

УДК 532.529

**ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПИСАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ДВУХФАЗНОЙ СМЕСИ
В СИЛЬНО НЕДОРАСШИРЕННОЙ СТРУЕ, ИСТЕКАЮЩЕЙ ИЗ
КОНИЧЕСКОГО СОПЛА НА ПРЕГРАДУ**

ГИЛИНСКИЙ М. М., ЗАК Л. И.

При истечении однофазной газовой сильно недорасширенной струи из конического сопла в пространство с очень низким давлением, когда число Маха на срезе сопла велико, так что крайняя характеристика второго семейства, отходящая от кромки сопла, не пересекает ось симметрии, течение в окрестности оси вплоть до всякого скачка будет совпадать с течением от точечного источника. В [1] показано, что течение для произвольного сопла на больших расстояниях от среза вблизи оси сильно недорасширенной струи можно с удовлетворительной точностью аппроксимировать точечным источником лишь при показателе адиабаты, большем 2 и $3/2$ для плоского и осесимметричного течений соответственно. В остальных случаях следует пользоваться другой асимптотикой, приведенной в [1].

В то же время численные расчеты двухфазных течений полидисперсной смеси, выполненные методом характеристик [2] или на основе схемы С. К. Годунова [3], показывают, что каждому размеру частиц соответствует некоторый предельный угол сепаратрисы, на который она выходит вдали от среза сопла. Можно приближенно считать, что движение частиц внутри этого угла обладает сферической симметрией с центром в точке пересечения асимптоты с осью симметрии течения. Аналогичные соображения можно высказать относительно истечения сильно недорасширенной плоской струи. Для приближенного описания двухфазного течения в таких струях целесообразно использовать асимптотический метод разложения искомых функций для газа и частиц, где в качестве нулевых членов фигурирует решение, соответствующее одномерному течению точечного источника. Ограничиваясь относительно малым средним размером частиц $a \ll 1$ мкм, можно в первом приближении считать, что центры источников газа и частиц совпадают.

1. Используя двухскоростную и двухтемпературную модель движения двухфазной смеси будем исходить из стационарной двумерной системы уравнений движения в полярных координатах r, θ , причем уравнения для частиц запишем в виде характеристических соотношений вдоль линий тока [3]

$$r \frac{d\theta}{dr} = \frac{v}{u}, \quad \frac{du}{dr} = \frac{f_r}{u} - \frac{v^2}{ur}, \quad \frac{dv}{dr} = \frac{f_\theta}{u} + \frac{v}{r}, \quad \frac{dT}{dr} = \frac{q}{u}$$

$$f_r = \Phi(r, \theta)(u_1 - u), \quad f_\theta = \Phi(r, \theta)(v_1 - v)$$

$$(1.1) \quad q = \Gamma Nu T_1^* (T_1 - T), \quad \Phi(r, \theta) = \beta C_{D\rho_1} [(u_1 - u)^2 + (v_1 - v)^2]^{1/2}$$

$$\beta = \frac{3}{8} \frac{\rho_1 r^*}{\rho^{(0)} a}, \quad \Gamma = \frac{3}{2} \frac{r^* \lambda_k a_{1*}^{2\alpha-1}}{a^2 (RT_k)^* C^{(0)} \rho^{(0)}}$$

В (1.1) опущены для краткости уравнения движения газа, параметры без индекса относятся к частицам, с индексом 1 — к газу, с индексом звездочка — к критическим значениям параметров газа, с индексом k внизу — к параметрам торможения, с индексом градус вверху — к физическим константам материала частиц, u, v — проекции вектора скорости на направления r и θ , a — скорость звука, ρ — плотность, T — температура, λ — коэффициент теплопроводности, C — удельная теплоемкость

материала частиц, Nu — число Нусельта, C_D — коэффициент сопротивления шаровой частицы в газовом потоке, ω — показатель степенной зависимости вязкости от температуры.

Коэффициенты C_D и Nu являются функциями относительных безразмерных параметров: числа Рейнольдса Re , числа Маха M и числа Прандтля Pr . Эти функции можно определить на основе эмпирических теорий либо теоретически, рассматривая обтекание отдельной шаровой частицы.

Система уравнений (1.1) приведена к безразмерному виду. Линейные размеры отнесены к радиусу звуковой окружности точечного источника r_* , плотность — к ρ_* , скорость — к a_{1*} , давление — к $\rho_* a_{1*}^2$, удельные внутренние энергии e_1 и e — к a_{1*}^2 , силы межфазного силового взаимодействия f_r, f_θ — к a_{1*}^2/r_* , а теплового — a_{1*}^3/r_* .

Далее полагаем, что влияние частиц на газ мало, так что можно ввести малый параметр $\delta \sim \rho/\rho_1$ и представить искомые функции в виде рядов по этому малому параметру. В нулевом приближении получаем для газа обычные уравнения Эйлера, а параметры частиц определяются из системы уравнений (1.1), в которой известны параметры газа, определяемые по формулам точечного источника, т. е. в этом приближении задачи об определении течения газа и частиц расщепляются и решаются последовательно.

Будем решать задачу нулевого приближения, раскладывая искомые функции в асимптотические ряды по второму малому параметру Δ , характеризующему отклонение течения от одномерного сферически- (или цилиндрически-) симметричного.

$$(1.2) \quad f(r, \theta) = f_0(r) + \Delta^2 f_1(r, \theta) + \dots, \quad g(r, \theta) = \Delta g_0(r) + \Delta^3 g_1(r, \theta) + \dots$$

где через $f(r, \theta)$ обозначены четные функции относительно параметра Δ , а через $g(r, \theta)$ — нечетные. В частном случае в качестве Δ может быть выбран полярный угол θ . Тогда $f(r, \theta)$ соответствуют $u_1, p_1, \rho_1, T_1, u, \rho, T$, а $g(r, \theta) - v_1, v$. Если в нулевом приближении для давления оставлять два первых члена ряда, то получается известный метод «усеченных рядов» Ван-Дайка, применяемый в задачах обтекания затупленных тел.

Ограничимся рассмотрением лишь первых членов рядов (1.2). Для описания течения газа используются известные формулы для точечного источника (нижний индекс 0 опустим)

$$(1.3) \quad u_1 = K^{-1/2}, \quad \rho_1 = \left(\frac{\xi}{K} \right)^{1/(\gamma-1)}, \quad T_1 = \frac{\xi}{K_1}$$

$$P_1 = \frac{1}{\gamma} (\xi K)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad r = \xi^{-1/\nu(\gamma-1)} K^{(\gamma+1)/2\nu(\gamma-1)}$$

$$\xi = M_1^{-2}, \quad K = K(\xi) = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1} \xi$$

где γ — показатель адиабаты, M_1 — число Маха, $\nu=1, 2$ для плоского и осесимметричного течений соответственно.

2. Проанализируем два случая силового взаимодействия частиц с газом: $C_D = \text{const}$ и $C_D = 24/Re$; в обоих случаях $Nu = \text{const}$. В первом случае уравнения нулевого приближения для частиц с начальными условиями имеют вид

$$(2.1) \quad \frac{d\theta}{dr} = 0, \quad \frac{du}{dr} = A\rho_1 \frac{(u_1 - u)^2}{u}, \quad \frac{dT}{dr} = BT_1^\circ \frac{T_1 - T}{u}$$

$$(2.2) \quad u(r^\circ) = u^\circ, \quad T(r^\circ) = T^\circ$$

Для грубых оценок можно взять $r^0 = u^0 = T^0 = 1$. Для более точных расчетов начальные значения могут быть выбраны, например, путем аппроксимации численных расчетов вблизи кромки сопла, либо из приближенных теорий для течения внутри сопла и на начальном сверхзвуковом участке струи. Так можно использовать квазиодномерное приближение с постоянным запаздыванием частиц [4].

Учитывая (1.3), целесообразно при численном интегрировании (2.1), (2.2) перейти к перемещной ξ :

$$(2.3) \quad \frac{dr}{d\xi} = \frac{K^l (\xi - 1)}{v(\gamma + 1) \xi^m}$$

$$(2.4) \quad \frac{du}{d\xi} = \frac{A}{v(\gamma + 1)} \frac{K^b (\xi - 1)}{\xi^d} \frac{(K^{-1/2} - u)^2}{u}$$

$$(2.5) \quad \frac{dT}{d\xi} = \frac{B}{v(\gamma + 1)} \frac{K^h (\xi - 1)}{\xi^g} \frac{(\xi K^{-1} - T)}{u}$$

$$m = 1 + \frac{1}{v(\gamma - 1)}, \quad l = \frac{\gamma + 1}{2v(\gamma - 1)} - 1, \quad b = l - \frac{1}{\gamma - 1}, \quad d =$$

$$= m - \frac{1}{\gamma - 1}, \quad h = l - \omega, \quad g = m - \omega$$

Здесь первые два уравнения интегрируются независимо от последнего. Температура частиц определяется после нахождения $u(\xi)$.

На фиг. 1 построены кривые зависимости скорости и температуры частиц и газа по результатам численного интегрирования уравнений (2.3)–(2.5) методом Рунге–Кутты. Расчеты проводились при $\gamma = 1, 2$ для двух вариантов: $v = 1, \beta C_D = 10^{-1}$ и $v = 2, \beta C_D = 1$. Кривые, помеченные цифрой 1, соответствуют параметрам частиц для плоского течения, а цифрой 2 – для осесимметричного, пунктир соответствует параметрам газа.

Для практических приложений полезно иметь достаточно простые явные аналитические зависимости $u(r)$ и $T(r)$, и поэтому рассмотрим приближенные подходы интегрирования (2.3)–(2.5). Уравнение (2.4) в плоском случае после введения независимой переменной упрощается и приобретает вид

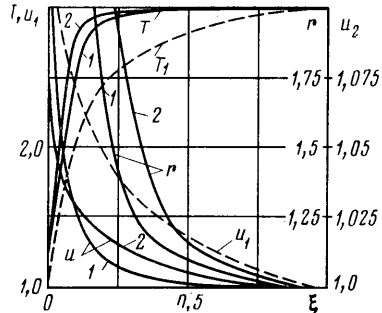
$$(2.6) \quad \frac{du}{dz} = A_1 \frac{(1 - z^2)(1 - zu)^2}{u(\epsilon z^2 - z^4)},$$

$$\epsilon = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad A_1 = \frac{A}{v(\gamma + 1)}$$

Решение задачи Коши (2.6), (2.2), например, можно при $u^0 = T^0 = 1$ представить в виде степенного ряда в окрестности начальных значений

$$u = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^{(k)}(1)}{k!} (z - 1)^k =$$

$$= 1 + A_1 \left[\frac{(z - 1)^4}{4(1 - \epsilon)} + \frac{19\epsilon - 43}{60(1 - \epsilon)^2} (z - 1)^5 + \dots \right]$$



Фиг. 1

Однако этот ряд является медленно сходящимся.

Существенных упрощений при интегрировании (2.3)–(2.5) не происходит, даже если рассмотреть предельный случай при $\gamma \rightarrow 1$, когда справедливы асимптотические формулы для точечного источника

$$u_1 = \zeta^{-1/2}, \quad \rho_1 = \sqrt{l} e^{-1/2 \zeta}, \quad T_1 = 1, \quad \zeta^{1/2} e^{1/2 \nu (\zeta^{-1})}$$

Рассматривая малую окрестность точки $\zeta = 0$ и ограничиваясь в разложении правых частей (1.3) членами $\zeta^{1/2 \nu (\gamma-1)}$, получаем асимптотику для $u(\zeta)$ в неявном виде

$$(2.7) \quad \nu = 1, \quad f(u) = M_1 \ln(\zeta_0/\zeta)$$

$$(2.8) \quad \nu = 2, \quad f(u) = \ln \left(\frac{V_m - u}{V_m - u_0} \right) + \frac{V_m}{V_m - u} - \frac{V_m}{V_m - u_0} = \\ = L_1 [\zeta_0^{1/2(\gamma-1)} - \zeta^{1/2(\gamma-1)}]$$

$$u_0 = u(\zeta_0), \quad L_1 = \beta C_D \left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right]^{(3-\gamma)/4(\gamma-1)}$$

$$M_1 = \frac{\beta C_D V_m}{\gamma+1}, \quad V_m = \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right]^{1/2}$$

Асимптотика уравнения (2.5) имеет вид

$$T = T_0 \exp \left\{ \beta V_m^2 \zeta^2 \left(\frac{1}{u - V_m} - \frac{1}{u_0 - V_m} \right) \right\}$$

$$\Omega = \omega - \frac{1}{\gamma-1}, \quad T_0 = T(\zeta_0)$$

где V_m — максимальная скорость газа и $\Omega < 0$ для обычно встречающихся ω и γ .

Из соотношений (2.7), (2.8) следует, что имеется качественное отличие асимптотического поведения частиц в осесимметричном и плоском течениях. Для осесимметричного случая скорость u , экспоненциально возрастая, стремится к некоторому пределу u_∞ , величина которого определяется из трансцендентного уравнения (2.8) при $\zeta = 0$. Так, при $\gamma = 1, 2$, $\beta C_D = 1, 33$, $u_0 = 1$, $\zeta_0 = 1$, $u_\infty = 0,6 \cdot V_m$, т. е. на бесконечности имеется отставание частиц от газа.

В плоском течении из (2.7) следует, что при $\zeta \rightarrow 0$, $u \rightarrow V_m$, т. е. скорость частиц стремится к максимальной скорости. В обоих случаях температура частиц стремится экспоненциально к 0.

3. Рассмотрим случай стоксовского обтекания частицы $C_D = 24 \text{ Re}$, $\text{Nu} = 2$. Система уравнений, аналогичная (2.4)–(2.5), имеет вид ($\omega = 0$)

$$(3.1) \quad \frac{du}{dr} = A_2 \frac{u_1 - u}{u}, \quad \frac{dT}{dr} = B_2 \frac{T_1 - T}{u}$$

Трудность использования элементарного решения для течения газа от сферического или цилиндрического источника заключается в том, что зависимость $\zeta(r)$ и всех других газодинамических функций от r неявная. Выпишем простую явную приближенную формулу для функции $\zeta(r)$, справедливую внутри интервала $1 \leq r \leq r_1$. Для этого функцию $r(\zeta)$ запишем в виде

$$\zeta r^{\nu(\gamma-1)} = K(\zeta) K^{(\gamma-1)/2}(\zeta)$$

и второй множитель в правой части аппроксимируем линейной функцией по ζ , так чтобы эта функция на краях интервала $[\zeta_1, 1]$ совпадала со значениями $K^{(\gamma-1)/2}(\zeta_1) = K_1$ и 1 соответственно. Для определения $\zeta(r)$ будем иметь квадратное уравнение и, выбирая корень, имеющий физи-

ческий смысл, окончательно будем иметь

$$(3.2) \quad \zeta = [b_1(r) - (b_1^2(r) - 4a_1c_1)^{1/2}] / 2a_1, \quad b_1 = (1 - \zeta_1)r^{\nu(\gamma-1)} - b_{10}$$

$$a_1 = \frac{2}{\gamma+1}(1-K_1), \quad b_{10} = \frac{2}{\gamma+1}(K_1 - \zeta_1) + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}(1-K_1),$$

$$c_1 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}(K_1 - \zeta_1)$$

Расчеты $u_1(r)$ и $T_1(r)$, проведенные по точным формулам (1.3) и с использованием (3.2) для интервала $1 \leq r \leq 20$ ($\gamma=1, 2$ и $\nu=2$), показали, что оба решения практически совпадают. Следует отметить, что зависимость $\zeta(r)$ от ζ_1 слабая. Максимальное отличие приближенного решения от точного в практически интересном интервале при $r > 3$ не превышает $\sim 5\%$.

Подстановка (3.2) в первое уравнение (3.1) сводит его после замены $x = A_2 r$, $y = u^2/2$ к нелинейному уравнению первого порядка, разобранным в [5] (п. 1.55, стр. 300). Однако общее решение этого уравнения в квадратурах, выраженное в элементарных функциях, удастся получить лишь для специальных случаев вида функции $u_1(r)$.

Асимптотика решения уравнений (3.1) в окрестности точки $\zeta=0$ и точки $\zeta_1=1$ при $u^0 = T^c = 1$ имеет вид

$$(3.3) \quad V_m \ln \left(\frac{V_m - u}{V_m - u_0} \right) - (u_0 - u) = A_3 [\zeta_0^{-1/\nu(\gamma-1)} - \zeta^{-1/\nu(\gamma-1)}] + \dots$$

$$T = T_0 \exp [B_3 (\zeta^c - \zeta_0^c)] + \dots,$$

$$A_3 = A_2 \left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right]^{(\gamma+1)/2\nu(\gamma-1)}$$

$$(3.4) \quad u = 1 - \frac{A_2}{3\nu(\gamma+1)^2} (\zeta-1)^3 + \dots, \quad T = 1 + \frac{B_2(\gamma-1)}{3\nu(\gamma+1)} (\zeta-1)^3 + \dots$$

Отсюда следует, что в случае стоксовского обтекания на бесконечности по r имеет место равновесие по скорости и температуре частиц и газа.

Решение первого уравнения (3.1) элементарно для обратной задачи, когда задана функция $u_1(u)$. В этом случае переменные в (3.1) разделяются и решение получаем в виде

$$(3.5) \quad y + C = \int f(u) du, \quad f(u) = \frac{u}{u_1 - u}, \quad y = A_2(r-1)$$

которое с учетом связи $u_1 = u_1(u)$ дает в параметрическом виде зависимость $u_1 = u_1(y)$. Согласно (1.3), (3.3), (3.4), функция $f(u)$ должна удовлетворять условиям

$$(3.6) \quad f^{-1}(1) = [f'_u(1)]^{-1} = f^{-1}(V_m) = 0$$

Приближенное решение прямой задачи для (3.1) можно получить, если задать $f(u)$, удовлетворяющую (3.6) с неопределенными параметрами (либо функциями), которые затем следует определить из условия наилучшего совпадения с заданной функцией. В частности, в качестве такой функции может быть выбрана следующая:

$$f(u) = N_1(u-1)^\alpha (V_m - u)^\beta, \quad -1 < \alpha < 0, \quad -1 < \beta < 0$$

и при $\alpha = \beta$ решение (3.5) выражается через элементарные функции. Рассматривая решение вблизи точки $u=1$ и положив $\beta=0$, получаем реше-

ние в явном виде от y через степенные функции

$$u = 1 + \left[\frac{(1+\alpha)y}{N_1} \right]^{1/(1+\alpha)}$$

$$u_1 = \left\{ 1 + \left[\frac{(1+\alpha)y}{N_1} \right]^{1/(1+\alpha)} \right\} \left\{ 1 + N_1 \left[\frac{(1+\alpha)y}{N_1} \right]^{-\alpha/(1+\alpha)} \right\}$$

Аналогичные аппроксимации получаются в окрестности точки $u=V_m$. Анализ численного решения (3.1) при $B_1=A_1$ показывает, что при $A_2 r > 6$ скорость частиц близка к равновесной, так что для ее определения можно пользоваться приближенной явной формулой (3.2), заменив в ней r на $A_2 r$.

4. Пусть двухфазный поток от недорасширенной струи натекает на плоскую преграду; либо затупленное тело, либо во встречный сверхзвуковой поток. Ограничимся рассмотрением окрестности линии симметрии, для которой справедлив приближенный подход п. 1.

Распределение скорости и температуры идеального газа поперек ударного слоя перед преградой с высокой точностью аппроксимируется линейной функцией [6]. Это обстоятельство позволяет проинтегрировать уравнения (3.1). Поместим начало координат в точку торможения газа на преграде и введем новую независимую переменную $x=u_1(r)=u_{1s}r/r_s$, где u_{1s} — величина скорости газа за центральным скачком в точке $r=r_s$ на оси симметрии. В плоскости x, u начало координат будет особой точкой однородного уравнения первого порядка. Замена $u=x\vartheta$ сводит его к уравнению с разделяющимися переменными.

Тип особой точки этого уравнения определяется величиной корней характеристического уравнения

$$\lambda^2 + A_3 \lambda - A_3 = 0, \quad A_3 = A_2 r_s / u_{1s}, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-A_3 \pm D^{1/2}), \quad D = A_3^2 + 4A_3$$

При $A_3 \geq 0$ ($0 \leq \lambda_1 \leq 1$, $-\infty \leq \lambda_2 \leq 0$) особая точка — седло, при $-4 < A_3 < 0$ ($\lambda_{1,2} = p + iq$) — фокус, при $A_3 = -4$ ($\lambda_1 = \lambda_2 = 2$) — вырожденный узел и при $A_3 < -4$ ($1 < \lambda_1 < 2$, $2 < \lambda_2 < +\infty$) — узел.

Аналитическое представление решения уравнений (3.1) в параметрическом виде зависит от знака дискриминанта D и имеет вид [7] $u = x\vartheta$:

$$(4.1) \quad x(\vartheta) = c_1 (\vartheta^2 + A_3 \vartheta - A_3)^{-1/2} \exp \left[\frac{A_3}{\sqrt{-D}} \arctg \frac{2\vartheta + A_3}{\sqrt{-D}} \right] \quad (D < 0)$$

$$x(\vartheta) = c_1 (\vartheta - \lambda_1)^{\alpha-1} (\vartheta - \lambda_2)^{-\alpha} \quad (D > 0)$$

$$x(\vartheta) = c_1 (\vartheta - 2)^{-1} \exp [2/(\vartheta - 2)] \quad (D = 0)$$

и

$$T(\vartheta) = c_2 \exp \left[\frac{2B_3}{\sqrt{-D}} \arctg \frac{2\vartheta + A_3}{\sqrt{-D}} \right] + E_1 x (A_3 + \vartheta - B_3) + \frac{n}{B_3} \quad (D < 0)$$

$$T(\vartheta) = c_2 w^\beta + c_1 N w^\alpha [p w^{-1} - (1+p)] + b_2 w, \quad w = \frac{\vartheta - \lambda_1}{\vartheta - \lambda_2} \quad (D > 0)$$

$$T(\vartheta) = c_2 \exp [-B_3 / (\vartheta - 2)] +$$

$$+ m c_1 [(\vartheta - 2)^{-1} + B_3^{-1}] \exp \left(\frac{2}{\vartheta - 2} \right) + n \quad (D = 0)$$

$$E_1 = -mD / (B_3^2 - A_3 B_3 - A_3), \quad \alpha = \lambda_2 / (\lambda_2 - \lambda_1), \quad \beta = B_3 (\lambda_1 - \lambda_2)$$

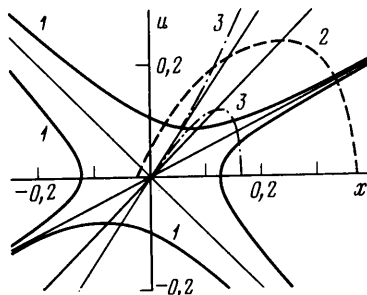
$$P = \frac{B_3 + \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad m = \frac{B_2 a_1}{a^2 (2 + B_3)}, \quad N = \frac{B_3 a_1}{a (B_3 + \lambda_1) (B_3 + \lambda_2)}, \quad T_1 = a_1 r + b_1$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные, определяемые начальными значениями на ударной волне u_s, x_s .

В частном случае для $A_3 = -4,5$, ($\lambda_1 = 1,5, \lambda_2 = 3$) скорость частиц вычисляется по явной формуле $u/c_1 = 3x/c_1 + 1 \pm \sqrt{3x/c_1 + 1}$.

На фиг. 2 приведено несколько интегральных кривых для трех значений A_3 ($1 - D > 0, A_3 > 0$ ($A_3 = 0,5$), $|c_1| = 0,1$; $2 - D < 0, -4 < A_3 < 0$ ($A_3 = -2$), $c_1 = 0,05$; $3 - D \geq 0, A_3 < 0$ ($A_3 = -4,5$), $c_1 = 1$), соответствующих случаям, когда особая точка уравнений (3.1) есть фокус, седло, узел. При построении интегральной кривой в случае фокуса удобнее пользоваться не первой формулой (4.1), а, перейдя от уравнений (3.1) к динамической системе, записать решение в параметрическом виде от времени. В этом случае решение (3.1) имеет вид

$$\begin{aligned} x &= c_2 e^{-A_2 t/2} \sin qt \\ u &= c_2 e^{-A_2 t/2} \left(q \cos qt - \frac{A_2}{2} \sin qt \right) \\ q &= [-(A_2^2 + 4A_2 u_s)]^{1/2} \end{aligned}$$



Фиг. 2

Полученное точное решение задачи можно использовать в целом ряде задач. Например, при анализе движения частиц по поверхности затупленного тела вблизи точки торможения потока, где поток есть линейно-ускоряющийся с переменной знака скорости в этой точке. Другим примером может служить окрестность критической линии при взаимодействии сверхзвуковой двухфазной струи со встречным потоком. Здесь скорость газа меняет знак при переходе через точку торможения и, вообще говоря, изменяется величина градиента, т. е. значение A_3 . Встречное взаимодействие частиц с газом может возникать при сильном вдуве мелких частиц через поверхность затупленного тела и т. д.

В случае натекания двухфазной струи на преграду или во встречный поток для ударного слоя имеем $A_3 < 0$, так что особая точка — либо узел, либо фокус. Поэтому при $A_3 > -4$ частицы, тормозясь в ударном слое газом, сохраняют положительную скорость при подходе к поверхности тела. При $A_3 < -4$ достаточно мелкие частицы тормозятся газом до нулевой скорости.

Если частица движется навстречу газу, что имеет место при попадании частиц в ударный слой внешнего потока при встречном взаимодействии его со струей, то происходит торможение частиц и скорость их может обращаться в нуль внутри ударного слоя. Точка, где это происходит, определяется, если положить в (4.1) $u=0$, что дает

$$\begin{aligned} x_* &= \sqrt{1 - u_0 - \frac{u_0^2}{A_3^{(2)}}} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{A_3^{(2)}}{\sqrt{-D}} \arctg \left[\frac{-2\sqrt{-D_2} u_0}{\sqrt{-D_2} x_0^{(2)} + A_3^{(2)} (2u_0 + A_3^{(2)} x_0^{(2)})} \right] \right\} \quad (D_2 < 0) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$x_* = \left(x_0^{(2)} - \frac{u_0}{2} \right) \exp \left\{ - \left[1 + \frac{x_0^{(2)}}{1/2 u_0 - x_0^{(2)}} \right] \right\} \quad (D_2 = 0)$$

Здесь в качестве начальных значений $x_0^{(2)}$, u_0 можно, в частности, взять значения на контактной поверхности, отделяющей газ струи от газа потока, так что $x_0^{(2)} = 0$, параметры $A_3^{(2)}$ и D_2 соответствуют области равномерного течения. Начальное значение u_0 определим, положив в (4.1) $x=0$, так что

$$u_0 = x_0^{(1)} \sqrt{\vartheta_0^{(1)2} + A_3^{(1)} \vartheta_0^{(1)} - A_3^{(1)}} \exp \left\{ \frac{A_3^{(1)}}{\sqrt{-D_1}} \left[\frac{\pi}{2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{arctg} \left(\frac{2\vartheta_0^{(1)} + A_3^{(1)}}{\sqrt{-D_1}} \right) \right] \right\} \quad (D_1 < 0) \\ u_0 = 2x_0^{(1)} \quad (D_1 = 0)$$

где величины с индексом 0 соответствуют значениям параметров за скачком в струе. Формулы (4.2) справедливы до тех пор, пока выполняется условие $x_1 < x_s^{(2)}$. В противном случае нужно дополнительно рассматривать движение частиц в равномерном поступательном потоке, где решение системы (3.1) также получается в элементарной форме, аналогичной асимптотике при $\zeta \rightarrow 0$ в струе (3.3).

Используя следующие члены в разложении (1.2), можно определить окружную скорость v , отклонение линий тока частиц от радиального направления и все течение в ударном слое в окрестности точки торможения, в частности вычислить коэффициент осаждения частиц на преграду подобно [8]. Опуская для краткости это решение, укажем лишь, что если допустить возможность движения мелких частиц после попадания на стенку преграды по поверхности, то при линейном распределении окружной скорости газа (например, для сферической преграды) изменение скорости v частиц описывается простым степенным законом (4.1), причем координата x здесь должна быть заменена на продольную координату θ .

В заключение отметим, что в отличие от работ [8, 9], посвященных решению аналогичной задачи, полученные в данной работе простые аналитические зависимости для параметров газа и частиц в сильно недорасширенных струях и ударном слое перед преградой сильно упрощают расчеты, в частности теплового излучения в двухфазных потоках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крайко А. Н., Шеломовский В. В. О свободном расширении двумерных струй идеального газа.— ПММ, 1980, т. 44, № 2, с. 271—280.
2. Клигель Дж., Никерсон Г. Течение смеси газа и твердых частиц в осесимметричном сопле.— В кн.: Детонация и двухфазное течение. М.: Мир, 1966, с. 183—201.
3. Благоданов В. И., Гилинский М. М., Стасенко А. Л. Численное исследование двухфазных стационарных сверхзвуковых течений в соплах и струях, истекающих в затопленное пространство или спутный поток.— В кн.: Струйные и отрывные течения. М., 1979, с. 95—105.
4. Клигель Дж. Течение смеси газа с частицами в сопле.— Вопр. ракетной техники, 1965, № 10, с. 3—29.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
6. Гилинский С. М., Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П. Метод расчета сверхзвукового обтекания затупленных тел с отошедшей ударной волной.— Изв. АН СССР. Мех. и маш., 1964, № 4, с. 9—28.
7. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов. М.: Наука, 1964, 228 с.
8. Храмов Н. Е. Окрестность критической точки тупого тела в двухфазной гиперзвуковой струе.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 4, с. 169—172.
9. Васильков А. П. Окрестность критической точки затупленного тела в гиперзвуковом двухфазном потоке.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 5, с. 121—129.

Москва

Поступила в редакцию
7.IV.1980