

УДК 532.529

**ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ СМЕСИ ГАЗА
С ЧАСТИЦАМИ В КАНАЛЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ**

БОНДАРЕНКО О. Н., ШАПОШНИКОВА Г. А.

Исследуется течение газа с частицами в канале переменного сечения. Для описания такого течения используется модель, впервые предложенная в [1] и развитая в последующих работах, систематизированных в монографии [2]. Течения газа с частицами в соплах подробно исследовались в [3]. В [4–6] численно исследовались течения двухфазной среды в сопле Лавалья с учетом скоростной и температурной неравновесности фаз, определялись условия, при которых достигается критический (максимальный) расход смеси. В настоящей работе проведено аналитическое исследование изотермических течений газа с частицами, позволившее проанализировать все возможные режимы течения в каналах различной формы. Показано, что в канале постоянного сечения либо устанавливается равновесный режим с постоянными параметрами потока, либо газ достигает скорости звука, при этом дальнейшее течение в канале невозможно («запирание» канала). В сужающемся сопле при достаточной длине канала также наступает «запирание». В расширяющемся сопле при наличии в газе частиц, имеющих скорость меньшую, чем скорость газа, возможны режимы течения с переходом через скорость звука: дозвуковой поток переходит в сверхзвуковой и, наоборот, возможно также течение, при котором наступает «запирание» канала, что существенно отличается от течений чистого газа в расширяющемся сопле и связано с влиянием на течение межфазной силы трения. Изменение давления вдоль по потоку может быть немонотонным с точками локального максимума или минимума, отличными от особой точки, в которой скорость газа достигает скорости звука. При течении неравновесных потоков газа с частицами в сопле Лавалья скорость газа может стать равной изотермической скорости звука не только в выходном сечении сопла либо в расширяющейся его части, как было отмечено в [4–6], но и в минимальном сечении, так как возможны течения, при которых в этом сечении происходит выравнивание скоростей фаз.

1. Постановка задачи. Рассмотрим квазиодномерное стационарное течение идеального совершенного газа с несжимаемыми каплями или частицами в канале переменного сечения. Будем предполагать, что температуры фаз равны и постоянны, скорости газа и частиц, вообще говоря, не равны друг другу. Такое течение описывается уравнениями [1, 2]

$$(1.1) \quad m_1 = \rho_1^0 (1 - \Gamma) F v_1, \quad m_2 = \rho_2^0 \Gamma F v_2$$

$$m_1 \frac{dv_1}{dx} + m_2 \frac{dv_2}{dx} + F \frac{dp}{dx} = 0$$

$$m_2 \frac{dv_2}{dx} + \Gamma F \frac{dp}{dx} = F f, \quad f = \rho_2^0 \Gamma \frac{v_1 - v_2}{\tau_v}$$

$$T_1 = T_2 = T = \text{const}, \quad p = \rho_1^0 R_1 T, \quad \rho_2^0 = \text{const}$$

Здесь v_k , ρ_k^0 — соответственно средняя скорость и истинная плотность k -й фазы; $k=1, 2$, индексом 1 обозначаются параметры газовой фазы, индексом 2 — параметры капель или частиц; F — площадь поперечного сечения канала, f — сила взаимодействия между фазами — «сила трения» (τ_v — характерное время обмена импульсом между фазами); p — давление газа; Γ — объемная концентрация частиц, T — температура, R_1 — газовая постоянная.

Систему (1.1) можно привести к двум дифференциальным уравнениям относительно скоростей фаз v_1 и v_2 :

$$(1.2) \quad \frac{dv_1}{dx} = \frac{L_1(v_1, v_2)}{a_T^2(M^2-1)} \quad \frac{dv_2}{dx} = \frac{L_2(v_1, v_2)}{a_T^2(M^2-1)}$$

$$L_1(v_1, v_2) = -\frac{v_1-v_2}{\tau_v v_2} \frac{m_2}{m_1} \left[v_1^2 - \frac{m_1 R_1 T v_1}{m_2 v_2} \frac{\Gamma}{(1-\Gamma)^2} \right] + \frac{R_1 T v_1}{1-\Gamma} \frac{F'}{F}$$

$$L_2(v_1, v_2) = \frac{v_1-v_2}{\tau_v v_2} \left(v_1^2 - \frac{R_1 T}{1-\Gamma} \right) + \frac{m_1}{m_2} R_1 T v_1 \frac{\Gamma}{(1-\Gamma)^2} \frac{F'}{F}$$

$$a_T^2 = R_1 T \left[1 + \frac{m_1 v_1 \Gamma^2}{m_2 v_2 (1-\Gamma)^2} \right], \quad F' = \frac{dF}{dx}, \quad M = \frac{v_1}{a_T}$$

Здесь M — число Маха, a_T — высокочастотная изотермическая скорость звука.

Изменение давления описывается уравнением

$$(1.3) \quad \frac{dp}{dx} = \frac{1}{F(v_1^2 - a_T^2)} \left[-\frac{m_1 R_1 T v_1}{(1-\Gamma)^2} \frac{F'}{F} + \right. \\ \left. + \frac{m_2 R_1 T}{1-\Gamma} \frac{v_1 - v_2}{\tau_v v_2} \left(1 - \frac{\Gamma}{1-\Gamma} \frac{m_1 v_1}{m_2 v_2} \right) \right]$$

Из уравнений (1.2) следует связь скоростей v_1 и v_2 :

$$(1.4) \quad \frac{dv_1}{dv_2} = \frac{L_1(v_1, v_2)}{L_2(v_1, v_2)}$$

В п. 2, 3 и 4 рассматривается течение смеси в канале постоянного сечения, в сужающемся и расширяющемся соплах, т. е. при $F'=0$, $F'<0$ и $F'>0$ соответственно.

Интегральные кривые уравнения (1.4) для этих случаев при $\rho_2^0 F \sqrt{R_1 T} / m_2 > 1$ изображены на фиг. 1, 2 и 3. Характер течения смеси при $\rho_2^0 F \sqrt{R_1 T} / m_2 \leq 1$ не меняется. Цифрами 1 и 2 на этих фигурах обозначены линии, на которых $L_1=0$ и $L_2=0$ соответственно. Линии 1 и 2 имеют вертикальную асимптоту $v_2 = m_2 / \rho_2^0 F$ и горизонтальные асимптоты $v_1 = -m_1 R_1 T \tau_v F' / m_2 F$ для линии 1 и $v_1 = \pm \sqrt{R_1 T}$ для линий 2. При $F' \neq 0$ линии 1 и 2 имеют, кроме того, наклонную асимптоту $v_1 = v_2$. На линии 1 наклон интегральных кривых равен нулю, на линии 2 — ∞ . Направление движения вдоль интегральной кривой указано стрелочками.

Вид интегральных кривых меняется в зависимости от значения параметра F'/F , входящего в уравнение (1.4), который может меняться вдоль канала. Эти изменения будут описаны в п. 5.

На прямой $v_2 = m_2 / \rho_2^0 F$ объемная концентрация частиц $\Gamma=1$. Физический смысл имеет область, расположенная правее этой прямой, при $\Gamma < 1$. На линии 3 скорость газа становится равной изотермической скорости звука, а производные скоростей и давления равны бесконечности всюду, за исключением точки, в которой пересекаются линии 1, 2, 3. Эта точка является особой точкой системы (1.2). На линии 4 ($v_1 = v_2$) скорости газа и частиц равны между собой. При переходе через линию 3, а для канала постоянного сечения — 3 и 4, направление движения вдоль интегральной кривой меняется на противоположное.

Рассматриваемая часть плоскости v_1, v_2 разбивается линиями 3 и 4 на четыре области (фиг. 1, 2, 3): дозвуковое течение ($M < 1$) и $v_2 > v_1$ — быстрые частицы (область I); дозвуковое течение ($M < 1$) и $v_2 < v_1$ — медленные частицы (область II); сверхзвуковое течение ($M > 1$) и $v_2 > v_1$ (область III); сверхзвуковое течение ($M > 1$) и $v_2 < v_1$ (область IV).

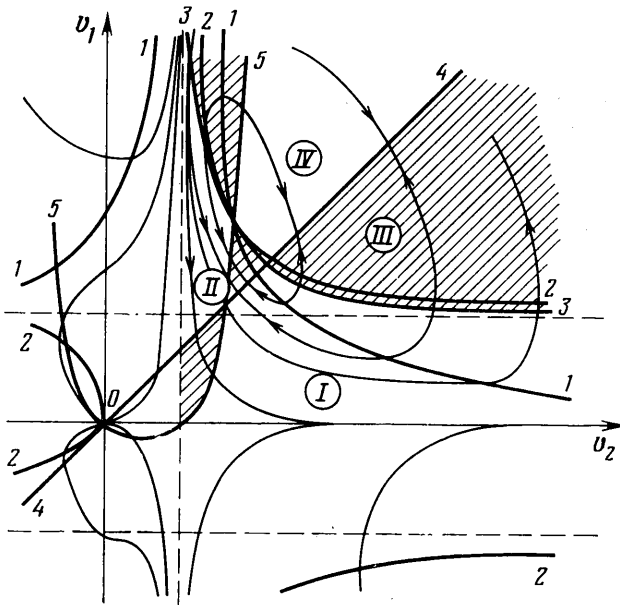
В зависимости от начальных условий точка плоскости v_1, v_2 , описывающая течение газа с частицами, движется по интегральной кривой в одной из областей I–IV.

Изменение скорости газа и частиц в потоке обусловлено двумя силами, действующими на каждую фазу: силой трения со стороны другой фазы и градиентом давления. На линии 5 градиент давления обращается в нуль. Области, где $dp/dx < 0$

для $\Gamma < 1$, на фиг. 1, 3, 4 заштрихованы (на линии 3 смена знака dp/dx происходит через бесконечность).

Заметим, что линии 1, 2, 3 и 5 пересекаются в одной точке.

2. Канал постоянного сечения, $F' = 0$. Рассмотрим течение газа с частицами в канале постоянного сечения (фиг. 1). Интегральные кривые, характеризующие течение в канале, в этом случае описываются уравне-



Фиг. 1

нием

$$\frac{dv_1}{dv_2} = - \frac{m_2 v_1^2 - m_1 R_1 T v_1 \Gamma / m_2 v_2 (1 - \Gamma)^2}{m_1 v_1^2 - R_1 T / (1 - \Gamma)}$$

Если точка, отвечающая распределению параметров в начальном сечении, попадает в часть области I выше линии 1, то при движении вдоль интегральной кривой скорости газа и частиц убывают. В начале движения определяющим фактором является градиент давления. На частицы, напротив, большее влияние оказывает сила трения со стороны газа, которая тормозит частицы, так что скорость частиц вдоль по потоку падает. Концентрация Γ при этом растет. Частицы «поджимают» газ, что при изотермическом течении приводит к росту давления. Поэтому в указанной части области I градиент давления положителен и тормозит газ. С ростом концентрации частиц влияние их на газ растет, на линии 1 ускоряющее влияние частиц на газ через силу трения становится равным тормозящему действию градиента давления, при переходе через эту линию сила трения начинает доминировать, и скорость газа растет. При этом достаточно сильное увеличение скорости газа может вызвать падение давления (для интегральных кривых, пересекающих линию 5).

При подходе к линии 4 скорость газа приближается к скорости частиц, и поток асимптотически выходит на равновесный режим течения с равными скоростями фаз и постоянными параметрами потока.

В области II, в случае, когда начальная точка находится левее линии 5, скорость газа вдоль потока падает, скорость частиц растет за счет трения о газ до выхода на равновесный режим. Давление при этом возрастает.

При значительной разнице между скоростями газа и частиц кинетической энергии газа не хватает для увеличения скорости частиц, начинается переход внутренней энергии газа в кинетическую энергию частиц, в результате чего давление начинает падать. При этом либо скорость частиц достигает скорости газа, и течение выходит на равновесный режим (фиг. 1, интегральные кривые, пересекающие линию 4), либо градиент давления начинает преобладать над силой трения, скорость газа под действием градиента p начинает расти и достигает скорости звука a_t , происходит так называемое «запирание» канала (фиг. 1, интегральные кривые, пересекающие линию 3).

Поведение величин v_1 , v_2 , p в этом случае ($v_{10} > v_{20}$, $v_{10}^2 < a_{T0}^2$) при монотонном изменении давления было подробно исследовано в работе [6].

В областях III и IV (сверхзвуковое течение) всегда реализуется выход на равновесный режим течения. В области III $v_2 > v_1$. Здесь давление падает, скорость газа растет, скорость частиц сначала увеличивается за счет градиента давления, а затем уменьшается из-за трения о газ. В области IV скорость частиц растет, скорость газа может сначала возрастать, а затем убывать.

Отметим существенное отличие дозвукового течения многофазных сред от многокомпонентных. При течении многокомпонентных сред в канале постоянного сечения, в случае, когда скорости компонент на входе в канал отличны одна от другой, реализуется только течение, при котором разность скоростей компонент убывает. Для многофазной среды (газ с частицами), как было показано выше, возможны ситуации, когда наличие частиц, скорость которых больше скорости газа, не ускоряет, а тормозит его, т. е. разность скоростей газа и частиц возрастает.

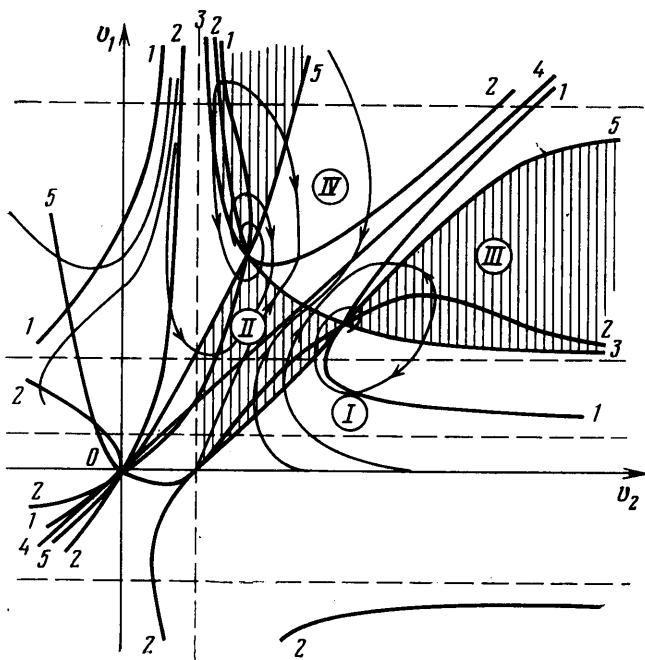
Это отличие связано с действием на диспергированную фазу давления несущей среды (сила Архимеда).

3. Сужающееся сопло, $F'/F = \text{const} < 0$. Интегральные кривые уравнения (1.4) в этом случае изображены на фиг. 2. Основное отличие течения в сужающемся сопле от течения в канале постоянного сечения заключается в отсутствии выхода на режим течения с постоянными равновесными параметрами. Когда скорости фаз близки по величине, сила трения между фазами мала и движение потока происходит под действием градиента давления, который при этом определяется значением F'/F (см. формулу (1.3)) и в дозвуковой области отрицателен, а в сверхзвуковой — положителен.

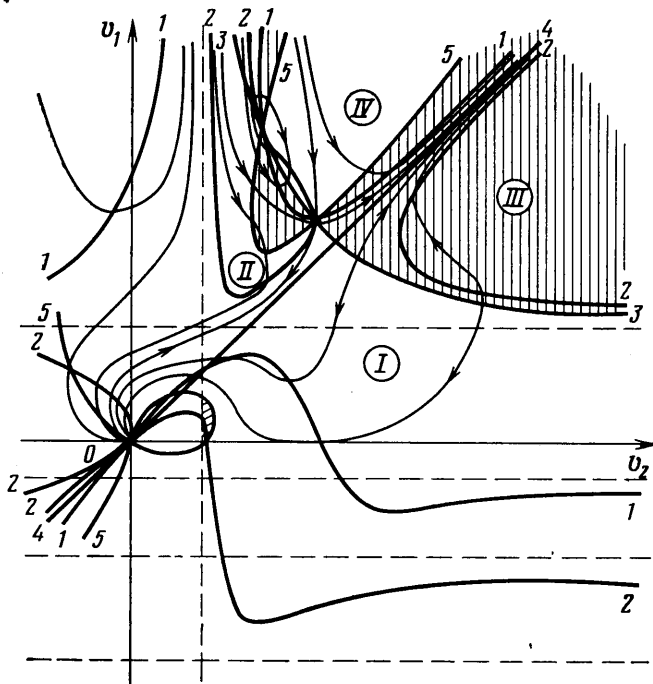
В области, где существенна разница скоростей, основное влияние на течение потока оказывает сила трения, и течение близко к соответствующему течению в канале постоянного сечения. При этом течение в сужающемся сопле происходит следующим образом: разность скоростей уменьшается до тех пор, пока на течение смеси не начинает оказывать определяющее влияние градиент давления, после чего при дозвуковом течении скорость смеси возрастает, при сверхзвуковом — убывает до значения изотермической скорости звука a_t , дальнейшее течение в бесконечном сопле невозможно, происходит запирание канала.

4. Расширяющееся сопло, $F'/F = \text{const} > 0$. Интегральные кривые уравнения (1.4) для случая $F' > 0$ представлены на фиг. 3.

При распределении параметров смеси, близком к равновесному, пока концентрация частиц невелика, течение качественно не отличается от течения в расширяющемся сопле в классической газовой динамике: дозвуковой поток тормозится, сверхзвуковой поток ускоряется. При уменьшении скорости частиц v_2 растет их концентрация Γ , формально при достижении концентрации $\Gamma = 1$ происходит забивание канала частицами и остановка течения. Однако следует отметить, что уже при $\Gamma \sim 0,5$ применение исходных уравнений (1.1) некорректно.



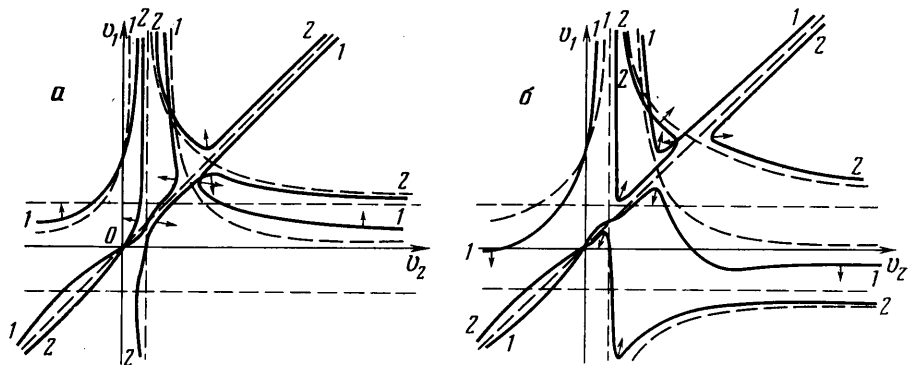
Фиг. 2



Фиг. 3

При малой концентрации частиц (часть области I и область III) влияние частиц на течение газа мало и качественно течение аналогично движению чистого газа в сопле.

В областях II и IV наличие частиц меняет характер течения газа. В дозвуковой области II скорость частиц меньше скорости газа, концентрация их достаточно велика и сила трения оказывает существенное влияние на течение. Под действием силы трения скорость газа падает, одновременно



Фиг. 4

уменьшается и скорость звука. В этой области возможны три режима течения: на интегральных кривых, расположенных выше сепаратрисы, идущей в особую точку типа седла, скорость газа достигает скорости звука и происходит «запирание» канала; ниже сепаратрисы происходит выравнивание скоростей газа и частиц и торможение потока; наконец, если точка попадает на сепаратрису, происходит переход через скорость звука в сверхзвуковую область IV. Отметим, что при течении однофазных потоков «запирание» течения и переход через скорость звука в расширяющемся сопле не происходит. Эти явления свойственны двухфазным средам и связаны с зависимостью скорости звука от скорости диспергированной фазы v_2 и с действием межфазной силы трения.

Сверхзвуковая область IV делится сепаратрисой на две части. Справа от сепаратрисы происходит постепенное выравнивание скоростей и ускорение потока. Слева от сепаратрисы происходит торможение газа до скорости звука и «запирание» канала. Возникновение этого явления в сверхзвуковом потоке также связано со спецификой двухфазных течений.

5. Течение в сопле Лавала. На участке от начального сечения до горла сопло является сужающимся, $F' < 0$; ниже по потоку от горла до выходного сечения — расширяющимся, $F' > 0$; течение смеси при каждом фиксированном $F'(x)$, т. е. в любом фиксированном сечении сопла, описано в п. 2, 3, 4 соответственно для случаев $F' = 0$, $F' < 0$ и $F' > 0$. При движении лагранжева объема смеси по соплу с ростом координаты x функция $F(x)$ будет непрерывно меняться, сначала убывая от некоторого начального значения F_0 до минимального значения в горловой точке F_{\min} , а затем возрастая до величины площади выходного сечения. При этом картина интегральных кривых будет зависеть от F'/F как от параметра, причем при изменении знака F' меняется характер движения семейств линий 1 и 2, соответствующее малому изменению $F'(x)$ при переходе от минимального сечения сопла к близким сечениям в сужающейся (фиг. 4, а) и расширяющейся (фиг. 4, б) частях. Пунктиром нанесены линии при $F' = 0$. С возникновением ненуле-

вой производной особые линии $v_2 = m_2/\rho_2 \circ F$ и $v_1 = v_2$ «распадаются» на линии семейств 1 и 2 с образованием особой точки системы (1.4), которая при $F' < 0$ является фокусом, а при $F' > 0$ — седлом. С ростом F' по абсолютной величине линии одного семейства «разбегаются» друг от друга, направление смещения линий на фиг. 4 показано стрелочками.

Пусть распределение параметров потока в начальном сечении таково, что соответствующая этому распределению точка попадает на интегральную кривую области I. При этом в соответствии с п. 3 будет происходить постепенное выравнивание скоростей и рост скорости газа вдоль по потоку. При достаточной длине сужающейся части сопла на сужающемся участке может быть достигнута скорость звука. При $F'(x) \rightarrow 0$ интегральные кривые, проходящие через точки области, где разность скоростей фаз $v_1 - v_2$ мала, сближаются и стремятся к прямой $v_1 = v_2$, это означает, что если в сужающейся части сопла скорости фаз различаются мало, то в минимальном сечении такое течение может выйти на равновесный режим. Если при этом течение дозвуковое, то на расширяющемся участке сопла смесь будет тормозиться, причем скорости фаз будут мало отличаться друг от друга. Торможение потока на расширяющемся участке сопла получится также в случае, если расширение начинается в том месте, где равновесие еще не установилось. В том случае, когда равновесный поток достигает в минимальном сечении скорости звука, течение в зависимости от условий на выходе из сопла может либо затормозиться, либо перейти в сверхзвуковой режим. Если скорости фаз сравнялись на сужающемся участке сопла, соответствующая точка плоскости (v_1, v_2) на фиг. 1 может перейти в область II. Тогда на расширяющемся участке получим одно из трех течений, описанных в п. 4: «запирание», торможение потока, переход в сверхзвуковой режим течения.

Пусть начальные параметры потока характеризуются точкой области II. Тогда во все время движения по соплу точка, описывающая течение смеси, будет перемещаться по интегральной кривой, не выходя из области II; для течения возможны режимы, описанные в п. 4 для области II.

Если поток на входе является сверхзвуковым и скорость частиц больше скорости газа (область III), возможны два режима течения смеси в сопле Лаваля: либо скорость газа растет как в сужающейся так и расширяющейся части сопла, либо вначале растет, а затем уменьшается, так как из-за уменьшения разности скоростей фаз градиент давления начинает доминировать над межфазной силой трения. При этом в минимальном сечении может быть достигнута скорость звука с одновременным выравниванием скоростей фаз, а на расширяющемся участке поток может перейти на дозвуковой режим.

Наконец, если условия на входе в сопло описываются точками области IV, т. е. поток сверхзвуковой и скорость газа больше скорости частиц, то либо скорость газа будет убывать, пока не наступит «запирание» канала (это может произойти как на сужающемся, так и на расширяющемся участках), либо на расширяющемся участке сопла поток перейдет в дозвуковую область. Последнее может произойти и в минимальном сечении, если при этом выравниваются скорости фаз. В области IV возможен также режим, при котором скорость газа убывает, оставаясь сверхзвуковой, достигает минимума в некотором сечении расширяющейся части сопла, а затем начинает возрастать.

В работах [4—6] качественно определялись условия, при которых достигается максимальный расход двухфазной смеси при истечении ее из сопла заданной геометрии, численно исследовались критические режимы течения в соплах с равновесными и неравновесными параметрами потока на входе в сопло. При этом утверждалось, что для неравновесных потоков

газа и частиц переход через скорость звука возможен только на расширяющемся участке сопла. Выше было показано, что и при неравновесном на входе потоке возможен переход в сверхзвуковой режим в минимальном сечении сопла, когда в этом сечении происходит выравнивание скоростей газа и частиц.

Отметим, что при одном и том же начальном распределении параметров потока и заданном расходе смеси в зависимости от длины каждого из участков сопла возможны различные режимы течения. Течение можно регулировать, составляя сопло из участков переменного и постоянного сечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Размагулин Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред.— ПММ, 1956, т. 20, № 2, с. 184.
2. Нигмагулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
3. Стернин Л. Е. Основы газодинамики двухфазных потоков в соплах. М.: Машиностроение, 1974. 212 с.
4. Нигмагулин Б. И., Сопленков К. И. К элементарной теории критического (максимального) расхода двухфазной смеси в каналах переменного сечения.— Теплофизика высоких температур, 1978, т. 16, № 2, с. 370.
5. Селиванов В. Г., Сопленков К. И., Фролов С. Д. О течении газожидкостной среды в соплах заданной геометрии.— В кн.: Вопросы газотермодинамики энергоустановок. Вып. 2. Харьков, 1975, с. 19.
6. Сопленков К. И. Исследование стационарного и нестационарного критического истечения газо- и парожидкостных смесей: Автореф. дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук: М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979, 15 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.V.1980