

УДК 532.546

О ДВИЖЕНИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ С ОБРАЗОВАНИЕМ ЗОНЫ ДВУХФАЗНОГО ТЕЧЕНИЯ

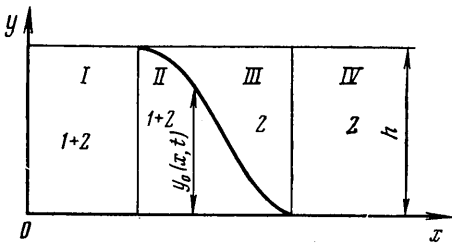
ЛЕБЕДЕВА Л. Н., ФИЛИНОВ М. В.

С задачей о движении границы раздела двух жидкостей в пористой среде связаны расчеты законтурного и внутриконтурного заводнения нефтяных пластов, исследование нагнетания газа в водоносные пласты с целью создания подземных газохранилищ и т. д.

Вопрос о перемещении границы раздела при вытеснении одной жидкости другой исследовался в [1-6]. В [1-5] рассматривался жесткий режим фильтрации, когда условие ограниченности давления на бесконечности не удовлетворяется. Во всех указанных работах исследовался случай поршневого вытеснения. Однако, когда вязкости нагнетаемой и вытесняемой жидкостей отличаются достаточно сильно, модель поршневого вытеснения приводит к значительным ошибкам в расчете движения границы раздела по подошве и кровле пласта [2]. Поэтому возникает необходимость учета образования двухфазной области течения.

Ниже исследуется задача о вытеснении одной жидкости другой с образованием зоны совместной фильтрации при упругом режиме фильтрации в области вытесняемой жидкости. Построено автомодельное решение уравнений фильтрации, осредненных по вертикальной координате. Разработан численный алгоритм для определения насыщенности в зоне смеси, давления, а также положения и формы границы раздела.

1. Постановка задачи. Рассмотрим двумерную задачу о нагнетании жидкости 1 (воды) в бесконечный горизонтальный пласт постоянной мощности h , занятый жидкостью 2 (нефтью). Считается, что вязкости жидкостей 1 и 2 различны, а удельные веса одинаковы. Область фильтрации двух жидкостей разделяется на четыре зоны (фиг. 1): первая и вторая из них насыщены нагнетаемой и вытесняемой жидкостями, третья и четвертая — только вытесняемой. В областях I, II совместной фильтрации и в области III жидкости 1 и 2 несжимаемы, тогда как во внешней бесконечной области IV жидкость 2 является упругой и ее движение описывается уравнением Фурье.



Фиг. 1.

Предполагается, что породы пласта предельно анизотропны, причем проницаемость их в горизонтальном направлении ($k_x = k$) является конечной, а в вертикальном (k_y) — равна бесконечности, и, таким образом, давление по вертикали распределено гидростатически [1-6].

Система уравнений, описывающая двухфазное двумерное течение несмешивающихся жидкостей без учета капиллярного давления, имеет вид

$$(1.1) \quad m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \quad -m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0$$

$$(1.2) \quad u_1 = -\frac{kk_1(\sigma)}{\mu_1} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad u_2 = -\frac{kk_2(\sigma)}{\mu_2} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$(1.3) \quad v_1 = -\frac{k_y k_1(\sigma)}{\mu_1} \frac{\partial}{\partial y}(p + \gamma y), \quad v_2 = -\frac{k_y k_2(\sigma)}{\mu_2} \frac{\partial}{\partial y}(p + \gamma y)$$

Здесь $k_1(\sigma)$, $k_2(\sigma)$, μ_1 , μ_2 — относительные фазовые проницаемости и вязкости воды и нефти соответственно, m — пористость, γ — объемный вес, u_1 , u_2 и v_1 , v_2 — x -е и y -е компоненты скорости фильтрации первой и второй жидкостей, $p(x, y, t)$ — давление, $\sigma(x, t)$ — водонасыщенность, причем считается, что мощность пласта много меньше длины, поэтому насыщенность зависит только от x и t . Рассмотрим задачу, когда заданными являются расход воды, заканчиваемой в пласт $q=q(t)$, и давление на бесконечности. Кровля и подошва пласта предполагаются непроницаемыми: $v_1=v_2=0$ при $y=0$ и $y=h$.

2. Автомодельные дифференциальные уравнения фильтрации в областях I—IV. По условию задачи $k_y=\infty$. Имея в виду, что вертикальные составляющие скорости v_1 , v_2 конечны, из (1.3) получим

$$(2.1) \quad p = p_0(x, t) - \gamma y$$

где $p_0(x, t)$ — давление на подошве пласта, а горизонтальные составляющие скорости u_1 , u_2 распределены равномерно по сечению потока.

Система уравнений фильтрации в области I получается из уравнений неразрывности (1.1) осреднением по y от 0 до h с использованием закона Дарси (1.2) и соотношения (2.1). Ищется автомодельное решение задачи. Введением следующих безразмерных автомодельных переменных система уравнений в области I приводится к безразмерному виду:

$$(2.2) \quad p^* = \frac{p}{\gamma h}, \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{\kappa t}} \quad \left(\kappa = \frac{k \gamma h}{m \mu_1} \right)$$

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \frac{\xi}{2} \frac{d\sigma}{d\xi} &= -\frac{d}{d\xi} \left(k_1(\sigma) \frac{dp_1^*}{d\xi} \right) \\ \frac{\xi}{2} \frac{d\sigma}{d\xi} &= \frac{d}{d\xi} \left(\frac{k_2(\sigma)}{\mu_0} \frac{dp_1^*}{d\xi} \right), \quad \mu_0 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \end{aligned}$$

Здесь $p_1^*(\xi)$ — давление на подошве пласта в области I.

Рассмотрим случай, когда расход $q=q(t)$ изменяется по закону $q=q_0 h / \sqrt{\kappa t}$, где q_0 — некоторая постоянная. Такой расход обеспечивается заданием постоянного забойного давления [6]. Тогда из (2.3), отбрасывая тривиальное решение $d\sigma/d\xi=0$, для распределения насыщенности и градиента давления в первой области получим

$$(2.4) \quad \frac{dp_1^*}{d\xi} = -\frac{c \mu_0}{\mu_0 k_1 + k_2}, \quad c = \frac{q_0}{m \kappa}, \quad \xi = 2cf'(\sigma), \quad f = \frac{\mu_0 k_1}{\mu_0 k_1 + k_2}$$

Здесь $f(\sigma)$ — функция Баклея — Леверетта.

На границе раздела двух жидкостей справедливы условия, выражающие закон сохранения массы при переходе через поверхность разрыва [7]

$$(2.5) \quad m(\sigma^- - \sigma^+)D = w_1^- - w_1^+, \quad -m(\sigma^- - \sigma^+)D = w_2^- - w_2^+$$

Здесь D — скорость границы раздела, w_1 , w_2 — нормальные к границе скорости жидкостей 1 и 2, индексы «-», «+» относятся к состоянию перед и за границей раздела соответственно. Заметим, что $\sigma^+=0$. Выражая w_1^- через x -ю и y -ю компоненты скорости воды перед границей и подставляя

вместо D его выражение [7]

$$D = -\frac{\partial y_0}{\partial t} / \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial x}\right)^2}$$

где $y_0(x, t)$ — уравнение границы раздела, из (2.5) для v_1^- получим

$$(2.6) \quad v_1^- = m\sigma^- \frac{\partial y_0}{\partial t} + u_1^- \frac{\partial y_0}{\partial x}$$

Из (1.2), (1.3), (2.6) для v_2^- имеем

$$(2.7) \quad v_2^- = \frac{m\sigma^- k_2}{\mu_0 k_1} \frac{\partial y_0}{\partial t} + u_2^- \frac{\partial y_0}{\partial x}$$

С учетом (2.6), (2.7) и (2.2) автомодельные уравнения фильтрации в области II будут иметь вид

$$(2.8) \quad \frac{\xi}{2} y_0^* \frac{d\sigma}{d\xi} + \frac{\xi}{2} \sigma \frac{dy_0^*}{d\xi} + y_0^* k_1' \frac{d\sigma}{d\xi} \frac{dp_{II}^*}{d\xi} + k_1 \frac{d}{d\xi} \left(y_0^* \frac{dp_{II}^*}{d\xi} \right) = 0$$

$$(2.9) \quad \frac{dp_{II}^*}{d\xi} = -\frac{\xi f}{2k_1 f'} \left(y_0^* = \frac{y_0}{h} \right)$$

Здесь $p_{II}^*(\xi)$ — давление на подошве пласта в области II.

В области III, занятой чистой жидкостью 2, $\sigma=0$. Интегрируя по y уравнение неразрывности для жидкости 2 от $y_0(x, t)$ до h и используя для определения v_2^+ (2.5), получим

$$(2.10) \quad (1-y_0^*) \frac{d^2 p_{II}^*}{d\xi^2} = \left(\frac{dp_{II}^*}{d\xi} + \frac{\mu_0 \sigma}{2f} \xi \right) \frac{dy_0^*}{d\xi}$$

Уравнения (2.8)–(2.10) составляют замкнутую систему уравнений фильтрации в области (II+III).

Во внешней области упругий режим фильтрации описывается уравнением Фурье

$$(2.11) \quad \frac{\partial^2 p_{IV}}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial p_{IV}}{\partial t}, \quad a = \frac{kK}{m\mu_2}$$

Здесь $p_{IV}(x, t)$ — давление на подошве пласта в зоне IV, K — модуль совместной упругости жидкости и пористой среды. Решение уравнения (2.11) в автомодельных переменных (2.2) имеет вид

$$p_{IV}^* = A \operatorname{erf} \frac{\xi \sqrt{b}}{2} + B, \quad b = \frac{\gamma h \mu_0}{K}$$

Константы A и B определяются из условий непрерывности расхода при переходе из зоны (II+III) в IV и значения давления на бесконечности

$$\left. \frac{dp_{II}^*}{d\xi} \right|_{y=0} = \left. \frac{dp_{IV}^*}{d\xi} \right|_{y=0}, \quad p_{IV}^*(\infty) = p_0 = \text{const}$$

3. Качественное исследование системы (2.8)–(2.10). Исключив $dp_{II}^*/d\xi$, запишем уравнения (2.8)–(2.10) в виде

$$(3.1) \quad y(1-y)A_1(\sigma) \frac{d\sigma}{dy} = (1-y)A_2(\sigma) + yA_3(\sigma)$$

$$(3.2) \quad y(1-y)A_1(\sigma) \frac{d(\ln \xi)}{dy} = -(1-y)B_2(\sigma) + yB_3(\sigma)$$

$$(3.3) \quad A_1(\sigma) = \frac{k_1 f' - k_1' f}{k_1^2}$$

$$(3.4) \quad A_2(\sigma) = \frac{f - \sigma f'}{k_1}, \quad B_2(\sigma) = \frac{f - \sigma f'}{f} f' \left(\frac{f}{k_1 f'} \right)'$$

$$(3.5) \quad A_3(\sigma) = \left(\frac{f}{k_1 f'} - \frac{\sigma \mu_0}{f} \right) f', \quad B_3(\sigma) = \left(\frac{f}{k_1 f'} - \frac{\sigma \mu_0}{f} \right) f''$$

Здесь и в дальнейшем индексы (0, *) опущены.

Уравнение (3.1) не содержит неизвестной ξ и может исследоваться отдельно. Обозначим через A и B особые точки (3.1), определяемые координатами: $y=1$, $\sigma=\sigma_A$; $y=0$, $\sigma=\sigma_B$, где σ_A и σ_B находятся из уравнений

$$(3.6) \quad A_3(\sigma_A) = 0, \quad A_2(\sigma_B) = 0$$

Так как границей области II являются значения $y=1$ и $y=0$, то решению задачи должна соответствовать интегральная кривая, соединяющая особые точки A и B . Собственные значения и собственные направления в точках A и B соответственно равны

$$(3.7) \quad \lambda_1(A) = A_1(\sigma_A), \quad \sigma - \sigma_A = \frac{A_2(\sigma_A)}{A_1(\sigma_A) + A_3'(\sigma_A)} (y-1)$$

$$\lambda_2(A) = -A_3'(\sigma_A), \quad y=1$$

$$\lambda_1(B) = A_1(\sigma_B), \quad \sigma - \sigma_B = \frac{A_3(\sigma_B)}{A_1(\sigma_B) - A_2'(\sigma_B)} y$$

$$(3.8)$$

$$\lambda_2(B) = A_2'(\sigma_B), \quad y=0$$

Для ряда используемых зависимостей $k_1(\sigma)$, $k_2(\sigma)$ с применением ЭВМ были определены собственные значения и собственные направления в точках A и B , а также исследован характер горизонтальной изоклины $d\sigma/dy=0$ (линия 1 на фиг. 2).

Показано, что точка A является неустойчивым узлом и из нее выходит пучок интегральных кривых, касаясь оси σ . Тогда B — седло и в нее входит единственная интегральная кривая с собственным направлением, меньшим (по модулю) наклона горизонтальной изоклины в этой точке.

Кроме того, особыми точками (3.1) являются точки пересечения $d\sigma/dy=0$ с прямыми $\sigma_i = \text{const}$, где $A_1(\sigma_i) = 0$. Однако они лежат в области $y < 0$ и не имеют физического смысла. Качественная картина интегральных кривых уравнения (3.1) представлена на фиг. 2. Из анализа этой картины следует, что существует и единственная интегральная кривая (линия 2 на фиг. 2), соединяющая особые точки A и B и отвечающая решению задачи.

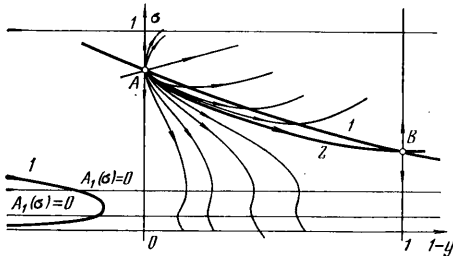
Зная решение уравнения (3.1) $\sigma(y)$, функцию $\xi(y)$ из уравнения (3.2) можно найти в виде интеграла. Для удобства расчета уравнения (3.1), (3.2) интегрировались одновременно методом Рунге — Кутты. При этом счет проводился из точки B ($y=0$, $\sigma=\sigma_B$, $\xi=\xi_B$), из которой с собственным направлением, отвечающим решению задачи, выходит единственная инте-

гральная кривая. Из уравнения (3.2), линеаризуя его около точки B , имеем

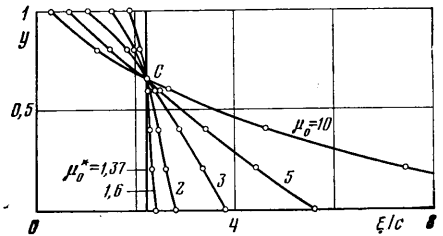
$$(3.9) \quad \left. \frac{d(\ln \xi)}{dy} \right|_{y=0} = \frac{B_3(\sigma_B) - B_2'(\sigma_B)\sigma_y'(\sigma_B)}{A_1(\sigma_B)}$$

где $\sigma_y'(\sigma_B)$ определяется собственным направлением (3.8).

Численное решение задачи можно провести следующим образом. Зная функции $k_1(\sigma)$, $k_2(\sigma)$ и параметры c и μ_0 , определяющие задачу, задаемся



Фиг. 2



Фиг. 3

некоторым значением ξ_B . Условия (3.8), (3.9), задающие значения производных в точке B , позволяют выполнить численное интегрирование системы (3.1), (3.2). При этом y меняется от 0 до 1. Заметим, что согласно (2.4) в точке A $\xi_A = 2cf'(\sigma_A)$. Найденный вид функции $\sigma(y)$ не зависит от выбора ξ_B , а в силу того что $\xi(y)$ входит в (3.2) под знак дифференциала в виде логарифма, функция $\xi(y)$ определяется с точностью до константы d , зависящей от безразмерного расхода c . Для d с учетом выражения для ξ_A имеем

$$(3.10) \quad d = 2cf'(\sigma_A) / \xi_A$$

где $\xi_A = \xi(y)$ в точке A , вычисленному по взятому значению ξ_B .

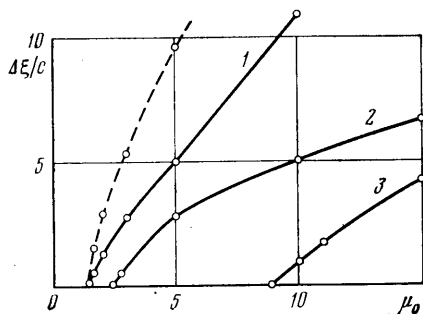
4. Обсуждение результатов. Как следует из (2.4), изменение насыщенности и давления в зоне I происходит так же, как в непрерывном течении в решении задачи Баклея — Леверетта [3]. При этом насыщенность σ монотонно убывает до значения $\sigma = \sigma_A$, которое определяется равенством скорости распространения малых возмущений в области I скорости слабого разрыва в области (II+III) для состояния $y=1$. Последнее соотношение можно привести к виду $k_1/\sigma - (k_1'k_2 - k_1k_2') = 0$, из которого следует, что σ_A не зависит от расхода и отношения вязкостей, а определяется только видом кривых фазовых проницаемостей.

В области (II+III), как видно из (3.10), решение задачи при фиксированных μ_0 , $k_1(\sigma)$, $k_2(\sigma)$ линейно зависит от безразмерного расхода c и поэтому при изменении c отпадает необходимость в повторном интегрировании.

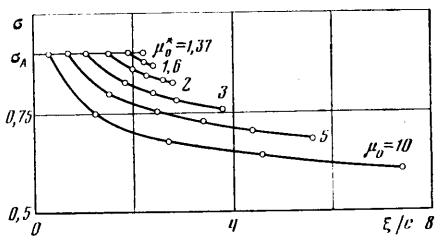
Серии расчетов проводились для различных соотношений вязкостей и различных зависимостей $k_1(\sigma)$, $k_2(\sigma)$. Были рассмотрены следующие функции $k_1(\sigma)$, $k_2(\sigma)$: 1 — $k_1 = \sigma^3$, $k_2 = 1 - 1,11\sigma$; 2 — $k_1 = 1,6329(\sigma - 0,3)$, $k_2 = 1,4256(0,784 - \sigma)$; 3 — $k_1 = \sigma^4$, $k_2 = (1 - \sigma^2)(1 - \sigma)^2$. Показано, что для различных $k_1(\sigma)$, $k_2(\sigma)$ результаты качественно совпадают.

На фиг. 3 представлена форма границы раздела для варианта 1 и различных значений параметра μ_0 . Показано, что существует критическое значение $\mu_0 = \mu_0^*$, при котором фронт вертикален. Как и в случае поршневого вытеснения [4], вертикальный фронт имеет место, когда подвижности слева и справа от границы раздела равны. При этом за подвижность смеси M берется величина $M = k_1(\sigma)\mu_1^{-1} + k_2(\sigma)\mu_2^{-1}$.

Когда $\mu_0 = \mu_0^*$, то $\sigma_A = \sigma_B$, зоны II, III отсутствуют и решение задачи в области смеси совпадает с решением задачи Баклея — Леверетта. Когда



Фиг. 4



Фиг. 5

подвижность слева от границы раздела меньше подвижности справа, то, как и в случае поршневого вытеснения [4], решение отсутствует.

Из фиг. 3 видно, что существует такое значение y (точка C), что скорости фронтов в этой точке при различных μ_0 равны.

С увеличением μ_0 разбег $\Delta\xi$ точек границы, движущихся по подошве и кровле пласта, возрастает и, согласно (2.4), (3.10), составляет величину

$$\Delta\xi = 2cf'(\sigma_A)(1 - \xi_B \xi_A^{-1})$$

Разбег точек границы и вместе с ним сама форма контакта зависят от величины расхода линейно и изменение расхода приводит лишь к равномерному сжатию или растяжению границы раздела.

На фиг. 4 показаны зависимости разбега от параметра μ_0 для различных видов кривых фазовых проницаемостей. Для сравнения пунктиром нарисован график разбега в случае поршневого вытеснения [4]. Для рассмотренных значений μ_0 разбег при поршневом вытеснении не менее чем в 2 раза превышает величину разбега в исследуемом случае. Таким образом, необходимо использовать модель с учетом области двухфазного течения.

На фиг. 5 представлена зависимость $\sigma(\xi)$ для варианта 1 и различных μ_0 . Видно, что насыщенность в области II монотонно убывает от значения σ_A , не зависящего от μ_0 , до σ_B , которое в силу автомодельности решения определяется равенством скоростей распространения слабых разрывов в области (II+III) и, согласно (3.5), (3.6), совпадает с фронтовой насыщенностью по Баклею — Леверетту [3].

Авторы благодарят А. А. Бармина за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чарный И. А. Методы расчета перемещения границы раздела нефти и воды в пластах. — Изв. АН СССР. ОН, 1954, № 4.
2. Чарный И. А. Движение границы раздела двух жидкостей в пористой среде. — Изв. АН СССР. ОН, Энергетика и автоматика, 1959, № 3.
3. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М.: Гостоптехиздат, 1963.
4. Алихашкин Я. И. Численное интегрирование уравнения автомодельного движения границы раздела двух жидкостей в пористой среде. — Изв. АН СССР. ОН, Мех. и маш., 1961, № 5.
5. Пирвердян А. М. О движении подошвенной воды в слабо наклоненных пластах. — ПММ, 1952, т. 16, вып. 2.
6. Веригин Н. Н., Саркисян В. С., Шибанов А. В. Об определении границы раздела двух несмешивающихся жидкостей в пористой среде. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 6.
7. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970.

Поступила в редакцию
6.V.1980