

В работах [5–9] делались попытки построения аналогичной модели течения, но только для безударного входа. В работах [10–14] рассматривался ударный вход и тангенциальный наклон кромок, однако эти работы еще не дают полного решения задачи.

Ниже уточняется построение осесимметричной модели течения с конечными разрывами вектора скорости на кромках произвольной формы, которое было начато в работах [1, 10]. Такая модель в отличие от применявшихся ранее позволяет вести расчеты осесимметричного течения не только на «расчетном» режиме и в его окрестности, но и в более широкой зоне переменных режимов работы многоступенчатой турбомашин. Изложен способ построения обобщенного решения с указанными условиями склейки на кромках с помощью вариационно-разностного метода [15–17] и приводятся реализованные на ЭВМ БЭСМ-3М и БЭСМ-6 примеры расчета при ударном входе и тангенциальном наклоне лопаток с изломом меридианных линий тока на входной кромке¹, качественно соответствующие эксперименту [19].

1. Основные уравнения. Систему уравнений для осесимметричного вихревого установившегося течения газа во вращающемся венце турбомашин можно написать в виде [1, 14]

$$(1.1) \quad \frac{\partial w_z}{\partial r} - \frac{\partial w_r}{\partial z} + \frac{\operatorname{ctg} \beta}{r} \frac{\partial(c_u r)}{\partial r} - \frac{\operatorname{tg} \delta}{r} \frac{\partial(c_u r)}{\partial z} = \\ = \frac{1}{w_z} \left(\frac{\partial H^*}{\partial r} - T \frac{\partial S}{\partial r} \right) - \frac{f_r + f_u \operatorname{tg} \delta}{w_z}, \quad \mathbf{f} = -T \frac{\mathbf{w}}{w^2} \frac{dS}{dt}$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial(r\mu\chi\rho w_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r\mu\chi\rho w_z)}{\partial z} = 0, \quad \frac{d}{dt} = w_r \frac{\partial}{\partial r} + w_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$(1.3) \quad \rho = \sigma \rho_{w_1}^* \left(\frac{2H^* + u^2 - w^2}{2H^* + u_1^2} \right)^{1/(\kappa-1)}, \quad \sigma = \exp\left(-\frac{\Delta S}{R}\right), \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v}$$

$$(1.4) \quad \frac{dH^*}{dt} = 0, \quad H^* = I + \frac{1}{2}(w^2 - u^2), \quad I = \frac{\kappa RT}{\kappa - 1}$$

$$(1.5) \quad w_u = w_z \operatorname{ctg} \beta + w_r \operatorname{tg} \delta, \quad c_u = w_u + u, \quad u = \omega r$$

$$\chi = 1 - \frac{sN}{(2\pi r)}, \quad \rho_{w_1}^* = \frac{p_{w_1}^*}{RT_{w_1}^*}, \quad \Delta S = S - S_1$$

Кроме общепринятых и ясных из фиг. 1 и 2 обозначений здесь $\mathbf{c}(c_r, c_u = c_\varphi, c_z)$ и $\mathbf{w}(w_r = c_r, w_u = c_u - u, w_z = c_z)$ — векторы абсолютной и относительной скоростей и их составляющие в цилиндрической системе координат (r, φ, z) , \mathbf{f} — вектор касательной к поверхности S_2' силы трения, χ — коэффициент стеснения, μ — коэффициент загромождения кольцевого канала пограничным слоем [14], N — число лопаток в реальном венце, $s = s(r, z)$ — их толщина в окружном направлении. Звездочка сверху относится к параметрам торможения, индекс w — к параметрам торможения в относительном движении, индекс 1 — к параметрам на входе в венец.

Система (1.1)–(1.5) замкнута при задании поверхности S_2' и поля сил трения f через σ (или коэффициент потерь ξ), так как в ней при этом пять уравнений и столько же неизвестных: w, ρ, T .

Уравнение поверхности тока S_2' и выражение вектора единичной нормали к ней имеют вид

$$(1.6) \quad \varphi = \Phi(r, z), \quad \Phi \in C^2$$

$$(1.7) \quad \mathbf{v} = (\mathbf{i} \operatorname{tg} \delta - \mathbf{j} + \mathbf{k} \operatorname{ctg} \beta) / \Delta$$

¹ Работа была доложена на IV Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике [18].

$$\Delta = (1 + \operatorname{tg}^2 \delta + \operatorname{ctg}^2 \beta)^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \delta = -\frac{v_r}{v_u} = r \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

$$\operatorname{ctg} \beta = -\frac{v_z}{v_u} = r \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

Направления измерения углов β и δ показаны на фиг. 1.

С учетом условия $\Phi \in C^2$ уравнение вихрей (1.1) можно записать в дивергентной форме с абсолютной или с относительной окружной составляющей скорости

$$(1.8) \quad \frac{\partial (w_z + c_u \operatorname{ctg} \beta)}{\partial r} - \frac{\partial (w_r + c_u \operatorname{tg} \delta)}{\partial z} =$$

$$= \frac{1}{w_z} \left(\frac{\partial H^*}{\partial r} - T \frac{\partial S}{\partial r} \right) - \frac{f_r + f_u \operatorname{tg} \delta}{w_z}$$

$$(1.9) \quad \frac{\partial (w_z + w_u \operatorname{ctg} \beta)}{\partial r} - \frac{\partial (w_r + w_u \operatorname{tg} \delta)}{\partial z} =$$

$$= \frac{1}{w_z} \left(\frac{\partial H^*}{\partial r} - T \frac{\partial S}{\partial r} \right) - 2\omega \operatorname{ctg} \beta - \frac{f_r + f_u \operatorname{tg} \delta}{w_z}$$

При введении согласно уравнению неразрывности (1.2) функции тока ψ (1.9) принимает вид

$$(1.10) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r\mu\chi\rho} \left(A \frac{\partial \psi}{\partial r} - B \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{r\mu\chi\rho} \left(B \frac{\partial \psi}{\partial r} - C \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] =$$

$$= r\mu\chi\rho \left(\frac{dH^*}{dz} - T \frac{\partial S_1}{\partial \psi} \right) - \frac{T}{w_z} \frac{\partial \Delta S}{\partial r} - 2\omega \operatorname{ctg} \beta - \frac{f_r + f_u \operatorname{tg} \delta}{w_z} \equiv f_z$$

$$A = 1 + \operatorname{ctg}^2 \beta, \quad B = \operatorname{tg} \delta \operatorname{ctg} \beta, \quad C = 1 + \operatorname{tg}^2 \delta$$

Система (1.1)–(1.5) или (1.3), (1.10) описывает течение в пределах одного вращающегося венца Ω_2 , при $\omega=0$ и $\beta=\alpha$ – в пределах одного неподвижного венца Ω_1 , а при $\omega=\delta=0$ и $\chi=1$ – в свободных от венцов кольцевых каналах Ω_0 :

$$(1.11) \quad \frac{\partial c_z}{\partial r} - \frac{\partial c_r}{\partial z} = \frac{1}{c_z} \left(\frac{\partial I^*}{\partial r} - T \frac{\partial S}{\partial r} - \frac{1}{2r^2} \frac{\partial (c_u r)^2}{\partial r} \right) - \frac{f_r}{c_z}$$

$$\frac{d(c_u r)}{dt} = r f_u, \quad \frac{dI^*}{dt} = 0, \quad I^* = I + \frac{c^2}{2}$$

$$\frac{\partial (r\mu\rho c_r)}{\partial r} + \frac{\partial (r\mu\rho c_z)}{\partial z} = 0, \quad \rho = \sigma\rho_0^* \left(\frac{2I^* - c^2}{2I^*} \right)^{1/(\kappa-1)}$$

После введения функции тока первое уравнение (1.11) принимает вид

$$(1.12) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r\mu\rho} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r\mu\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) =$$

$$= \frac{1}{c_z} \left(\frac{\partial I^*}{\partial r} - T \frac{\partial S}{\partial r} - \frac{1}{2r^2} \frac{\partial (c_u r)^2}{\partial r} \right) - \frac{f_r}{c_z} \equiv f_0$$

2. Условия склейки решения на границах Γ_{ij} (кромки). Коэффициенты при старших производных уравнений (1.10) и (1.12) терпят на границах Γ_{ij} подобластей разных типов конечный разрыв, в связи с чем необходимо установить условия склейки (согласования) решения на этих границах. Рассмотрим сразу общий случай ударного входа ($w_{u-} \neq w_{u+}$) при косом обтекании кромки ($0 < \varepsilon - \gamma_- < \pi/2$) с тангенциальным наклоном

($\operatorname{tg} \delta_i = r \partial \Phi / \partial l \neq 0$, $-\pi/2 < \delta_i < \pi/2$, δ_i — угол между касательной к кромке и меридианной плоскостью $\Phi = \text{const}$).

Для более компактной записи уравнений (1.8) и (1.11) вводим обозначение $\Gamma_- = (c_{ur})_-$ в Ω_0 до кромок и $\Gamma_+ = (c_{ur})_+$ в Ω_2 сразу за кромками, тогда

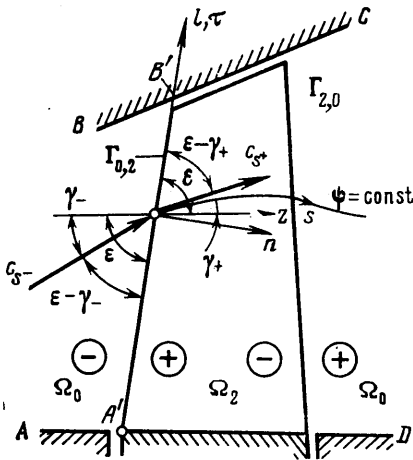
$$(2.1) \quad L^+\psi = \frac{\partial}{\partial r} \left(c_z + \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_+ - \frac{\partial}{\partial z} \left(c_r + \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_+ = \\ = \frac{1}{c_{z+}} \left(\frac{\partial H^*}{\partial r} - T \frac{\partial S}{\partial r} \right)_+ - \left(\frac{f_r + f_u \operatorname{tg} \delta}{c_z} \right)_+$$

$$(2.2) \quad L^-\psi = \frac{\partial c_{z-}}{\partial r} - \frac{\partial c_{r-}}{\partial z} = \frac{1}{c_{z-}} \left(\frac{\partial I^*}{\partial r} - T \frac{\partial S}{\partial r} - \frac{\Gamma}{r^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right)_- - \frac{f_r}{c_{z-}}$$

$$(2.3) \quad \frac{d\Gamma_-}{dt} = c_{r-} \frac{\partial \Gamma_-}{\partial r} + c_{z-} \frac{\partial \Gamma_-}{\partial z} = r f_u$$

Если слагаемое с Γ_- из правой части уравнения (2.2) перевести в левую и с помощью выражения $I_-^* = H_-^* + \omega \Gamma_-$ записать это уравнение в относительном движении, то после преобразований оно с учетом (2.3) принимает вид

$$(2.4) \quad L^-\psi = \frac{\partial}{\partial r} \left(c_z + \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_- - \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left(c_r + \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_- = \\ = \frac{1}{c_{z-}} \left(\frac{\partial H^*}{\partial r} - T \frac{\partial S}{\partial r} \right)_- - \\ - \left(\frac{f_r + f_u \operatorname{tg} \delta}{c_z} \right)_- + \frac{K}{rc_{z-}} \frac{\partial \Gamma_-}{\partial r}$$



Фиг. 2

Здесь $K = c_s \cdot [\operatorname{ctg} \beta_s]$, $[\operatorname{ctg} \beta_s] = \operatorname{ctg} \beta_{s+} - \operatorname{ctg} \beta_{s-}$, $\operatorname{ctg} \beta_{s+} = \operatorname{ctg} \beta_+ \cos \gamma_- + \operatorname{tg} \delta_+ \sin \gamma_-$, $\operatorname{ctg} \beta_{s-} = w_u / c_{s-}$, $c_s = (c_r^2 + c_z^2)^{1/2}$.

Здесь c_s — меридианная составляющая скорости, s — координата вдоль меридианной линии тока. При получении (2.4) было использовано выражение

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{r} \left(\frac{\Gamma_- - \omega r^2}{r} + K \right)$$

которое следует из соотношения

$$w_- \cdot v (1 + \operatorname{tg}^2 \delta + \operatorname{ctg}^2 \beta_+)^{1/2} = K$$

Гидродинамический смысл уравнения (2.4) заключается в том, что поверхность S_2' как бы продлена за входную кромку вверх по потоку и набегающий на нее поток с относительной скоростью w_- разлагается на две составляющие: касательную к поверхности S_2' ($w_- \cdot v = 0$) и нормальную к ней при ударном входе ($w_- \cdot v = w_{v-}$).

Если нормальная к S_2' составляющая скорость равна нулю, то $K = 0$, и последнее слагаемое в уравнении (2.4) обращается в ноль. В этом случае безударного входа (2.4) ничем не отличается от уравнения (2.1) для вращающегося или неподвижного венца, когда $\chi_+ = 1$.

Рассматриваемая задача с разрывными коэффициентами аналогична стационарным задачам дифракции и теплопроводности в разнородных (многослойных) средах [3, 4].

Для вывода условий склейки на Γ_{ij} запишем уравнения (2.4) и (2.1) в сокращенном виде

$$A = a\psi_r + b\psi_z, \quad B = b\psi_r + c\psi_z, \quad \psi_r = \frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad \psi_z = \frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$L^-\psi = \frac{\partial A_-}{\partial r} + \frac{\partial B_-}{\partial z} = f_-, \quad L^+\psi = \frac{\partial A_+}{\partial r} + \frac{\partial B_+}{\partial z} = f_+$$

и поставим для них задачу Дирихле $\psi|_s = g(s)$ в односвязной области $\bar{\Omega} = \Omega_- + \Omega_+ + S$, которая разделена кривой Γ на две подобласти (n — направлена внутрь Ω_+). В случае самосопряженности и положительной определенности этих уравнений (например, для несжимаемой жидкости) указанную задачу можно свести к задаче определения минимума функционала

$$J(\psi) = -(L\psi, \psi) + 2(f, \psi) + \int_{\Gamma} \psi \left[\frac{\partial\psi}{\partial N} \right] dl,$$

$$(X, Y) = \iint_{\Omega} XY \, dr \, dz, \quad [g] = g_+ - g_-$$

Используя интегрирование по частям и формулу Остроградского — Гаусса и беря интегралы отдельно по каждой подобласти, находим

$$(2.5) \quad J(\psi) = \iint_{\Omega_-} (A\psi_r + B\psi_z + 2f)_- \, dr \, dz +$$

$$+ \iint_{\Omega_+} (A\psi_r + B\psi_z + 2f)_+ \, dr \, dz + 2 \int_{\Gamma_{ij}} \psi \left[\frac{\partial\psi}{\partial N} \right] dl$$

Здесь A, B — функции от r, z, f — от r, z, ψ .

Отметим, что при подстановке в двойные интегралы (2.5) соответствующих выражений из уравнений (1.10) и (1.12) получаются расширенные функционалы для импульсов $p + \rho\omega^2$ и $p + \rho\omega^2$, которые были записаны в работе [14] для одномерного случая.

Контурный интеграл с физической точки зрения естественно положить равным нулю (непрерывность потока) и так как $\psi \neq 0$ на Γ_{ij} , то это приводит к однородному условию склейки по конормали $[\partial\psi/\partial N] = 0$. Решение ψ при переходе через Γ_{ij} также остается непрерывным $[\psi] = 0$ ($[\rho\omega\mathbf{r}\omega \cdot \mathbf{n}] = 0$ — закон сохранения массы).

Если уравнения несамосопряженные и жидкость сжимаемая, то метод Галеркина приводит к аналогичному результату [3, 4]

$$(2.6) \quad \iint_{\Omega_-} (A\xi_r + B\xi_z + f\xi)_- \, dr \, dz + \iint_{\Omega_+} (A\xi_r + B\xi_z + f\xi)_+ \, dr \, dz +$$

$$+ \int_{\Gamma_{ij}} \xi \left[\frac{\partial\psi}{\partial N} \right] dl = 0, \quad \xi_r = \frac{\partial\xi}{\partial r}, \quad \xi_z = \frac{\partial\xi}{\partial z}, \quad \xi(r, z) \in W_2^1(\bar{\Omega})$$

Здесь A, B, f — функции от $r, z, \psi, \psi_r, \psi_z$.

С учетом сказанного естественные (однородные) условия склейки для уравнений (2.1) и (2.4) при переходе через кромку Γ_{ij} имеют вид

$$(2.7) \quad [\psi]_{\Gamma_{ij}} = 0, \quad \left[\frac{\partial\psi}{\partial N} \right]_{\Gamma_{ij}} = 0$$

Входящие в (2.5) и (2.6) производные по конормали $\partial\psi/\partial N$ для уравнений (2.1) и (2.4) при направленной по потоку к границе Γ_{ij} нормали \mathbf{n} имеют выражения [3, 4, 20]

$$(2.8) \quad \left. \frac{\partial\psi}{\partial N} \right|_+ = \left(c_i + \Gamma \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)_+ \cos(\mathbf{n}, r) - \left(c_r + \Gamma \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right)_+ \cos(\mathbf{n}, z) = \\ = - \left(c_i + \Gamma \frac{\partial\Phi}{\partial l} \right)_+$$

$$(2.9) \quad \left. \frac{\partial\psi}{\partial N} \right|_- = - \left(c_i + \Gamma \frac{\partial\Phi}{\partial l} \right)_-, \quad \cos(\mathbf{n}, z) = \sin \varepsilon, \quad \cos(\mathbf{n}, r) = -\cos \varepsilon$$

Так как $c_u = w_u + u$ и на Γ_{ij} величина $[u] = 0$, то, согласно (2.7)–(2.9)

$$(2.10) \quad \left[\frac{\partial\psi}{\partial N} \right]_{\Gamma_{ij}} = [w_i + w_u \operatorname{tg} \delta_i]_{\Gamma_{ij}} = 0$$

откуда следует, что касательная к кромке составляющая скорости

$$w_\tau = w_l \cos \delta_i + w_u \sin \delta_i, \quad w_l = c_l$$

остается непрерывной на кромке при входе потока в венец, а также при выходе из него, где $K=0$ и $[w_u]=0$.

В результате из (2.7) и (2.10) следуют условия склейки решения на входной и выходной кромках соответственно:

$$(2.11) \quad [\psi] = 0, \quad [w_l] = -[w_u] \operatorname{tg} \delta_i$$

$$(2.12) \quad [\psi] = 0, \quad [w_l] = 0, \quad [w_u] = 0$$

Полученные условия склейки решения сформулированы также в работах [11, 13], где они получены иными методами и не всегда точно интерпретируются.

Запись уравнения (2.4) в относительном движении, которая потребовалась для получения однородных условий склейки, неудобна для решения задачи из-за наличия в нем слагаемого с величиной K и большей сложности его по сравнению с уравнением (1.11). В связи с этим однородные условия склейки (2.10)–(2.12) преобразуются к неоднородным [18] так, что они оказываются корректными непосредственно для уравнений (1.9) и (1.11) или (1.10) и (1.12), на входе в венец

$$(2.13) \quad [\psi] = 0, \quad [\partial\psi/\partial N] = -w_{u-} \operatorname{tg} \delta_i$$

и на выходе из него

$$(2.14) \quad [\psi] = 0, \quad [\partial\psi/\partial N] = w_{u+} \operatorname{tg} \delta_i$$

так как в этом случае производные по конормали имеют соответственно вид

$$\partial\psi/\partial N = -(w_l + w_u \operatorname{tg} \delta_i), \quad \partial\psi/\partial N = -c_l = -w_l$$

3. Гидродинамический смысл условий склейки решения на кромках.

Для выяснения физического смысла этих условий на поверхности разрыва Γ_{ij} при ударном входе выведем их еще раз в другой форме, основываясь на гидродинамических соображениях, но с целью упрощения выкладки только для случая несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$, $S = \text{const}$). Исходим из естественных условий на Γ_{ij} :

1) нет силы вдоль кромки, $[\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\tau}] = 0$, где $\mathbf{w} = w_l \mathbf{l} + w_u \mathbf{j} + w_n \mathbf{n}$, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{l} \cos \delta_i + \mathbf{j} \sin \delta_i$, или

$$(3.1) \quad [w_l] + [w_u] \operatorname{tg} \delta_i = 0$$

2) нет подвода массы, $[\chi \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}] = 0$, откуда

$$(3.2) \quad [w_n] = (\chi_- / \chi_+ - 1) w_{s-} \sin(\varepsilon - \gamma_-) \equiv L$$

3) нормальная к поверхности лопатки составляющая исчезает на входной кромке, поэтому $[\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}] = -\mathbf{w}_- \cdot \mathbf{v}$, где нормаль $\mathbf{v} = (\mathbf{i} \operatorname{tg} \delta_i - \mathbf{j} + \mathbf{n} \operatorname{ctg} \beta_n) / \Delta$, $\Delta = (1 + \operatorname{tg}^2 \delta_i + \operatorname{ctg}^2 \beta_n)^{1/2}$, $\mathbf{w}_- \cdot \mathbf{v} = K / \Delta$, $K = w_{s-} [\operatorname{ctg} \beta_s]$ (см. (1.7) и (2.4)), или

$$(3.3) \quad [w_i] \operatorname{tg} \delta_i - [w_u] + [w_n] \operatorname{ctg} \beta_n = K$$

Из (3.1)–(3.3) следуют искомые условия склейки вектора \mathbf{w} на входной кромке

$$(3.4) \quad [w_i] = -1/2 D \sin 2\delta_i, \quad [w_n] = D \cos^2 \delta_i, \quad [w_n] = L \\ D = K + L \operatorname{ctg} \beta_n$$

Из полученных условий, которые соответствуют помещению вихревого диска на входных кромках, следуют все важные для приложений частные случаи, так как эффекты ударного входа ($K \neq 0$), конечной толщины кромок ($L > 0$, $\chi_{\pm} < 1$), их тангенциального наклона ($\delta_i \neq 0$) и косоугольного ($0 < \varepsilon - \gamma_- < \pi/2$) представлены в них отдельными сомножителями. Из выражений (3.4) видно, что только при безударном входе ($K = 0$) и бесконечно тонких входных кромках ($L = 0$) вектор скорости остается непрерывным при переходе входных кромок (аналогичный вывод справедлив и для выходных кромок, где $K = [w_u] = 0$ всегда при $L = 0$). Этот же вывод следует из уравнений (2.1) или (2.4), которые при $K = L = 0$ совпадают. Во всех остальных случаях вектор скорости \mathbf{w} , т. е. первые производные от функции тока ψ , при переходе через кромки испытывает конечный разрыв, даже в том случае, когда кромки лежат в меридианной плоскости ($\delta_i = 0$), если они имеют конечную толщину или вход ударный.

Если задан поток на входе в рабочее колесо и форма его входной кромки, то из (3.4) можно определить параметры потока сразу за ней. Когда вход ударный, кромки имеют тангенциальный наклон и конечную толщину, возникают потери на удар, которые вычисляются по формуле Борда – Карно с введением коэффициента смягчения удара φ :

$$(3.5) \quad h_+^* = h_-^* + [h^*], \quad h^* = \frac{p}{\rho} + 1/2 (w^2 - u^2), \quad h_-^* = h_1^*$$

$$(3.6) \quad [h^*] = -1/2 \varphi [\mathbf{w}]^2 = -1/2 \varphi (D^2 \cos^2 \delta_i + L^2)$$

Из этих соотношений видно, что p и p_w^* на входной кромке при $K \neq 0$, $\delta_i \neq 0$ и $L \neq 0$ также испытывают конечный разрыв.

На бесконечно тонкой выходной кромке $[\operatorname{ctg} \beta_s] = 0$, $[\chi] = 0$ и $[h^*] = 0$. В случае выходных кромок конечной толщины при задании разрежения за ними [1] можно получить выражение кромочных потерь, аналогичное (3.6).

Для случая сжимаемой жидкости на входной кромке при $K \neq 0$, $\delta_i \neq 0$ и $L \neq 0$ конечный разрыв будут испытывать p , ρ , T , p_w^* , \mathbf{w} , энергия же остается непрерывной ($[H^*] = 0$), но энтропия при этом изменяется на кромке скачком, т. е.

$$[S] = -R \ln \sigma > 0, \quad \sigma = \left(1 - \frac{\varphi [\mathbf{w}]^2}{2H^* + u^2} \right)^{\kappa/(\kappa-1)} < 1$$

Итак, на кромках линии тока непрерывны, но терпят излом в том случае, когда $L \neq 0$ и тем более при $\delta_i \neq 0$ и $K \neq 0$. Как и в работе [11], исходя из условий (3.1) получим формулу для определения этого угла излома

(см. фиг. 2).

$$[c_i] = c_{n+} \operatorname{ctg}(\varepsilon - \gamma_+) - c_{n-} \operatorname{ctg}(\varepsilon - \gamma_-) = \\ = \frac{1}{r} \left[\frac{\operatorname{ctg}(\varepsilon - \gamma)}{\chi} \right] \frac{\partial \psi}{\partial l} = -[w_u] \operatorname{tg} \delta_i$$

или

$$\operatorname{ctg}(\varepsilon - \gamma_+) = \frac{\chi_+}{\chi_-} \operatorname{ctg}(\varepsilon - \gamma_-) - \frac{\chi_+ [w_u r] \operatorname{tg} \delta_i}{\partial \psi / \partial l}$$

С учетом (3.4) для входной и выходной кромок находим соответственно

$$\operatorname{ctg}(\varepsilon - \gamma_+) = \chi_+ \operatorname{ctg}(\varepsilon - \gamma_-) + r \chi_+ D \sin \delta_i \cos \delta_i / (\partial \psi / \partial l)$$

$$\operatorname{ctg}(\varepsilon - \gamma_+) = \operatorname{ctg}(\varepsilon - \gamma_-) / \chi_-, \quad [\varepsilon - \gamma] = [\gamma] = \gamma_+ - \gamma_-$$

Если на стенке $[\gamma]$ отличается от той же величины в потоке, то возникает ситуация, аналогичная обтеканию угловой точки стенки в плоском потоке. В реальном потоке — это отрыв и потери, а в расчетах — возмущение потока в особых точках стыка даже гладкой стенки с поверхностями разрыва Γ_{ij} . На гладкой стенке $[c_i] = 0$, а должно быть $[c_i] = -[w_u] \operatorname{tg} \delta_i$; при $\delta_i \neq 0$ последнее возможно при $c_s = 0$ или $c_s = \infty$.

Если вход безударный ($K=0$) и $L=0$, а $\delta_i \neq 0$, то излома линий тока и особенностей нет, но при ударном входе в тот же венец появится излом линий тока и особенностей на гладких стенках в точках стыка с Γ_{ij} . Характер этих особенностей имеет вид $c_s = C(s - s_A)^n$, где n определяется через угол излома линий тока экстраполяцией его вплоть до особой точки на гладкой стенке, а константа C — из сращивания с глобальным решением.

4. Постановка прямой задачи. Рассмотрим меридианное сечение проточной части многоступенчатой турбомашины $ABCD$ (см. фиг. 2, на которой изображен только один венец). Это сечение является односвязной областью Ω и состоит из подобластей трех типов Ω_i ($i=0, 1, 2$), следующих друг за другом в определенном порядке. Решение задачи во всей области для многоступенчатой турбомашины возможно только в классе обобщенных функций W_2^1 [3, 4].

При дозвуковом течении в неподвижных ($M=c/a < 1$) и вращающихся ($M_w = w/a < 1$, $a^2 = \kappa RT$) венцах и при $M_s = c_s/a < 1$ в свободных от них каналах квазилинейные уравнения (1.10) и (1.12), как и обычные уравнения газовой динамики, неравномерно эллиптические на ограниченном месте со своими первыми производными решениями (для несжимаемой жидкости они равномерно эллиптические). В связи с эллиптичностью уравнений краевые условия должны задаваться на всем контуре односвязной области $ABCD$:

$$\text{на } AD \quad \psi = 0$$

$$\text{на } BC \quad \psi = \psi_{\max} = G/2\pi \quad (G - \text{расход})$$

(1.4) на AB и CD задается угол наклона меридианного течения $\gamma_k = \operatorname{arctg}(c_r/c_z)_k$, $k=1, n$, т. е. косая производная

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \cos \gamma + \frac{\partial \psi}{\partial r} \sin \gamma \right)_k = 0$$

Практически сечения AB и CD задаются на достаточно большом удалении от венцов, где можно считать $\gamma_k = \operatorname{const}$ [1], при малых же расстояниях $\gamma_k = \gamma_k(l)$. И с косой производной выделяется конормальная произ-

водная, которая и задается.

$$(4.2) \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial N} \right|_k = - \frac{1}{r\mu\rho} \left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_k = \pm \left(\frac{\operatorname{ctg}(\varepsilon - \gamma)}{r\mu\rho} \frac{\partial \psi}{\partial l} \right)_k$$

где правые части определяются из предыдущего приближения, а направления l_k и s_k не совпадают, т. е. $\varepsilon_k \neq \gamma_k$.

Итак, расчет осесимметричного вихревого течения через многоступенчатую турбомашину сводится к смешанной краевой задаче в односвязной области с косой производной для квазилинейного эллиптического уравнения в частных производных второго порядка относительно функции тока ψ с разрывными коэффициентами при старших производных на линиях, соответствующих меридианным проекциям кромок лопаточного венца, и с приведенными выше условиями склейки решения на этих линиях.

Обобщенное решение краевой задачи (1.10), (1.12), (2.13), (2.14), (4.1) единственно, если в пределах каждой подобласти правые части уравнений (1.10) и (1.12) удовлетворяют условию $\partial f_i / \partial \psi \geq 0$, $i=0, 1, 2$ [3, 4, 20], что наблюдается в приложениях только в ограниченном диапазоне безотрывных режимов работы многоступенчатой турбомашин. Этот диапазон определяется неотрицательностью и монотонным ростом решения ψ поперек меридианного сечения проточной части. Существование хотя бы одного такого решения возможно и при нарушении условия $\partial f_i / \partial \psi \geq 0$, если находится вдали от спектра соответствующей линейризованной задачи.

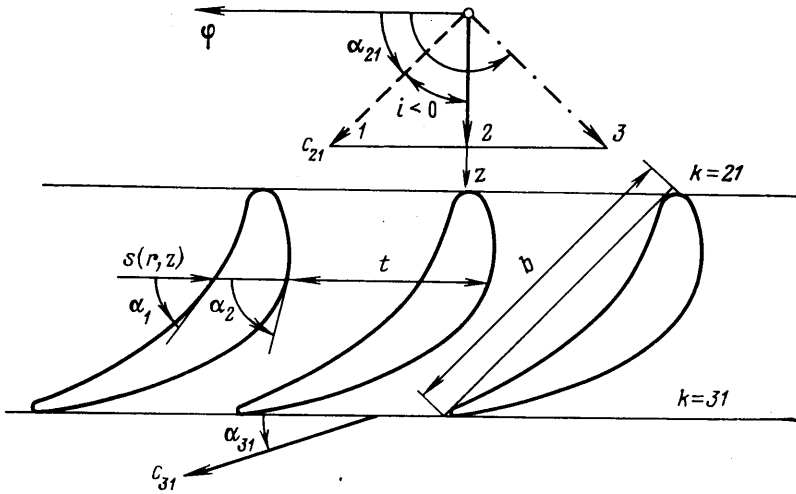
Нарушение условий неотрицательности решения и его единственности физически означает переход турбомашин в зоны отрывных режимов работы, которые характеризуются большими радиальными (поперечными) градиентами полного давления ∇p^* (или энтропии ∇S) и циркуляции $\nabla(c_{\theta}r)$. Для решения задачи в таких случаях необходимо изменение модели течения [1].

Поскольку до сих пор нет априорных оценок для правых частей уравнений и констант задачи ψ_{\max} и ω , с помощью которых можно определить условия безотрывной работы ступени, то эта зона определяется пробными расчетами на ЭВМ в одномерной постановке по межвенцовым зазорам [14].

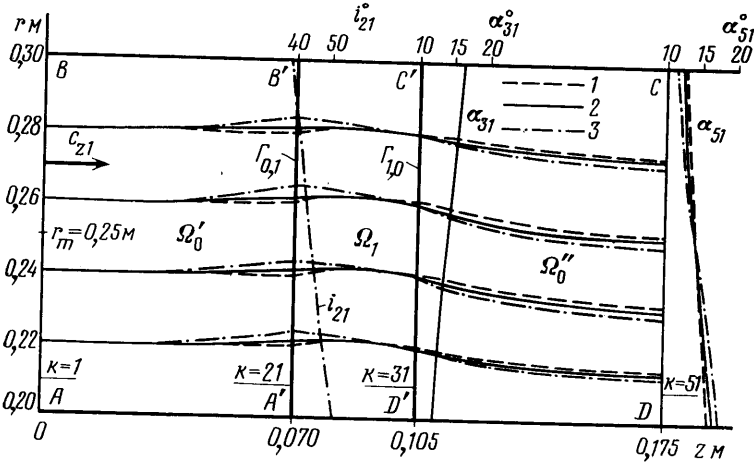
5. Построение обобщенного решения с учетом условий склейки на кромках. Примеры расчета. Для упрощения выкладок рассмотрим порядок построения обобщенного решения краевой задачи (1.10), (1.12), (4.1) с условиями склейки (2.12), (2.13) на кромках в односвязной прямоугольной² области $\Omega = \Omega_0' + \Omega_1 + \Omega_0''$ (фиг. 3 и 4) и для случая несжимаемой жидкости.

Для построения обобщенного решения этой задачи методом Галеркина необходимо взять некоторую непрерывную функцию $\zeta(r, z) \in W_2^1(\Omega)$, которая равна нулю на AD и BC и продолжена непрерывно вплоть до AB и CD включительно, где она, как и внутри $ABCD$, не равна нулю [3, 4]. Умножая скалярно уравнения (1.12) в Ω_0' и Ω_0'' и (1.10) в Ω_1 на эту функцию, интегрируя по частям по каждой из областей Ω_0' , Ω_1 и Ω_0'' и используя формулу Остроградского — Гаусса, получаем интегральное тождество

² При произвольном меридианном профиле проточной части он отображается на прямоугольник, состоящий из единичных квадратов, каждый из которых представляет соответствующую подобласть, при этом границы Γ_{ij} преобразуются в координатные линии новой сетки [10].



Фиг. 3



Фиг. 4

дество

$$\begin{aligned}
 (5.1) \quad & - \int_{AB} \xi \left(\frac{\text{ctg}(\varepsilon - \gamma)}{r\mu} \frac{\partial \psi^{(\tau)}}{\partial l} \right)_1 dl + \iint_{\Omega_0} (c_z \xi_r - c_r \xi_z + \xi f_0^{(\tau)}) dr dz - \\
 & - \int_{r_{0,1}} \xi c_{u-}^{(\tau)} \text{tg} \delta_l dl + \iint_{\Omega_1} [(Ac_z + Bc_r) \xi_r - (Bc_z + Cc_r) \xi_z + \xi f_1^{(\tau)}] dr dz + \\
 & + \int_{r_{1,0}} \xi c_{u+}^{(\tau)} \text{tg} \delta_l dl + \iint_{\Omega_0''} (c_z \xi_r - c_r \xi_z + \xi f_0^{(\tau)}) dr dz + \\
 & + \int_{DC} \xi \left(\frac{\text{ctg}(\varepsilon - \gamma)}{r\mu} \frac{\partial \psi^{(\tau)}}{\partial l} \right)_n dl = 0 \\
 & c_r = - \frac{1}{r\mu\chi} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad c_z = \frac{1}{r\mu\chi} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \xi_r = \frac{\partial \xi}{\partial r}, \quad \xi_z = \frac{\partial \xi}{\partial z}
 \end{aligned}$$

Индекс τ сверху означает, что помеченные им величины берутся из предыдущего приближения, для последующего приближения индекс $\tau+1$ всюду опущен; в примере расчета $dl=dr$, $\varepsilon=\pi/2$.

Обобщенным решением задачи (1.10), (1.12), (4.1), (2.12), (2.13) в области $\Omega = \Omega_0' + \Omega_1 + \Omega_0''$ называется такая функция $\psi(r, z) \in W_2^1(\Omega)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству (5.1).

Так как правые части уравнений f_i , краевых условий на AB и CD (содержащие $\partial\psi/\partial l$) и неоднородных условий склейки решения по конормали (2.12), (2.13) вычисляются по предыдущему приближению, то, применяя итерации, с помощью (5.1) можно построить обобщенное решение во всей области $ABCD$ при любых формах кромок и ударном входе.

Для дозвукового течения сжимаемой жидкости решение строится так же, но при определении составляющих скорости c_r и c_z необходимо еще вычислять плотность ρ по данным предыдущего приближения из трансцендентного уравнения (1.3).

Рассмотренный метод был использован для построения решения при ударном входе и тангенциальном наклоне лопаток в неподвижной кольцевой решетке (фиг. 3, 4), образованной из 46 незакрученных лопаток постоянного вдоль радиуса сечения. Средний радиус решетки $r_m = 0,25$ м, длина лопатки $l = r_{\max} - r_{\min} = 0,1$ м, хорда профиля $b = 0,05$ м, относительный шаг $t/b = 0,542 - 0,820$, $\chi = 0,582 - 0,876$, $c_{z1} = 10$ м/с, при $\delta = 0$ $\alpha_{z1+} = 90^\circ$, $\alpha_{z1-} = 14,23^\circ$.

Рассматривалось течение идеальной несжимаемой жидкости, учитывались только потери на удар (3.5), в связи с чем правые части уравнений в подобластях Ω_0' , Ω_1 , Ω_0'' соответственно принимают вид

$$(5.2) \quad f_0' = 0, \quad f_1 = -\frac{r\chi}{2} \frac{d(\varphi[c]_{z1}^2)}{d\psi}, \quad f_0'' = -\frac{r}{2} \frac{d(\varphi[c]_{z1}^2)}{d\psi} - \frac{1}{2r} \frac{d(c_{ur})_{z1}^2}{d\psi}$$

Углы потока α и коэффициенты стеснения χ

$$(5.3) \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \alpha'}{\cos \delta}, \quad \chi = 1 - \frac{s}{t}, \quad s = \frac{s'}{\cos \delta}, \quad \sin \delta = \frac{(r \sin \delta)_{\min}}{r}$$

где $\alpha' = 1/2(\alpha_1' + \alpha_2')$, причем α' и s' взяты в плоском перпендикулярном к размаху лопатки сечении. (На фиг. 3 изображена решетка при $\delta = 0$, когда $\alpha' = \alpha$ и $s' = s$.) В узком сечении межлопаточного канала и на выходных кромках $k = 31$ углы α' задавались по эмпирическим данным, а между ними определялись интерполяцией.

Задача решалась при краевых условиях

$$(5.4) \quad \text{на } AD \quad \psi = 0, \quad \text{на } BC \quad \psi = \psi_{\max} = 0.25, \quad \text{на } AB \text{ и } CD \quad \partial\psi/\partial z = 0 \quad (\gamma_1 = \gamma_{z1} = 0)$$

с учетом условий склейки (2.12) и (2.13), где $c_{uz1} = \Gamma_1/r$, $\Gamma_1 = (c_{ur})_1 = \text{const}$ задается на входе в канал (AB), а $c_{uz1} = (c_z \operatorname{ctg} \alpha + c_r \operatorname{tg} \delta)_{z1}$ вычисляется на выходе из решетки ($D'C'$).

Область $ABCD$ разбивалась на 10 шагов по r и $n = 50$ по z , так что количество незакрепленных узлов было $9 \times 51 = 459$. Для построения обобщенного решения использовался вариационно-разностный метод [15, 16] с треугольными элементами и кусочно-линейной базисной функцией $\zeta(r, z)$, определяемой на объединении из шести смежных треугольников с общей вершиной, в которой $\zeta = 1$, а во всех остальных вершинах объединения и во всей остальной области $\zeta = 0$. Подстановка такой базисной функции ζ в интегральное тождество (5.1) дает одно сеточное уравнение для каждого внутреннего или граничного узла при кусочно-линейной аппроксимации решения ψ на каждом треугольном элементе.

Задача (5.1), (5.4) решалась на ЭВМ БЭСМ-3М и БЭСМ-6 с использованием стандартной программы на языке Алгол-60 для решения линейных эллиптических смешанных краевых задач в прямоугольнике с разрывными коэффициентами вдоль линий сетки [17]. Эта программа была видоизменена таким образом, чтобы учесть неоднородные условия склейки (2.12) и (2.13) и косые производные (4.2). Из-за нелинейности правых частей уравнений (5.2) по схеме (5.1) строился итерационный процесс. Исходное приближение задавалось по формуле

$$\psi_{kj}^{(0)} = \psi_{\max} (r_{kj}^2 - r_{k1}^2) / (r_{k11} - r_{k1}^2)$$

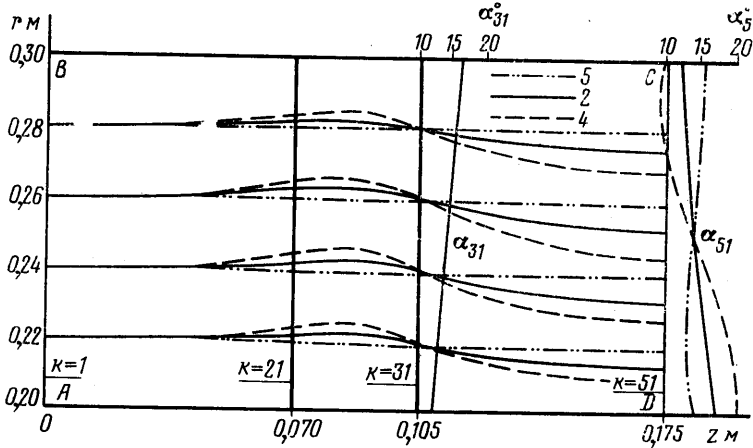
Процесс сходился с точностью

$$\left| \frac{\bar{\psi}_{kj}^{(\tau+1)} - \bar{\psi}_{kj}^{(\tau)}}{\bar{\psi}_{kj}^{(\tau)}} \right| \leq 10^{-2}$$

за 9–12 итераций (при коэффициенте релаксации $\nu=0,3$)

$$\bar{\psi}_{kj}^{(\tau+1)} = \nu \bar{\psi}_{kj}^{(\tau)} + (1-\nu) \bar{\psi}_{kj}^{(\tau)}$$

Величины $\bar{\psi}^{(\tau+1)}$ находились из сеточного уравнения, соответствующего (5.1), с нелинейными функциями предшествующего уточненного приближения $\bar{\psi}^{(\tau)}$.



Фиг. 5

Время счета одного варианта задачи на ЭВМ БЭСМ-3М до 1,5 час, на БЭСМ-6 — 15 мин. Задача решалась в девяти вариантах, из которых в таблице и на фиг. 4 и 5 представлено пять.

Лопатки постоянного по размаху сечения при радиально установленной выходной кромке ($\delta_{31}=0$, вар. 1–3) имеют на входной кромке положительный тангенциальный наклон от корня до вершины ($\delta_{21}=10,2^\circ-6,7^\circ$) и наоборот (вар. 5).

Номер варианта	δ_{21}° у корня	δ_{31}° у корня	Γ_1 , м ² /с	i_m°
1	10,2	0	2,5	-45
2	10,2	0	0	0
3	10,2	0	-2,5	45
4	20,4	10,2	0	0
5	0	-10,2	0	0

Из фиг. 4 видно, что при $\delta_{21} \neq 0$ и ударном входе ($\Gamma_1 = \pm 2,5$ м²/с, угол атаки $i_m = \mp 45^\circ$) меридианные линии тока ($\psi = \text{const}$) на входной кромке имеют излом. Если же $\delta_{31} \neq 0$ и $\Gamma_1 = 0$, то поток позади решетки поджимается к корню ($\delta_{31} > 0$, фиг. 5) или к периферии ($\delta_{31} < 0$).

На фиг. 4 и 5 приведены также распределения углов потока в сечениях $k=31$ и 51. Поток позади решетки при $\delta \neq 0$ быстро перестраивается, стремясь к так называемой обратной закрутке потока. Полученные результаты качественно соответствуют эксперименту [19].

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М.: Физматгиз, 1962.
2. Сирогкин Я. А. К постановке двумерных задач вихревого течения сжимаемой жидкости в турбомашинах. — Инж. ж., 1964, т. 4, № 2.
3. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Изд-во АН СССР, 1963.

4. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
5. *Yaou M. H.* Aero-thermodynamics and flow in turbomachines. N. Y.—L., Wiley, 1960.
6. Оганесян И. А. Проектирование лопасти гидротурбин в осесимметричном вихревом потоке идеальной жидкости с учетом условий течения на входе и выходе из рабочего колеса.— Энергомашиностроение, 1967, № 4.
7. Оганесян И. А., Тарабрин А. П. Об общности постановки и решения обратной задачи осесимметричного потока для несжимаемой и сжимаемой жидкости.— Энергомашиностроение, 1971, № 1.
8. *Schröder H. J., Schuster P.* Actuator disc flow calculated by relaxation. An approach to the analysis problem of turbomachinery.— Pap. Amer. Soc. Mech. Eng., 1972, N-GT-26.
9. Сироткин Я. А. К постановке обратной осесимметричной задачи установившегося вихревого течения идеальной несжимаемой жидкости в турбомашинах.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 1.
10. Сироткин Я. А. Двумерные краевые задачи установившегося течения идеальной жидкости в турбомашинах.— Материалы Всес. конференции по краевым задачам. Казань, Казанск. ун-т, 1970.
11. Танский А. М. Решение осесимметричной задачи о вихревом течении жидкости в турбомашинах, имеющем разрывы на кромках лопастей.— Гидравл. машины. Респ. межведомств. темат. науч.-техн. сб., Харьков, 1971, вып. 5.
12. *Legendre R.* Calcul de l'écoulement tridimensionnel dans une turbomachine axiale.— Rech. Aéropatiale, 1971, № 1.
13. *Guitraud J. P., Zeytounian R. K.* Sur la structure des écoulements tourbillonnaires dans les turbomachines axiales: analyse de l'écoulement a l'entrée ou a la sortie d'une roue.— Rech. Aéropatiale, 1971, № 5.
14. Сироткин Я. А. Аэродинамический расчет лопаток осевых турбомашин. М.: Машиностроение, 1972.
15. Оганесян Л. А., Ривкин В. Я., Рухавец Л. А. Дифференциальные уравнения и их применение, вып. 5, 8. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений, ч. 1 и 2.— Тр. Семинара. Ин-т физ. и матем. АН ЛитССР. Вильнюс, 1973 и 1974.
16. Дмитренко М. Е., Оганесян Л. А. Решение эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами на регулярной сетке.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, т. 14, № 4.
17. Коваль В. Б. Алгоритмы решения краевых задач для уравнения эллиптического типа в произвольной двумерной области с кусочно-гладкой границей.— В кн.: Алгоритмы и алгоритмические языки, вып. 5. М., Изд-во Вычисл. центра АН СССР, 1971.
18. Сироткин Я. А., Степанов Г. Ю. Осесимметричное вихревое течение невязкой жидкости в турбомашинах.— В кн.: IV Всес. съезд по теор. и прикл. механ. Киев, 1976. Аннотация докл. Киев: Наукова думка, 1976.
19. Быков А. А. Экспериментальное исследование пространственного течения в прямых решетках с наклонными лопатками. Харьков, 1977 (Ин-т проблем машиностроения АН УССР. Препринт № 59).
20. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977.

Ленинград, Москва

Поступила в редакцию
9.IV.1980