

УДК 532.526

**ОСОБОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ,  
НЕПРЕРЫВНО ПРОДОЛЖИМОЕ ЧЕРЕЗ ТОЧКУ НУЛЕВОГО  
ПОВЕРХНОСТНОГО ТРЕНИЯ**

**РУБАН А. И.**

Показано, что уравнения Прандтля для несжимаемого пограничного слоя допускают решение, непрерывно продолжимое через точку нулевого трения на обтекаемой поверхности и являющееся особым в этой точке. Решение такого типа реализуется, в частности, на передней кромке тонкого профиля, расположенного под углом атаки к набегающему потоку.

1. Согласно концепции Прандтля [1], при любых, сколь угодно больших числах Рейнольдса, ответственным за появление отрыва потока от обтекаемой поверхности является вязкий пограничный слой, развивающийся вдоль этой поверхности. Точка отрыва совпадает с точкой нулевого трения, которая может появиться в пограничном слое в результате действия на него неблагоприятного градиента давления, распределенного на некотором участке поверхности перед точкой отрыва. Этот градиент давления формируется во внешнем невязком потоке и сохраняется поперек пограничного слоя.

Фундаментальное исследование свойств уравнений Прандтля в окрестности точки нулевого трения было выполнено в [2] (см. также [3, 4]). Оказалось, что при заданном градиенте давления решение этих уравнений является особым перед этой точкой (за исключением некоторых специальных распределений давления). Причем, и это особенно важно, такое решение не может быть продолжено через точку нулевого трения на основе теории пограничного слоя. В то же время ясно, что в малой окрестности особой точки предположения теории пограничного слоя нарушаются. В самом деле, решение Гольдштейна дает перед этой точкой бесконечный рост градиента толщины вытеснения пограничного слоя, приводящий в итоге к заметному влиянию этого слоя на внешний поток, а значит, и к перераспределению давления.

В связи с этим обстоятельством окрестность особой точки была исследована в [5] на основе уравнений Навье — Стокса. Используя метод сращиваемых асимптотических разложений, в этой работе сформулирована соответствующая предельная краевая задача. Оказалось, однако, что эта задача не имеет решения. Таким образом, решение уравнений Прандтля, содержащее особенность Гольдштейна, не может описывать реального течения.

Существуют, однако, течения, для которых решение уравнений Прандтля при заданном градиенте давления может быть непрерывно продолжено через точку нулевого трения и остается при этом особым. Исследованию такой возможности посвящена настоящая работа.

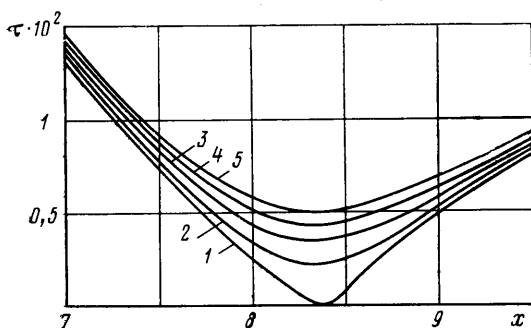
Задача для несжимаемого пограничного слоя состоит в определении компонент скорости жидкости  $u$ ,  $v$ , которые в области  $0 < x < x'$ ,  $0 < y < +\infty$

удовлетворяют уравнениям и краевым условиям

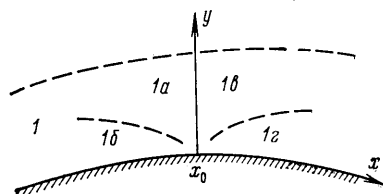
$$(1.1) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{dp}{dx} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0, \quad u(x, \infty) = U_e(x), \quad u(0, y) = U_0(y)$$

Задача (1.1) записана в безразмерных переменных. В качестве характерной скорости выбрана скорость невозмущенного потока  $V_\infty$ , характерной длины  $L$  — характерный размер обтекаемого тела; плотность жидкости обозначена через  $\rho$ , кинематическая вязкость —  $\nu$ , эти величины посто-



Фиг. 1



Фиг. 2

яны по всему полю течения. Ось  $x$  ортогональной системы координат  $x, y$  совмещена с поверхностью обтекаемого тела, ось  $y$  направлена по нормали к ней; расстояние вдоль оси  $x$  отнесено к  $L$ , а вдоль оси  $y$  — к  $LR^{-1/2}$ ,  $R = V_\infty L / \nu$  — число Рейнольдса. Компоненты скорости обозначены через  $u, v$  и отнесены к  $V_\infty$  и  $V_\infty R^{-1/2}$  соответственно;  $p$  — приращение давления (по отношению к его значению в невозмущенном потоке), отнесенное к  $\rho V_\infty^2$ .

Функции  $U_e(x)$ ,  $U_0(y)$  считаются заранее известными, а градиент давления связан со скоростью на внешней границе пограничного слоя уравнением Бернулли  $p' = -U_e U_e'$ .

Будем далее предполагать, что градиент давления, а вместе с ним и решение задачи (1.1) зависят от некоторой переменной  $k$  как от параметра. Предположим, кроме того, что при всех  $k < k_0$  трение  $\tau = \partial u / \partial y$  на обтекаемой поверхности  $y=0$  имеет внутри рассматриваемой области  $0 < x < x'$  минимум, величина которого уменьшается до нуля при  $k \rightarrow k_0$ .

Такая ситуация была обнаружена в работах [6, 7], посвященных численному анализу пограничного слоя на параболической передней кромке тонкого профиля при наличии угла атаки. Результаты расчета этого течения, полученные автором настоящей статьи с помощью схемы Крэнка — Никольсона, приведены на фиг. 1 для окрестности точки минимального трения, где  $x$  отсчитывается вдоль контура параболы от точки торможения внешнего невязкого потока, а в качестве параметра задачи  $k$  выбрано безразмерное расстояние от точки торможения до оси симметрии параболы (см. [7]). Роль характерной длины  $L$  в данном случае играет радиус носика профиля. Цифрой 1 обозначено распределение трения, соответствующее критическому значению  $k_0 = 1,1556$ . Последующие кривые построены с интервалом значений  $k$ , равным  $-0,0003$ .

Принципиальный интерес представляет исследование тонкой структуры решения уравнений (1.1) в окрестности точки нулевого трения на стенке. В этом исследовании будем использовать метод сращиваемых асимпто-

тических разложений (например, [8]), применяя его к уравнениям (1.1) при  $\Delta k = k - k_0 \rightarrow 0$ .

Рассмотрим сначала область 1, где  $x \infty y \infty 1$  (фиг. 2). Ясно, что в этой области решение рассматриваемых уравнений может быть представлено в виде

$$(1.2) \quad \psi = \psi_0(x, y) + \Delta k \psi_1(x, y) + \dots, \quad p = p_0(x) + \Delta k p_1(x) + \dots$$

Здесь через  $\psi$  обозначена функция тока:  $u = \partial \psi / \partial y$ ,  $v = -\partial \psi / \partial x$ .

Основные члены разложения (1.2) удовлетворяют обычным уравнениям Прандтля

$$(1.3) \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} = -\frac{dp_0}{dx} + \frac{d^3 \psi_0}{dy^3},$$

$$\psi_0|_{y=0} = \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$$

Обозначим через  $x_0$  координату точки, в которой трение на стенке обращается в нуль, и рассмотрим асимптотическое разложение функции тока  $\psi_0(x, y)$  при  $s = x - x_0 \rightarrow 0$ . Ясно, что это разложение не может быть однозначно определено в рамках локального анализа окрестности точки  $x = x_0$ . Дело в том, что распределение функции тока в окрестности рассматриваемой точки зависит от краевых условий вверх по потоку от этой точки. Следовательно, искомое разложение должно включать в себя собственные функции задачи (1.3), определяемые с точки зрения ее локального анализа. Только в этом случае разложение для функции тока будет содержать набор произвольных постоянных в виде коэффициентов перед собственными функциями. Значения этих коэффициентов могут быть в конечном счете вычислены при полном решении задачи (1.3), учитывающем конкретный вид всех краевых условий.

Следуя [2, 9], рассмотрим сначала вязкий пристеночный слой (16 на фиг. 2), в котором  $y = O(-s)^{1/4}$ . Асимптотическое разложение функции тока для этого слоя будем искать в виде

$$(1.4) \quad \psi_0 = (-s)^{3/4} \frac{1}{6} p_{00} \eta^3 + (-s)^\alpha f_{01}(\eta) + (-s)^{2\alpha - 3/4} f_{02}(\eta) + \dots,$$

$$\eta = y(-s)^{-1/4}$$

Первый член этого разложения соответствует известной асимптотике решения уравнений Прандтля при  $y \rightarrow 0$  в точке с нулевым значением трения на стенке (в этой точке  $\partial^3 \psi_0 / \partial y^3 = p_{00}$ ). Через  $p_{00}$  здесь обозначен первый член разложения для градиента давления

$$(1.5) \quad p_0' = p_{00} + p_{01}(-s) + \dots, \quad p_{00} > 0.$$

Второй член разложения (1.4) представляет собой собственную функцию с неизвестным заранее собственным числом  $\alpha$ . Показатель степени в третьем члене этого разложения подбирается таким, чтобы уравнение для  $f_{02}(\eta)$  было неоднородным и содержало в качестве свободного члена функцию, выражающуюся через  $f_{01}(\eta)$ . Заметим, наконец, что разложение (1.4) должно содержать еще вынужденные члены, связанные с последующими членами в градиенте давления (1.5). Однако эти члены не влияют на результаты настоящего анализа и будут в дальнейшем опущены.

Подставляя (1.4) в (1.3), получим

$$(16) \quad f_{01}''' - \frac{1}{8} p_{00} \eta^3 f_{01}'' + \frac{1}{2} p_{00} \left( \alpha + \frac{1}{4} \right) \eta^2 f_{01}' - p_{00} \alpha \eta f_{01} = 0$$

$$f_{01}(0) = f_{01}'(0) = 0$$

Это уравнение имеет три линейно-независимых решения [2]; разложения которых в ряд Тейлора около точки  $\eta=0$ , начинаются соответственно с 1,  $\eta$ ,  $\eta^2$ . Первые два решения не удовлетворяют краевым условиям и должны быть отброшены. Что касается третьего решения, то оно тождественно равняется  $\eta^2$ . Таким образом, решение уравнения (1.6) существует при всех  $\alpha$  и имеет вид

$$f_{01}(\eta) = \frac{1}{2} a_0 \eta^2$$

где  $a_0$  — произвольная постоянная, которую будем считать положительной, поскольку трение  $\partial^2 \psi / \partial y^2$  больше нуля при всех  $x < x_0$ .

Для определения величины  $\alpha$  необходимо еще рассмотреть третий член разложения (1.4)

$$(17) \quad f_{02}''' - \frac{1}{8} p_{00} \eta^3 f_{02}'' + p_{00} \left( \alpha - \frac{1}{4} \right) \eta^2 f_{02}' - p_{00} \left( 2\alpha - \frac{3}{4} \right) \eta f_{02} =$$

$$= \frac{1}{4} (1 - 2\alpha) a_0^2 \eta^2$$

$$f_{02}(0) = f_{02}'(0) = 0$$

Частным решением уравнения (1.7) является, например, линейная функция  $(a_0^2 / 2p_{00}) \eta$ . Три линейно-независимых решения однородной части этого уравнения могут быть выбраны такими, чтобы их разложения в степенные ряды начинались соответственно с 1,  $\eta$  и  $\eta^2$ . Первые два решения обозначим через  $h_\alpha(\eta)$  и  $g_\alpha(\eta)$ , а относительно третьего заметим, что оно тождественно равняется  $\eta^2$ . Поэтому решение уравнения (1.7), удовлетворяющее краевым условиям при  $\eta=0$ , имеет вид

$$f_{02} = \frac{a_0^2}{2p_{00}} (\eta - g_\alpha) + \frac{1}{2} b_0 \eta^2$$

Здесь  $b_0$  — произвольная постоянная, а функция  $g_\alpha(\eta)$  представляется степенным рядом

$$(18) \quad g_\alpha = - \left( \frac{1}{4}! \right) \frac{1}{(-2\alpha)!} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{p_{00}}{32} \right)^m \frac{(m-2\alpha)!}{(m+1/4)! m! (4m-1)!} \eta^{4m+1}$$

который может быть получен из ряда для вырожденной гипергеометрической функции  $F$  (см., например, [10]) с помощью соотношения

$$g_\alpha = \eta - \eta^2 \int_0^1 \eta^{-2} \left[ F \left( 1 - 2\alpha, \frac{5}{4}, \frac{p_{00}}{32} \eta^4 \right) - 1 \right] d\eta$$

Здесь  $z! = \Gamma(z+1)$  — гамма-функция Эйлера.

Заметим теперь, что вырожденная гипергеометрическая функция имеет при  $\eta \rightarrow \infty$  экспоненциально растущую асимптотику. Поэтому функция  $g_\alpha(\eta)$ , а вместе с ней и  $f_{02}(\eta)$  также растут экспоненциально при боль-

ших  $\eta$ . Последнее свидетельствует о невозможности сращивания решений для вязкого слоя  $1б$  и основной части пограничного слоя  $1а$  (фиг. 2), где  $y=O(1)$ . Исключения составляют полуцелые значения  $\alpha$ :

$$\alpha = m/2, m = 1; 2; 3, \dots$$

при которых ряд (1.8) обрывается на члене с номером  $m-1$ , превращая функцию  $g_\alpha(\eta)$  в простой полином.

Возвращаясь к разложению (1.4), заметим, что оно имеет смысл только при  $\alpha > 3/4$ . Поэтому первая собственная функция в этом разложении соответствует  $\alpha=1$ . Ясно, что в общем случае (без специального подбора крайних условий) коэффициент  $a_0$  перед этой функцией отличен от нуля. Такая ситуация как раз и была рассмотрена в [2]. При этом оказалось, что решение [2] не может быть продолжено за точку  $x=x_0$ . Поэтому условие продолжимости решения требует исключения из разложения (1.4) члена с  $\alpha=1$ . Этот случай как раз и реализуется для функции  $\psi_0(x, y)$ , так как эта функция может рассматриваться в качестве предела решения уравнений (1.1) при  $k \rightarrow k_0$ . В то же время ясно, что при всех  $k < k_0$  решение уравнений (1.1) существует по обе стороны от точки  $x=x_0$ .

Полагая на этом основании  $\alpha=3/2$ , получим окончательно, что решение (1.4) для вязкого слоя  $1б$  принимает вид

$$\psi_0 = (-s)^{3/4} \frac{1}{6} p_{00} \eta^3 + (-s)^{1/2} f_{01}(\eta) + (-s)^{3/4} f_{02}(\eta) + \dots, \quad \eta = y(-s)^{-1/4} \quad (1.9)$$

$$f_{01} = \frac{1}{2} a_0 \eta^2, \quad f_{02} = \frac{1}{2} b_0 \eta^2 - \frac{a_0^2}{120} \eta^5 + \frac{p_{00} a_0^2}{40 \cdot 320} \eta^9$$

Это выражение и принцип сращивания асимптотических разложений [8] показывают, что в основной части пограничного слоя ( $1а$  на фиг. 2), где  $y=O(1)$ , разложение функции тока будет

$$\psi_0(x, y) = \psi_{00}(y) + (-s)\psi_{01}(y) + \dots, \quad s \rightarrow -0 \quad (1.10)$$

Подставляя (1.10) в уравнение Прандтля (1.3) и сращивая его с решением для вязкого слоя (1.9), получим

$$\frac{\psi_{01}}{\psi_{00}'} = \frac{a_0}{p_{00}} + \int_0^y \frac{p_{00} - \psi_{00}'''}{(\psi_{00}')^2} dy, \quad (1.11)$$

$$\psi_{00} = \frac{1}{6} p_{00} y^3 + \frac{p_{00} a_0^2}{40 \cdot 320} y^9 + \dots, \quad y \rightarrow 0$$

2. Будем, далее, искать продолжение полученного решения за точку  $x=x_0$ , считая функцию тока непрерывной в этой точке. Последнее означает, что при  $y=O(1)$  и  $s \rightarrow +0$  функция тока стремится к  $\psi_{00}(y)$  и может быть поэтому представлена в  $1в$  (фиг. 2) следующим асимптотическим разложением:

$$\psi_0(x, y) = \psi_{00}(y) + s\psi_{01}^*(y), \dots, \quad s \rightarrow +0 \quad (2.1)$$

Критическим для настоящего анализа является вопрос о существовании решения уравнений Прандтля в вязком пристеночном слое  $1г$  (фиг. 2), где  $\eta = ys^{-1/4} = O(1)$ . Будем его искать в виде

$$\psi_0(x, y) = s^{3/4} \frac{1}{6} p_{00} \eta^3 + s^{1/2} f_{01}^*(\eta) + s^{3/4} f_{02}^*(\eta) + \dots, \quad s \rightarrow +0 \quad (2.2)$$

Легко проверить, что функции

$$(2.3) \quad f_{01}^* = \frac{1}{2} a_0^* \eta^2, \quad f_{02}^* = \frac{1}{2} b_0^* \eta^2 + \frac{(a_0^*)^2}{120} \eta^5 + \frac{p_{00} (a_0^*)^2}{40 \cdot 320} \eta^9$$

удовлетворяют уравнению (1.3), а также условиям прилипания на стенке (через  $a_0^*$  и  $b_0^*$  здесь обозначены произвольные постоянные). При этом условие срачивания с решением в основной части пограничного слоя (2.1), (1.11) удовлетворяется, если  $(a_0^*)^2 = a_0^2$ .

Таким образом, решение уравнений Прандтля может быть продолжено за точку нулевого трения на стенке двумя способами. Первый из них ( $a_0^* = -a_0$ ) хорошо известен из работы [2] и соответствует гладкому поведению гидродинамических функций в окрестности рассматриваемой точки. Существует, однако, и вторая возможность, которая реализуется при

$$(2.4) \quad a_0^* = a_0$$

В этом случае решение оказывается особым. В частности, распределение трения на поверхности тела выражается формулой

$$(2.5) \quad \left. \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \right|_{y=0} = a_0 |x - x_0| + \dots, \quad x \rightarrow x_0$$

которая может быть получена из соотношения (1.9), справедливого при  $x < x_0$ , и соотношений (2.2), (2.3), описывающих распределение функции тока при  $x > x_0$ .

Особенность проявляется и в форме линий тока. Для ее выявления рассмотрим выражение (2.1). Подставляя его в уравнение (1.3) и производя срачивание с решением в вязком слое (2.2), (2.3), получим

$$\frac{\psi_{01}^*}{\psi_{00}'} = \frac{a_0^*}{p_{00}} + \int_0^y \frac{\psi_{00}''' - p_{00}}{(\psi_{00}')^2} dy$$

Это соотношение вместе с (1.11) и (2.4) показывает, что наклон линий тока в пограничном слое терпит разрыв при переходе через линию  $x = x_0$ :

$$\frac{v_0}{u_0} = - \frac{\partial \psi_0 / \partial x}{\partial \psi_0 / \partial y} = - \frac{a_0}{p_{00}} \text{sign}(x - x_0) + \int_0^y \frac{p_{00} - \psi_{00}'''}{(\psi_{00}')^2} dy$$

3. Рассмотрим здесь решение уравнений Прандтля (1.1) при условии, что параметр задачи  $k$  отличается от своего критического значения  $k_0$  на малую, но не равную нулю величину. В результате будет показано, в частности, что из двух найденных выше решений предельным при  $k \rightarrow k_0 - 0$  является то, которое имеет особенность в точке нулевого трения.

Подставим разложение (1.2) в уравнения (1.1) и произведем предельный переход при  $\Delta k = k - k_0 \rightarrow 0$ . Для функции  $\psi_1(x, y)$  получим

$$(3.1) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \\ & = - \frac{dp_1}{dx} + \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial y^3} \end{aligned}$$

$$\psi_1|_{y=0} = \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$$

Вторая строка в (3.1) представляет собой обычные условия прилипания на обтекаемой поверхности. Необходимо, вообще говоря, поставить также краевые условия на внешней границе пограничного слоя и в начальном сечении  $x=0$ . Однако конкретный вид этих условий не имеет значения для дальнейшего анализа и поэтому здесь не приводится.

Исследование уравнения (3.1) начнем с рассмотрения вязкого пристеночного слоя 1б, расположенного вверх по потоку от точки нулевого трения  $x=x_0$ . Решение в этом слое запишем в виде

$$(3.2) \quad \psi_1(x, y) = (-s)^\beta f_{11}(\eta) + (-s)^{\beta+3/4} f_{12}(\eta) + \dots, \quad s \rightarrow -0$$

Здесь  $\beta$  — искомое собственное число задачи, а относительно независимой переменной  $\eta = y(-s)^{-1/4}$  предполагается, что она является величиной порядка единицы в рассматриваемом слое.

Подстановка разложения (3.2) в (3.1) показывает, что функции  $f_{11}(\eta)$  и  $f_{12}(\eta)$  удовлетворяют следующим уравнениям и краевым условиям:

$$\begin{aligned} f_{11}''' - \frac{1}{8} p_{00} \eta^3 f_{11}'' + \frac{1}{2} p_{00} \left( \beta + \frac{1}{4} \right) \eta^2 f_{11}' - p_{00} \beta \eta f_{11} &= 0 \\ f_{12}''' - \frac{1}{8} p_{00} \eta^3 f_{12}'' + \frac{1}{2} p_{00} (\beta + 1) \eta^2 f_{12}' - \\ - p_{00} \left( \beta + \frac{3}{4} \right) \eta f_{12} &= - \left( \frac{\beta}{2} + \frac{1}{4} \right) a_0 a_1 \eta^2 \\ f_{11}(0) = f_{11}'(0) = f_{12}(0) = f_{12}'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Первое из этих уравнений совпадает (с точностью до обозначений) с уравнением (1.6). Поэтому его решение представляется выражением

$$f_{11}(\eta) = \frac{1}{2} a_1 \eta^2$$

которое и было использовано при вычислении правой части второго уравнения. Решение второго уравнения строится аналогично решению уравнения (1.7) и имеет вид

$$\begin{aligned} f_{12}(\eta) &= \frac{a_0 a_1}{p_{00}} (\eta - g_\beta) + \frac{1}{2} b_1 \eta^2 \\ g_\beta &= - \left( \frac{1}{4}! \right) \frac{1}{\left( -\frac{3}{2} - \beta \right)!} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{p_{00}}{32} \right)^m \times \\ &\times \frac{\left( m - \frac{3}{2} - \beta \right)!}{(m + 1/2)! m! (4m - 1)} \eta^{4m+1} \end{aligned}$$

Функция  $g_\beta(\eta)$  не является экспоненциально растущей при  $\eta \rightarrow \infty$ , если  $\beta = m - 1/2$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$

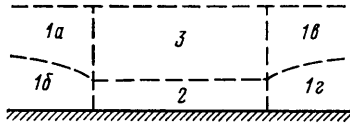
Причем минимальному значению собственного числа  $\beta = -1/2$  соответствует  $g_\beta = \eta$ . Поэтому решение (3.2) для вязкого пристеночного слоя 1б

принимает вид

(3.3)

$$\psi_1(x, y) = (-s)^{-1/2} \frac{1}{2} a_1 \eta^2 + (-s)^{1/4} \frac{1}{2} b_1 \eta^2 + \dots, \quad s \rightarrow -0$$

Постоянные  $a_1$  и  $b_1$ , входящие в это выражение, остаются произвольными. Для их определения необходимо полное решение уравнения (3.1), учитывающее конкретный вид краевых условий на внешней границе пограничного слоя и в начальном сечении  $x=0$ .



Фиг. 3

Принцип сращивания асимптотических разложений и вид решения (3.3) для вязкого подслоя показывают, что в основной части пограничного слоя  $1a$

$$\psi_1(x, y) = (-s)^{-1} \psi_{10}(y) + (-s)^{-1/4} \psi_{11}(y) + \dots, \quad s \rightarrow -0$$

(3.4)

$$\psi_{10}(y) = \frac{a_1}{p_{00}} \psi_{00}'(y), \quad \psi_{11}(y) = \frac{b_1}{p_{00}} \psi_{00}'(y)$$

4. Отдельно необходимо рассмотреть окрестность точки нулевого трения с продольным размером  $|x-x_0|=O(\varepsilon^{1/2})$ , где  $\varepsilon=|\Delta k|$ . В этой окрестности решение, полученное выше для области 1, становится непригодным. В самом деле, сравнивая первое и второе слагаемые разложения (1.2) в вязком слое 1b, видим, что второй член разложения (1.9) и первый член разложения (3.3), являющиеся собственными функциями этих разложений, становятся при  $|x-x_0|=O(\varepsilon^{1/2})$  величинами одного порядка.

Заранее ясно, что указанная окрестность состоит из двух характерных областей (фиг. 3). Это, во-первых, область 3, которая имеет толщину  $y=O(1)$  и представляет собой продолжение из области 1 основной части пограничного слоя 1a. Второй характерной областью является вязкая область 2, расположенная на дне области 3 в фокусе вязких пристеночных слоев 1b и 1г.

Асимптотическое разложение для функции тока в области 3 представим в виде

$$(4.1) \quad \psi = \psi_0^*(x_*, y) + \varepsilon^{1/2} \psi_1^*(x_*, y) + \dots, \quad x_* = \varepsilon^{-1/2}(x-x_0)$$

Тогда уравнения (1.1) и условия сращивания с 1a удовлетворяются, если

$$(4.2) \quad \psi_0^* = \psi_{00}(y), \quad \psi_1^* = \psi_{00}' \left[ \frac{A_1(x_*)}{p_{00}} + x_* \int_0^y \frac{\psi_{00}''' - p_{00}}{(\psi_{00}')^2} dy \right]$$

Функция  $A_1(x_*)$ , входящая в выражение для  $\psi_1^*$ , является произвольной; известно только, что

$$(4.3) \quad A_1(x_*) = a_0(-x_*) + a_1 \operatorname{sign}(\Delta k) (-x_*)^{-1} + \dots, \quad x_* \rightarrow -\infty$$

Рассмотрим, наконец, область 2 (фиг. 3). Структура решения в этой области может быть найдена из условия сращивания с решением в вяз-



ком пристеночном слое 1б. Это сращивание возможно только тогда, когда в области 2

$$(4.4) \quad \psi = \varepsilon^{3/8} \frac{1}{6} p_{00} y_*^3 + \varepsilon^{3/4} \Psi_1^*(x_*, y_*) + \varepsilon^{9/8} \Psi_2^*(x_*, y_*) + \dots$$

$$x_* = \varepsilon^{-1/2} (x - x_0), \quad y_* = \varepsilon^{-1/8} y$$

Подставляя разложение (4.4) в уравнения (1.1) и сращивая это разложение с решением (1.2), (1.9), (3.3) для 1б и решением (4.1), (4.2), (1.11), (4.3) для области 3, получим следующую линейную краевую задачу:

$$\frac{1}{2} p_{00} y_*^2 \frac{\partial^2 \Psi_1^*}{\partial x_* \partial y_*} - p_{00} y_* \frac{\partial \Psi_1^*}{\partial x_*} = \frac{\partial^3 \Psi_1^*}{\partial y_*^3}$$

$$\Psi_1^*|_{y_*=0} = \frac{\partial \Psi_1^*}{\partial y_*} \Big|_{y_*=0} = 0, \quad \Psi_1^* = \frac{1}{2} A_1(x_*) y_*^2 + \dots,$$

$$x_* \rightarrow -\infty, \quad y_* \rightarrow +\infty$$

Решение этой задачи может быть построено с помощью классического метода преобразований Фурье. В результате получаем, что

$$(4.5) \quad \Psi_1^* = \frac{1}{2} A_1(x_*) y_*^2$$

При этом функция  $A_1(x_*)$  остается произвольной. Для ее определения необходимо рассмотреть задачу для третьего члена  $\Psi_2^*$  разложения (4.4)

$$\frac{1}{2} p_{00} y_*^2 \frac{\partial^2 \Psi_2^*}{\partial x_* \partial y_*} - p_{00} y_* \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial x_*} = \frac{\partial^3 \Psi_2^*}{\partial y_*^3} - \frac{1}{2} A_1 A_1' y_*^2$$

$$(4.6) \quad \Psi_2^*|_{y_*=0} = \frac{\partial \Psi_2^*}{\partial y_*} \Big|_{y_*=0} = 0$$

$$\Psi_2^* = \frac{p_{00} a_0^2}{40 \cdot 320} y_*^9 + x_* \frac{a_0^2}{120} y_*^5 + \frac{1}{2} A_2(x_*) y_*^2 + \dots,$$

$$x_* \rightarrow -\infty, \quad y_* \rightarrow +\infty$$

Относительно функции  $A_2(x_*)$  известно, что

$$A_2(x_*) = b_0 (-x_*)^{7/4} + b_1 \operatorname{sign}(\Delta k) (-x_*)^{-1/4} + \dots, \quad x_* \rightarrow -\infty$$

Краевую задачу (4.6) можно записать в виде

$$\frac{1}{2} p_{00} y_*^2 \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x_* \partial y_*} - p_{00} y_* \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_*} = \frac{\partial^3 \Psi_2}{\partial y_*^3}$$

$$(4.7) \quad \Psi_2|_{y_*=0} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_*} \Big|_{y_*=0} = g(x_*)$$

$$\Psi_2 = o(1), \quad x_* \rightarrow -\infty, \quad y_* \rightarrow +\infty$$

$$\Psi_2 = \Psi_2^* - \frac{p_{00} a_0^2}{40 \cdot 320} y_*^9 - x_* \frac{a_0^2}{120} y_*^5 - \frac{1}{2} A_2 y_*^2 -$$

$$- \frac{A_1^2 - a_0^2 x_*^2 - 2a_0 a_1 \operatorname{sign}(\Delta k)}{2p_{00}} y_*$$

Причем из соотношения (4.3) следует, что

$$g(x_*) = -\frac{1}{2p_{00}} [A_1^2 - a_0^2 x_*^2 - 2a_0 a_1 \operatorname{sign}(\Delta k)] \rightarrow 0, \quad x_* \rightarrow -\infty$$

К задаче (4.7) также может быть применен метод преобразований Фурье. В результате удается установить, что решение этой задачи существует только тогда, когда  $g(x_*) = 0$ .

В зависимости от знака  $\Delta k$  здесь возможны три ситуации. Если  $a_1 \Delta k > 0$ , тогда искомое решение существует при всех  $x_*$ :

$$A_1(x_*) = a_0 \sqrt{x_*^2 + 2 \frac{a_1}{a_0} \operatorname{sign}(\Delta k)}$$

При этом выражение (4.4), (4.5) для функции тока, записанное во внешних переменных  $x, y$ , принимает вид

$$(4.8) \quad \psi = \frac{1}{6} p_{00} y^3 + \frac{1}{2} y^2 a_0 \sqrt{(x-x_0)^2 + 2\Delta k \frac{a_1}{a_0}} + \dots$$

Заметим, что это решение автоматически удовлетворяет условию срачивания с особой ветвью решения для слоя  $I_2$ .

Если  $a_1 \Delta k < 0$ , то решение существует только до точки нулевого трения  $x_* \leq x_1$ :

$$A_1(x_*) = a_0 \sqrt{x_*^2 - x_1^2}, \quad x_1 = -(2|a_1|/a_0)^{1/2}$$

За этой точкой оно становится мнимым. Причем перед точкой нулевого трения в решении развивается слабая особенность классического типа [2]. В частности, трение на обтекаемой поверхности выражается при  $x \rightarrow x_0 + \varepsilon^{1/2} x_1$  в виде

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = \varepsilon^{1/2} a_0 (-2x_1)^{1/2} \sqrt{(x_0 + \varepsilon^{1/2} x_1) - x} + \dots$$

Наконец, при  $\Delta k = 0$  возможны два решения:

$$A_1 = a_0(-x_*), \quad A_1 = a_0|x_*|$$

Первое из них является гладким в точке нулевого трения, а второе имеет здесь особенность.

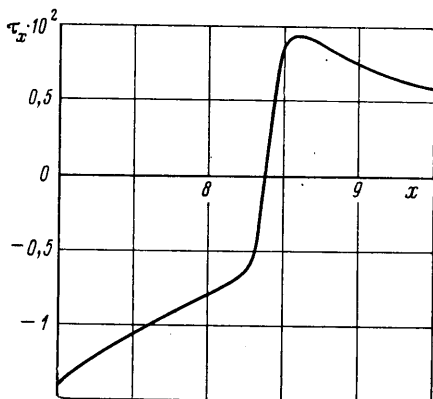
Интересно, что именно особое решение уравнений Прандтля, выражающееся соотношениями (1.9), (2.2)–(2.4), является их предельным решением и может быть получено из (4.8) в результате предельного перехода при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Последнее свидетельствует, в частности, о неизбежности появления особенности рассмотренного типа на передней кромке тонкого крылового профиля. Этот результат подтверждается видом предельной кривой  $I$  на фиг. 1 для трения на поверхности профиля, имеющего параболическую форму контура около передней кромки. Распределение производной трения  $\tau_x$  вдоль образующей контура, вычисленное для  $k = k_0$ , приведено на фиг. 4. Используя формулу (2.5), нетрудно получить, что  $a_0 = 0,0085$ . Постоянная  $a_1$  может быть найдена с помощью соотношения (4.8). Из него следует, что квадрат минимального значения трения  $\tau_m^2$  пропорционален  $\Delta k$ :

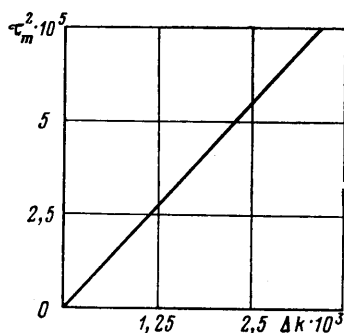
$$\tau_m^2 = 2a_0 a_1 \Delta k$$

Определяя коэффициент пропорциональности из фиг. 5, получим, что для параболического профиля  $a_1 = -1,24$ .

В настоящей работе, таким образом, показано, что кроме двух известных после работы [2] решений — особого решения, которое не может быть продолжено за точку нулевого трения, и решения гладкого в окрестности этой точки — уравнения Прандтля допускают еще и третье решение. Это решение имеет особенность в точке нулевого трения и в то же время является непрерывно продолжимым через эту точку. Оно



Фиг. 4



Фиг. 5

может быть использовано для построения асимптотической теории коротких зон отрыва на передней кромке тонкого профиля.

Автор благодарит В. В. Сычева и Вик. В. Сычева за обсуждение работы и полезные советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Prandtl L. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung.— Verhandlung. des 3-re Internat. Math. Kongr. Heidelberg, 1904. Leipzig, 1904.
2. Goldstein S. On laminar boundary-layer flow near a position of separation.— Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1948, v. 1, pt. 1.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1944.
4. Brown S. N., Stewartson K. Laminar separation.— Annual Rev. Fluid Mech., v. 1. Palo Alto, Calif., 1969.
5. Stewartson K. Is the singularity at separation removable?— J. Fluid Mech., 1970, v. 44, pt 2.
6. Ёрмак Ю. Н. Обтекание передней закругленной кромки тонкого профиля вязким несжимаемым потоком.— Тр. ЦАГИ, 1969, вып. 1141.
7. Werle M. J., Davis R. T. Incompressible laminar boundary layers on a parabola at angle of attack: a study of the separation point. Trans. ASME, Ser. E.— J. Appl. Mech., 1972, v. 39, No. 1.
8. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.
9. Stewartson K. On Goldstein's theory of laminar separation.— Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1958, v. 11, pt 4.
10. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Основы теории специальных функций. М.: Наука, 1974.

Москва

Поступила в редакцию  
12.V.1980