

УДК 532.516

**ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПЛОСКОГО ВТОРИЧНОГО РЕЖИМА МЕЖДУ
НАГРЕТЫМИ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ**

КОЛЕСОВ В. В.

Экспериментальные наблюдения течения жидкости между двумя нагретыми до различных температур концентрическими цилиндрами, вращающимися с одинаковыми угловыми скоростями [1, 2], показывают, что при увеличении угловой скорости цилиндров «твердое» вращение жидкости может потерять устойчивость с образованием плоского вторичного режима — двумерных конвективных валов, вытянутых вдоль оси цилиндров и вращающихся вместе с цилиндрами.

Теоретически линеаризованная задача устойчивости «твердого» вращения нагретого цилиндрического слоя жидкости изучалась в [3]. Были рассчитаны нейтральные кривые, отделяющие область устойчивости «твердого» вращения от области неустойчивости для различных значений отношений радиусов цилиндров. Нейтральные кривые для случая бесконечно малого зазора между цилиндрами были получены в [4, 4].

В данной работе изучается нелинейная задача устойчивости. Применяется методика работ [5, 6], позволяющая построить разложение вторичного режима в ряд Ляпунова — Шмидта, а также исследовать устойчивость основного и вторичного режимов в малой окрестности критического значения числа Рейнольдса.

Получены зависимости амплитуды вторичного режима и его декремента от безразмерного температурного градиента и от числа Прандтля, избавляющие от необходимости проводить трудоемкие расчеты и позволяющие установить некоторые свойства вторичного режима. Следует отметить, что аналогичная зависимость амплитуды вторичного режима от числа Прандтля для стационарной задачи о свободной конвекции в слое жидкости была установлена и использована при расчетах в [7].

1. Постановка задачи. Пусть вязкая однородная теплопроводная жидкость заполняет полость между двумя твердыми концентрическими цилиндрами, вращающимися с угловой скоростью Ω . Радиусы и температуры внутреннего и внешнего цилиндров обозначим соответственно R_1 , Θ_1 и R_2 , Θ_2 .

Уравнения Навье — Стокса и уравнение теплопроводности допускают точное решение с вектором скорости $V_0 = \{v_{0r}, v_{0\theta}\}$, температурой T_0 и давлением Π_0 (r, ζ — безразмерные полярные координаты)

$$V_0 = \{0, r\}, \quad T_0 = c \ln r + 1$$

(1.1)

$$\Pi_0 = \frac{1}{4} r^2 [2 - \beta c \Theta_1 (2 \ln r - 1)] + \text{const}$$

$$c = \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{\ln R_2}, \quad \Theta = \frac{\Theta_2}{\Theta_1}, \quad R = \frac{R_2}{R_1}$$

Здесь β — коэффициент теплового расширения жидкости. Возмущенное течение представим в виде

$$V' = V_0 + V, \quad T' = T_0 + cPT, \quad \Pi' = \Pi_0 + \Pi/\lambda$$

где $\lambda = \Omega R_1^2 / \nu$ — число Рейнольдса, $P = \nu / \chi$ — число Прандтля, а ν и χ — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности.

В приближении Буссинеска задача для определения плоских бесконечно малых возмущений V , T , Π имеет вид

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} + (V, \nabla) \right] v_r - \left(\frac{v_\xi}{r} + 2 \right) v_\xi + \mu r T = \\
 & = \frac{1}{\lambda} \left[\left(\Delta - \frac{1}{r^2} \right) v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} - \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right] \\
 (1.2) \quad & \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} + (V, \nabla) \right] v_\xi + \left(\frac{v_r}{r} + 2 \right) v_r = \\
 & = \frac{1}{\lambda} \left[\left(\Delta - \frac{1}{r^2} \right) v_\xi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \xi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} \right] \\
 & P \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} + (V, \nabla) \right] T + \frac{v_r}{r} = \frac{1}{\lambda} \Delta T \\
 & \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} = 0 \\
 & v_r = v_\xi = T = 0, \quad r=1, \quad r=R
 \end{aligned}$$

Здесь $\mu = \beta c \Theta_1 P$ — параметр, характеризующий безразмерный температурный градиент, t — время.

Заметим, что уравнения (1.2) применимы лишь в случае, когда λ достаточно велико (центробежное ускорение $\Omega^2 R_1$ много больше ускорения силы тяжести) и μ достаточно мало ($\beta(\Theta_2 - \Theta_1) \ll 1$).

Требуется найти нетривиальное решение задачи (1.2), возникающее при переходе числа Рейнольдса λ через критическое значение λ_0 .

2. Ряды Ляпунова — Шмидта. Применяя методiku работы [5], убеждаемся, что у задачи (1.2) имеется решение, представимое в виде степенных рядов

$$\begin{aligned}
 (2.1) \quad & v_r = \varepsilon A u_1(r) \cos m\xi + \varepsilon^2 A^2 \lambda_0 u_2(r) \cos 2m\xi + O(\varepsilon^3) \\
 & v_\xi = \varepsilon A v_1(r) \sin m\xi + \varepsilon^2 A^2 \lambda_0 v_2(r) \sin 2m\xi + O(\varepsilon^3) \\
 & T = \varepsilon A \tau_1(r) \cos m\xi + \varepsilon^2 A^2 \lambda_0 [\tau_2(r) \cos 2m\xi + \tau_0(r)] + O(\varepsilon^3) \\
 & \Pi = \varepsilon A [p_1(r) \cos m\xi + q_1(r) \sin m\xi] + \\
 & + \varepsilon^2 A^2 \lambda_0 [p_2(r) \cos 2m\xi + q_2(r) \sin 2m\xi + p_0(r)] + O(\varepsilon^3)
 \end{aligned}$$

где $\varepsilon = \sqrt{\lambda - \lambda_0}$ — малый параметр, m — волновое число ($m=1, 2, \dots$), $\xi = \zeta - t$ — новая независимая переменная.

Для определения критического значения числа Рейнольдса $\lambda_0 = \sqrt{\Lambda_0 / \mu}$ требуется найти наименьшее собственное значение Λ_0 спектральной задачи

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad & L_m^2 x_1 = -m^2 \Lambda y_1, \quad L_m y_1 = \frac{x_1}{r^2}, \quad L_m \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \\
 & \frac{dx_1}{dr} = x_1 = y_1 = 0, \quad r=1, \quad r=R
 \end{aligned}$$

Функции u_k , v_k , τ_k , q_k , p_k ($k=1, 2$) имеют вид

$$\begin{aligned}
 u_k &= \frac{x_k}{r}, \quad v_k = -\frac{1}{km} \frac{dx_k}{dr}, \quad \tau_k = \lambda_0 y_k, \quad q_k = -\frac{2\lambda_0}{km} x_k \\
 p_1 &= \frac{2}{r} u_1 - \frac{r}{m} \left(L_m - \frac{1}{r^2} \right) v_1 \\
 p_2 &= \frac{2}{r} u_2 - \frac{r}{2m} \left[\left(L_{2m} - \frac{1}{r^2} \right) v_2 + \frac{1}{2} \left(v_1 \frac{du_1}{dr} - u_1 \frac{dv_1}{dr} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Здесь $x_1 y_1$ — собственное решение задачи (2.2), отвечающее $\Lambda = \Lambda_0$, а функции x_2, y_2 находятся путем решения неоднородной краевой задачи

$$(2.3) \quad L_{2m}^2 x_2 = -4m^2 \Lambda_0 y_2 + f_1, \quad L_{2m} y_2 = x_2 / r^2 + f_2$$

$$\frac{dx_2}{dr} = x_2 = y_2 = 0, \quad r=1, \quad r=R$$

$$f_1 = \frac{1}{r} \left(x_1 \frac{d}{dr} L_m x_1 - \frac{dx_1}{dr} L_m x_1 \right), \quad f_2 = \frac{P}{2r} \left(x_1 \frac{dy_1}{dr} - \frac{dx_1}{dr} y_1 \right)$$

Функции τ_0, p_0 имеют вид

$$\tau_0 = \lambda_0 y_0, \quad y_0 = \frac{P}{2} \left[\psi(r) - \frac{\ln r}{\ln R} \psi(R) \right]$$

$$\psi(r) = \int_1^r \frac{x_1 y_1}{\rho} d\rho, \quad p_0 = - \int_1^r \left(\lambda_0 \mu r \tau_0 + u_1 \frac{du_1}{d\rho} + \frac{u_1^2 - v_1^2}{2\rho} \right) d\rho$$

Амплитуда вторичного режима A находится по формулам

$$(2.4) \quad A = 2m \left(\frac{\mu^3}{\Lambda_0} \right)^{1/4} g^{1/2}, \quad g = \frac{I_1}{I_2}, \quad I_1 = \int_1^R x y_1 r dr,$$

$$I_2 = \int_1^R (P f_3 y - f_4 x) dr$$

$$f_3 = x_1 \left(\frac{dy_2}{dr} + 2 \frac{dy_0}{dr} \right) + 2y_2 \frac{dx_1}{dr} + x_2 \frac{dy_1}{dr} + \frac{1}{2} y_1 \frac{dx_2}{dr}$$

$$f_4 = x_2 \frac{d}{dr} L_m x_1 + \frac{1}{2} \frac{dx_2}{dr} L_m x_1 - \frac{1}{2} x_1 \frac{d}{dr} L_{2m} x_2 - \frac{dx_1}{dr} L_{2m} x_2$$

Для отыскания функций x, y требуется решить задачу, сопряженную с задачей (2.2)

$$(2.5) \quad L_m^2 x = \frac{y}{r^2}, \quad L_m y = -m^2 \Lambda_0 x; \quad \frac{dx}{dr} = x = y = 0, \quad r=1, \quad r=R$$

Для исследования расположения спектров устойчивости основного режима (1.1) и вторичного режима (2.1) применим метод возмущений [6]. Накладывая на режим (1.1) бесконечно малые $2\pi/m$ -периодические возмущения, пропорциональные $\exp(\sigma t)$, линеаризуя полученную краевую задачу в окрестности режима (1.1) и раскладывая собственное число σ , исчезающее при $\lambda \rightarrow \lambda_0$, в ряд теории возмущений, получаем

$$\sigma = \sigma_2 (\lambda - \lambda_0) + O[(\lambda - \lambda_0)^2]$$

$$(2.6) \quad \sigma_2 = 2m^2 \mu \frac{I_1}{I_3}, \quad I_3 = \int_1^R (x L_m x_1 + P y y_1) r dr$$

Аналогично собственное число σ' из спектра устойчивости режима (2.1), исчезающее при $\lambda \rightarrow \lambda_0$, раскладывается в ряд

$$(2.7) \quad \sigma' = \sigma_2' \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4), \quad \varepsilon = \sqrt{\lambda - \lambda_0}$$

Декременты σ_2 и σ_2' режимов (1.1) и (2.1) связаны соотношением $\sigma_2' = -2\sigma_2$.

Предположим, что температура внешнего цилиндра выше температуры внутреннего цилиндра ($\mu > 0$), $\sigma_2 > 0$, $g > 0$ и собственное значение Λ_0 задачи (2.2) простое. Тогда при малых докритичностях ($\lambda < \lambda_0$) основной режим (1.1) устойчив относительно плоских $2\pi/m$ -периодических в азимутальном направлении бесконечно малых возмущений, а при малых сверхкритичностях ($\lambda > \lambda_0$) он неустойчив. Когда число Рейнольдса λ переходит через критическое значение λ_0 , мягко возникает плоский вторичный режим (2.1), устойчивый относительно плоских $2\pi/m$ -периодических возмущений. Из результатов работы [5] следует, что режим (2.1) единственным образом (с точностью до поворота на любой угол ζ) определяется волновым числом m при фиксированных μ , P , R .

3. Зависимости параметров вторичного режима от μ и P . Решения x_1 , y_1 и x , y задач (2.2) и (2.5) не зависят от μ и P . Решение x_2 , y_2 неоднородной задачи (2.3) допускает представление

$$x_2 = x_2^{(1)} + Px_2^{(2)}, \quad y_2 = y_2^{(1)} + Py_2^{(2)}$$

где $x_2^{(1)}$, $x_2^{(2)}$, $y_2^{(1)}$, $y_2^{(2)}$ не зависят от μ и P . Из (2.4), (2.6) получаем

$$(3.1) \quad A = \mu^{3/4} (a_0 + a_1 P + a_2 P^2)^{-1/2}, \quad \sigma_2 = \mu (b_0 + b_1 P)^{-1}$$

где постоянные a_0 , a_1 , a_2 , b_0 , b_1 зависят лишь от волнового числа m и отношения радиусов цилиндров R .

Из (3.1) следует, что для мягкого возникновения устойчивого плоского вторичного режима при любых $\mu > 0$ и P достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$(3.2) \quad a_1^2 - 4a_0 a_2 < 0, \quad a_2 > 0, \quad b_0 > 0, \quad b_1 > 0$$

4. Численные результаты. Спектральная задача (2.2) сводилась к краевой задаче для шести обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами, которая решалась численно методом пристрелки. С физической точки зрения наибольший интерес представляют самые опасные возмущения, поэтому проводилась численная минимизация Λ_0 по волновому числу m : $\Lambda_* = \min_m \Lambda_0(m) = \Lambda_0(m_*)$.

Для случая $R=2$ (радиус внешнего цилиндра в 2 раза больше радиуса внутреннего цилиндра) $m_* = 5$, $\Lambda_* = 1709,1$, поэтому критическое значение λ_* числа Рейнольдса λ связано с параметром μ соотношением $\lambda_* = 41,34/\sqrt{\mu}$.

Отметим, что в работе [3] $\Lambda_* = 1792$. Расхождение объясняется тем, что в [3] для отыскания Λ_* применялся вариационный метод, менее точный, чем метод пристрелки.

Вычисления, аналогичные описанным в [8], показали, что монотонные плоские возмущения являются самыми опасными в классе трехмерных пространственно-периодических возмущений только при $\mu < \mu_0$, где μ_0 зависит от R и P . Если же $\mu > \mu_0$, то самыми опасными становятся трехмерные колебательные возмущения. Происходит это, однако, при настолько больших значениях μ , что использование приближения Буссинеска становится неправомочным.

Зафиксируем решение однородной задачи (2.3), потребовав, чтобы выполнялось условие нормировки $y_1 [1/2(R+1)] = -1$, позволяющее придать постоянной A простой физический смысл: температура жидкости в средней части кольца $1 \leq r \leq R$ меняется по закону

$$T' = 1 + c \ln [(R+1)/2] - \varepsilon \lambda_0 c P A \cos m(\zeta - t) - O(\varepsilon^2)$$

Рассчитывая амплитуду плоского вторичного режима A и декремент основного режима σ_2 по формулам (3.1), получаем для случая $R=2$, $m=5$:

$$(4.1) \quad A = \mu^{3/4} (280846P^2 - 1397P + 2873)^{-1/2}, \quad \sigma_2 = \mu (40,11P + 22,11)^{-1}$$

Из (4.1) следует, что неравенства (3.2) выполняются, поэтому при любых $\mu > 0$ и P плоский вторичный режим возникает мягко и устойчив при малых сверхкритичностях относительно $2\pi/5$ -периодических возмущений.

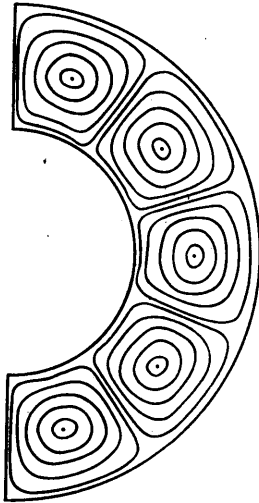
5. Структура вторичного режима. В системе координат, вращающейся вместе с цилиндрами, плоский вторичный режим (2.1) является стационарным. Уравнение линий тока этого относительно движения имеет вид

$$(5.1) \quad 2x_1(r) \sin m_* \xi + \varepsilon A \lambda_* x_2(r) \sin 2m_* \xi + O(\varepsilon^2) = \text{const}$$

Из (5.1), пренебрегая членами $O(\varepsilon^2)$, получаем

$$(5.2) \quad m_* \xi = \pi n + (-1)^n \arcsin \frac{C}{x_1(r)} - \varepsilon C A \lambda_* \frac{x_2(r)}{x_1^2(r)}$$

$$C = \text{const}, n = 0, \pm 1, \dots$$



На фигуре изображена картина линий тока плоского вторичного режима, рассчитанная по формуле (5.2) без учета члена $O(\varepsilon)$ для случая $R=2$. Плоский вторичный режим представляет собой систему $2m_*$ валов, вытянутых вдоль оси цилиндров и вращающихся вместе с цилиндрами. Движение жидкости в каждой двух соседних валах направлено в противоположные стороны, т. е. чередуются правое и левое вращение.

Координаты r_0 , ξ_0 точек, в которых жидкость неподвижна относительно цилиндров (центры валов), удовлетворяют уравнениям

$$(5.3) \quad m_* \xi_0 = \frac{\pi}{2} + \pi n + (-1)^{n+1} \varepsilon A \lambda_* \frac{x_2(r_0)}{x_1(r_0)} + O(\varepsilon^2)$$

$$(5.4) \quad v_1(r_0) + 2\varepsilon A \lambda_* v_2(r_0) \cos m_* \xi_0 + O(\varepsilon^2) = 0$$

Обозначим через $r_{0,0}$, $\xi_{0,0}$ координаты центров валов, найденные из (5.3), (5.4) при $\varepsilon=0$. Раскладывая функции v_1 , v_2 , x_1 , x_2 в ряды Тейлора в окрестности точки $r_{0,0}$ и отбрасывая члены $O[(r-r_{0,0})^2]$, получаем из (5.3), (5.4)

$$(5.5) \quad r_0 = r_{0,0} + 2\varepsilon^2 A^2 \lambda_*^2 \left[x_2 v_2 / x_1 \frac{dv_1}{dr} \right]_{r=r_{0,0}} + O(\varepsilon^3)$$

Формулы (5.3), (5.5) показывают, что смещение центров валов, вызванное нелинейностью, пропорционально ε в азимутальном направлении и ε^2 — в радиальном направлении.

Автор благодарит В. И. Юдовича за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шайдуров Г. Ф., Шлиомис М. И., Ястребов Г. В. Конвективная неустойчивость вращающейся жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 6, с. 88.
2. Ястребов Г. В. Применение электрохимической методики для визуализации конвективных движений быстровращающейся жидкости.— В кн.: Гидродинамика. Пермь, 1974, вып. 5, с. 287.
3. Chandrasekhar S. The stability of viscous flow between rotating cylinders in the presence of radial temperature gradient.— J. Rat. Mech. and Analys., 1954, v. 3, № 2, p. 181.
4. Хаит В. Д. О тепловой неустойчивости жидкости в поле центробежных сил.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 1, с. 137.
5. Юдович В. И. Свободная конвекция и ветвление.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 1, с. 101.
6. Юдович В. И. Устойчивость конвекционных потоков.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 2, с. 272.
7. Караманова Э. Э., Тер-Григорьянц Г. К. Расчет плоской стационарной конвекции.— Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. школы. Сер. Естеств. науки, 1977, № 3, с. 28.
8. Колесов В. В. Устойчивость неизотермического течения Куэтта.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 1, с. 167.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
7.IV.1980