.6}$$

где φ — известная монотонно убывающая функция.

Подставляя (3.5) и (3.6) в (3.3) и (3.2), получим задачу для определения p:

$$p\frac{dp}{dz}=BVp+F(z),\quad p(1)=0 \tag{3.7}$$

$$F(z)=B\left[\varphi(Bz)+B\alpha z-\frac{\beta A}{V}-1\right]$$

$$F(0)=-\frac{B\beta A}{V}$$

$$F(1)=0,\quad F'(z)=-B^2[f(c)-\alpha]$$

Для уравнения (3.7) точка $z=1$, $p=0$ — особая, типа седла. Направления сепаратрис в этой точке равны

$$-{}^1/_2BV\pm\sqrt{{}^1/_4B^2V^2+F'(1)}$$

Так как $F'(1)>0$, то сепаратрисы имеют в этой точке наклоны разных знаков. Отсюда следует, что при $A\neq 0$ задача (3.1)—(3.2) всегда имеет единственное неотрицательное решение [9—10].

Рассмотрим случай, когда через некоторое время после начала процесса сульфатредукции бактерии перестают поступать в пласт. В этом случае следует в (3.2) положить $A=0$. Тогда точка $z=0$, $p=0$ становится особой. Эта точка будет неустойчивым фокусом, если $V<v$, и неустойчивым узлом, если $V>v$. Отсюда следует, что при $A=0$ и $V>v$ не существует решения задачи (3.1)—(3.2), отличного от тривиального $n=0$, $c=1$, если же $A=0$ и $V<v$, то стационарное решение продолжает существовать. Покажем, что при $A=0$ и $V>v$ формируется еще одно решение типа бегущей волны. Для определения скорости волны будем искать решение задачи (1.6) в виде $n=n(\lambda)$, $c=c(\lambda)$, где $\lambda=\xi-v_1\tau$, v_1 — неизвестная скорость волны.

Имеем

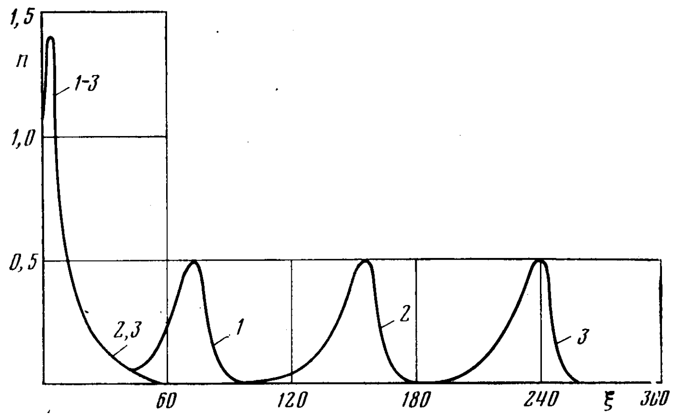
$$\frac{d^2n}{d\lambda^2}-(V-v_1)\frac{dn}{d\lambda}+f(c)n-\alpha n=0$$

$$(V-v_1)\frac{dc}{d\lambda}+\beta f(c)n=0 \tag{3.8}$$

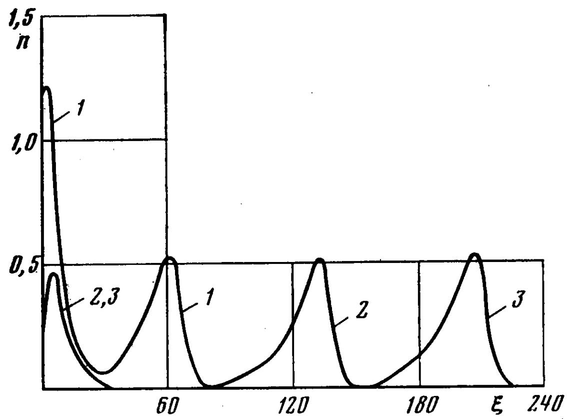
$$\lambda=-\infty,\quad n=0,\quad c=1,\quad \lambda=+\infty,\quad n=0$$

Замена $\zeta=-\lambda$ сводит задачу (3.8) к задаче (2.1). Поэтому, так же как и в п. 2, примем, что $V-v_2=2\sqrt{f(1)-\alpha}$. Расчеты на ЭВМ подтвердили это предположение. Таким образом, в этом случае в пласте образуется новая волна бактерий со скоростью

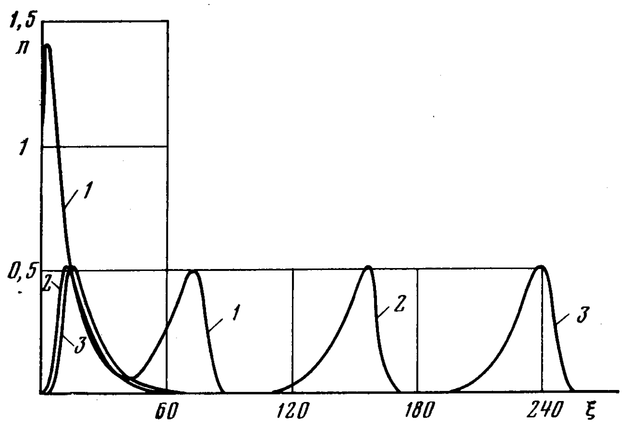
$$v_1=V-2\sqrt{f(1)-\alpha}$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

4. Численное решение. Обсуждение. Задача (1.6) решалась численно методом расщепления по физическим процессам [11].

Переход на следующий временной слой осуществлялся в два этапа. На первом этапе решалась система

$$\frac{\partial n}{\partial \tau}+V\frac{\partial n}{\partial \xi}=0,\qquad \frac{\partial c}{\partial \tau}+V\frac{\partial c}{\partial \xi}=0$$

по схеме «явный левый уголок», начальные условия брались с предыдущего временного слоя. На втором этапе решалась система

$$\frac{\partial n}{\partial \tau}-\frac{\partial^2 n}{\partial \xi^2}=f(c)n-\alpha n,\qquad \frac{\partial c}{\partial \tau}=-\beta f(c)n$$

по неявной схеме, начальные условия и значения функции $f(c)$ брались из решения, получаемого на первом этапе, а граничные условия – из (1.6).

Численные расчеты показали, что при больших значениях времени формируется два вида решений.

При $A>0$ образуется стационарное решение для зоны, примыкающей к $\xi=0$, и волна со скоростью $V+2\sqrt{f(1)-\alpha}$, такое же решение формируется, если $V<2\sqrt{f(1)-\alpha}$ и с некоторого момента времени $A=0$. Если $V>2\sqrt{f(1)-\alpha}$ и с некоторого момента времени $A=0$, то образуются две волны: первая со скоростью $V-2\sqrt{f(1)-\alpha}$, вторая со скоростью $V+2\sqrt{f(1)-\alpha}$.

На фиг. 1–3 показаны распределения концентрации бактерий по пласту при $V=1{,}2$ (фиг. 2), $V=2$ (фиг. 1, 3), $A=V$ (фиг. 1), $A=V$ при $\tau<20$ и $A=0$ при $\tau>20$ (фиг. 2, 3), $\alpha=0{,}19$, $\beta=1$ для моментов времени $\tau=20$ (кривая *1*), $\tau=40$ (кривая *2*), $\tau=60$ (кривая *3*).

Приведенные результаты, несмотря на их первоначальный характер, позволяют сделать некоторые общие заключения. Прежде всего (и это основное) образование стационарной бактериальной волны, опережающей поток воды, означает, что бактериальное заражение пласта не локализуется вблизи нагнетательных скважин, а носит (с учетом естественной неоднородности пласта) рассеянный характер. Поэтому меры подавления бактериального заражения, предпринимаемые на поздней стадии процесса (например, разовая обработка призабойных зон нагнетательных скважин бактерицидами), не могут дать желаемого эффекта. Равным образом из анализа п. 4 следует, что прекращение на поздней стадии процесса поступления сульфатвосстанавливающих бактерий в пласт не позволяет подавить бактериальный процесс, а может лишь привести к продвижению его в глубь пласта. Напрашивается вывод, что активные антибактериальные меры необходимо предпринимать до формирования устойчивых биоценозов. Возможность такого общего анализа тенденций представляется наиболее перспективным направлением применения математических моделей биогенных процессов типа рассматриваемых в данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Розанова Е. П., Кузнецов С. И.* Микрофлора нефтяных месторождений. М.: Наука, 1974. 198 с.
2. *Кузнецова В. А., Ли А. Д.* Закономерности развития сульфатвосстанавливающих бактерий в нефтяных пластах Д1 Ромашкинского месторождения при их заводнении.– Микробиология, 1964, т. 33, вып. 2, с. 314.
3. *Кузнецова В. А., Горленко В. М.* Влияние температуры на развитие микроорганизмов из заводняемых пластов Ромашкинского нефтяного месторождения.– Микробиология, 1965, т. 34, вып. 2, с. 329.

4. *Еронин В. А., Кривоносов И. В., Ли А. Д. и др.* Поддержание пластового давления на нефтяных месторождениях. М.: Недра, 1973. 199 с.
5. *Розанова Е. П., Мехтиева Н. А., Алиева Н. Ш.* Микробиологические процессы и коррозия металлического оборудования в заводняемом нефтяном пласте.— Микробиология, 1969, т. 38, № 5, с. 860.
6. *Колесник Е. А.* Основные результаты работы по изучению действия на нефть анаэробной микрофлоры.— Тр. Всес. н.-и. геолого-развед. ин-та, 1959, вып. 132, с. 263.
7. *Бирштехер Э.* Нефтяная микробиология. Л.: Гостоптехиздат, 1957. 314 с.
8. *Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С.* Что такое математическая биофизика? М.: Просвещение, 1971. 135 с.
9. *Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме. М.: ОНТИ, Гл. ред. техн.-теорет. лит., 1937. 26 с.
10. *Вольперт А. И., Худяев С. И.* Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. М.: Наука, 1975. 394 с.
11. *Коновалов А. Н.* Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости: Лекции для студентов НГУ. Новосибирск, 1972. 128 с.

Москва, Ухта

Поступила в редакцию
8.V.1980