

УДК 533.6.011.8

МЕДЛЕННЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА ОКОЛО СИЛЬНО НАГРЕТОЙ
ИЛИ ОХЛАЖДЕННОЙ СФЕРЫ

БОРИС А. Ю., ФРИДЛЕНДЕР О. Г.

Решаются задачи, аналогичные рассмотренным в [1, 2]: медленное обтекание равномерно нагретой (охлажденной) сферической частицы и течение около слабо неравномерно нагретой сферы в отсутствие внешних массовых сил и с учетом температурных напряжений в газе.

Использование более совершенного метода численного решения [3] позволило продвинуться в область больших перепадов температур. При этом обнаружен новый эффект: учет температурных напряжений при обтекании сильно нагретой сферы приводит к появлению подсосывающей силы вместо сопротивления. В случае течения около неравномерно нагретой сферы влияние температурных напряжений несущественно.

Задачи рассмотрены при двух законах зависимости коэффициентов переноса от температуры.

Медленное обтекание равномерно нагретой сферы является аналогом классической задачи Стокса, и в рамках уравнений Навье – Стокса было рассмотрено в [4]. Однако в случае медленных неизотермических течений сплошной среды, удовлетворяющих условиям (1), в уравнении импульса в тензоре напряжений необходимо учитывать барнеттовские температурные напряжения [5, 6]:

$$(1) \quad \text{Kn} \ll 1, \quad M \ll 1, \quad \text{Re} \ll 1, \quad T^{-1} \nabla T \sim 1$$

$$(2) \quad p_{ij}^T = \omega_1 \frac{\mu^2}{\rho T} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} \right] + \omega_2 \frac{\mu^2}{\rho T^2} \left[\frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right],$$

$$[A_{ij}] = 1/2(A_{ij} + A_{ji}) - 1/3 \delta_{ij} A_{kk}$$

Такая форма тензора температурных напряжений и значения безразмерных коэффициентов ω_i строго определяются при помощи методов Чепмена – Энскога [7], Гильберта [8], Грэда [9]. Однако для большей физической наглядности можно продемонстрировать их вывод с позиций элементарной кинетической теории, подобно тому, как получают закон трения Ньютона.

Рассмотрим покоящийся газ при постоянном давлении, температура которого переменна вдоль оси x ($v=0$, $p=\text{const}$, $T=T(x)$). Навье-стоксовские напряжения в таком газе равны нулю. Получим выражение для элемента тензора температурных напряжений p_{11}^T . Для этого вычислим поток импульса через поверхность $x=x_0$, переносимый молекулами, столкнувшимися в последний раз в плоскостях $x_0 \pm l$, где l — длина свободного пробега:

$$(3) \quad P_{11}^T = p + p_{11}^T = \int_{c>0} f(x_0 - l) c_1^2 dc + \int_{c<0} f(x_0 + l) c_1^2 dc =$$

$$= \int_{c>0} f(x_0) c_1^2 dc + \int_{c>0} (-l) \frac{\partial f}{\partial x} c_1^2 dc + \int_{c<0} l \frac{\partial f}{\partial x} c_1^2 dc$$

$$p_{11}^T = 2l \int_{c>0} \left(\frac{\partial f}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial x} \right)_{x=x_0} c_1^2 dc$$

Поскольку рассматривается неоднородное состояние газа (имеется тепловой поток), функция распределения должна быть взята в навье-стоксовском приближении:

$$f = \frac{n}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c^2}{2RT}\right) \left[1 + \frac{q_1}{pRT} c_1 \left(\frac{c^2}{5RT} - 1\right) \right], \quad q_1 = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

Вычислив соответствующие производные от функции распределения и взяв интеграл в выражении (3), получим

$$p_{11}T = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{28}{5} \frac{q_1}{\sqrt{RT}} \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x} l - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{4}{5} \frac{1}{\sqrt{RT}} \frac{\partial q_1}{\partial x} \quad \left(l = \frac{\mu}{\rho} \sqrt{\frac{\pi}{2RT}} \right)$$

Подставляя выражения для теплового потока q_1 и длины свободного пробега, будем иметь ($\lambda = c_p \mu / Pr$, $C_p = 5R/2$, $Pr = 2/3$)

$$p_{11}T = 3 \left(7 + \frac{T}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial T} \right) \frac{\mu^2}{\rho T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + 3 \frac{\mu^2}{\rho T} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Аналогичным образом можно получить и другие элементы тензора температурных напряжений. Такой метод дает правильную структуру барнеттовских членов в тензоре напряжений, хотя и не позволяет получить правильные значения для безразмерных коэффициентов ω_i в выражении (2).

Течения, удовлетворяющие условиям (1), описываются следующими безразмерными уравнениями переноса массы, импульса и энергии [6], вектор потока тепла в которых определяется законом Фурье, а в тензор напряжений помимо вязких, сдвиговых напряжений входят еще и температурные. Кроме того, как обычно для медленных течений, в уравнении энергии пренебрегаем членами, выражающими диссипацию энергии за счет вязкого трения:

$$(4) \quad \nabla \mathbf{v} = \mathbf{v} \nabla \ln T$$

$$(5) \quad E \mathbf{v} \nabla \ln T = \nabla (T^* \nabla T), \quad E = \frac{5}{2} \frac{\kappa - 1}{\kappa} Pr, \quad \kappa = \frac{C_p}{C_v}$$

$$(6) \quad (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \nabla \Pi = \Pi^{(1)} + \delta [\alpha_1 T^{2s-2} (\nabla T)^2 \nabla T + \alpha_2 (\mathbf{v} \nabla \ln T) \nabla (T^*)]$$

$$\Pi = p + \frac{1}{3} (2E \omega_1 \delta - 1) T^{s-1} (\mathbf{v} \nabla T) + \delta \alpha_3 T^{2s-1} (\nabla T)^2$$

$$\Pi_i^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[T^s \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \delta_{ij} \nabla \mathbf{v} \right) \right]$$

$$\alpha_1 = -1/2 (s \omega_1 + \omega_3), \quad \alpha_2 = E (\omega_1 + \omega_3 / s), \quad \alpha_3 = 1/2 (s \omega_1 - 1/3 \omega_3)$$

Входящие в уравнения величины обезразмерены следующим образом:

$$T \propto T, \quad \lambda \propto \lambda(T), \quad \mu \propto \mu(T), \quad \rho \propto \rho, \quad r_0 L(x, y, z), \quad V_b \mathbf{v}, \\ 1 + Kn^2 p \quad (V_b = \mu_\infty (\rho_\infty r_0)^{-1}, \quad Kn = V_b (RT_\infty)^{-1/2})$$

Здесь r_0 — характерный размер — радиус сферы, T_∞ , λ_∞ и т. д. — параметры газа на бесконечности в невозмущенном потоке, Pr — число Прандтля при $T=1$ (для одноатомного газа $\kappa = 5/3$, $Pr = 2/3$ и $E = 2/3$). Плотность исключена при помощи уравнения состояния $\rho = T^{-1}$. Принята степенная зависимость коэффициентов переноса от температуры ($\mu = \lambda = T^s$). Положительные числа ω_1 , ω_3 — коэффициенты при барнеттовских членах в тензоре напряжений. Для максвелловских молекул ($s=1$) $\omega_1 = 3$, $\omega_3 = 0$. Для молекул упругих сфер ($s=1/2$) $\omega_1 = 2,418$, $\omega_3 = 0,99$ [7]. Коэффициент $\delta = 1$ введен для того, чтобы выделить барнеттовские члены в уравнении импульса.

Барнеттовские члены, входящие в Π , уравновешиваются изменением давления, а члены с α_1 и α_2 приводят к изменению и скорости и давления. В общем случае температурные напряжения вызывают движение газа около нагретого тела, помещенного в газ, покоящийся на бесконечности (термострессовая конвекция), однако в случае равномерно нагретой сферической частицы газ покоится [6], а температурные напряжения приводят к появлению сферически-симметричного поля давления.

Рассмотрим аналогично [1] обтекание нагретой сферы. Граничные условия в равномерном невозмущенном потоке и условия прилипания на теле в безразмерной форме имеют вид

$$T \rightarrow 1, \quad v \rightarrow \text{Re}_\infty e_x, \quad e = v/v \quad (r \rightarrow \infty), \quad T = T_w, \quad v = 0 \quad (r=1)$$

При $\text{Re}_\infty = \varepsilon \ll 1$ набегающий поток оказывает лишь возмущающее воздействие и решение можно искать в виде

$$(7) \quad v = v_0 + \varepsilon v_1 + \dots, \quad T = T_0 + \varepsilon T_1 + \dots, \quad \Pi = \Pi_0 + \varepsilon \Pi_1 + \dots$$

$$(8) \quad v_0 = 0, \quad T_0 = (1 + a/r)^{1/(s+1)}, \quad a = (T_w^{s+1} - 1)/(s+1), \quad \Pi_0 = \Pi_0(r, T_0)$$

Здесь v_0 , T_0 , Π_0 — сферически-симметричное решение для равномерно нагретой сферы, помещенной в покоящийся на бесконечности газ.

Линеаризуя уравнения (4)–(6) по $\text{Re}_\infty = \varepsilon \ll 1$, получим систему уравнений для v_1 , T_1 , Π_1 с коэффициентами, зависящими от основного решения T_0 . Граничные условия для v_1 , T_1 были получены методом сращиваемых асимптотических разложений [1]

$$T_1 \rightarrow a/6 (\cos \theta - 1), \quad v_1 \rightarrow e_x \quad (r \rightarrow \infty) \quad T_1 = 0, \quad v_1 = 0 \quad (r=1)$$

Учитывая такой вид граничных условий, решение можно искать в виде

$$(9) \quad v_{1r} = f(r) \cos \theta, \quad v_{1\theta} = -g(r) \sin \theta, \quad \Pi_1 = h(r) \cos \theta + m(r) \\ T_1 = T_0^{-s} [\tau(r) \cos \theta + \psi(r)]$$

Переменные разделяются, и система сводится к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(10) \quad f' = (T_0^{-1} T_0' - 2r^{-1})f + 2r^{-1}g$$

$$(11) \quad \tau' = ET_0^{-1} T_0' f + 2r^{-2} \tau - 2r^{-1} \tau'$$

$$(12) \quad h' = [T_0^{s-1} T_0'' - 2r^{-2} T_0^s + sT_0^{s-2} (T_0')^2 - \\ - 2r^{-1} (2s+1) T_0^{s-1} T_0' + \delta \alpha_2 s T_0^{s-2} (T_0')^2] f + \\ + [2r^{-2} T_0^s + 2r^{-1} (2s+1) T_0^{s-1} T_0'] g + 2r^{-1} T_0^s g' + \\ + r^{-1} T_0^{-s} h + \delta \alpha_1 s T_0^{s-3} (T_0')^2 \tau - \delta \beta \alpha_1 T_0^{s-2} (T_0')^2 \tau'$$

$$(13) \quad g'' = -r^{-1} (sT_0^{-1} T_0' + 2r^{-1}) (f-g) + \delta \alpha_1 r^{-1} T_0^{-2} (T_0')^2 \tau + \\ + r^{-1} T_0^{-s} h - (sT_0^{-1} T_0' + 2r^{-1}) g'$$

$$(14) \quad f \rightarrow 1, \quad g \rightarrow 1, \quad \tau \rightarrow a/6 \quad (r \rightarrow \infty) \\ f = 0, \quad g = 0, \quad \tau = 0 \quad (r=1)$$

Интегрируя напряжения по поверхности сферы и учитывая граничные условия при $r=1$ (14), получим выражение для силы сопротивления

$$F = 2/s [2T_w^s g'(1) - h(1) + \delta (\omega_1 + \omega_3) T_w^{s-1} T_0'(1) \tau'(1)] F_s, \quad F_s = 6\pi \mu_\infty r_0 u_\infty$$

Система решалась численно с помощью усовершенствованного метода элементарных решений. В обычном методе решение представляется в виде разложения по системе векторов y_i , удовлетворяющих левому граничному условию и системе уравнений, а коэффициенты разложения c_i вычисляются из условий на правой границе. Однако при интегрировании система векторов y_i может «сплющиваться», что приведет к потере точности при определении c_i . Чтобы избежать этого, через некоторый интервал проводится ортогонализация и нормировка y_i , а решение восстанавливается по вычисляемой при этом матрице перехода [3].

Величина интервала ортогонализации и расстояние, на котором ставились граничные условия, соответствующие $r \rightarrow \infty$, выбирались из условия, что увеличение или уменьшение их в 2 раза изменяет решение при $r=1$ менее чем на 0,01%.

Результаты расчетов для зависимости силы сопротивления сферы от ее температуры приведены на фиг. 1. Сплошными кривыми даны результаты вычислений с учетом температурных напряжений ($\delta=1$), штриховыми — без их учета ($\delta=0$) по уравнениям Навье — Стокса в приближении медленных течений. Кривые 1 соответствуют случаю максвелловских молекул ($s=1$), а кривые 2 — молекул твердых сфер ($s=1/2$).

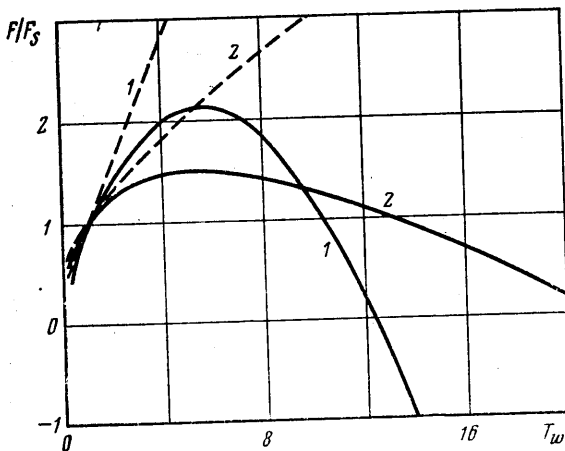
Для максвелловских молекул ($s=1$) и $T_w < 5$ аналогичные результаты были получены в [1]. Расчеты при больших перепадах температур показали, что для навье-стоксовской кривой сохраняется слабо нелинейная зависимость сопротивления от температуры. Однако учет температурных напряжений дает качественно новое явление. Усиливающееся с ростом T_w влияние температурных напряжений приводит к тому, что кривая имеет максимум, затем сопротивление при увеличении T_w начинает уменьшаться, падает до нуля и становится отрицательным.

Как показали расчеты, учет температурных напряжений слабо изменяет поле скоростей, но приводит к значительному перераспределению несимметричной части давления вблизи от сферы. Это свидетельствует о том, что основной вклад в температурные напряжения вносят барнеттовские члены, входящие в Π и пропорциональные $(\nabla T)^2$ ($p = \Pi - \delta \alpha_3 T^{2s-1} (\nabla T)^2 + \dots$). Поясним их действие с помощью простых физических соображений. Набегающий поток «прижимает» изотермы к передней, лобовой поверхности сферы и «отодвигает» от донной поверхности. Из-за этого градиент температуры вблизи лобовой части сферы больше градиента в донной области и, следовательно, давление уменьшается в лобовой части в большей степени, чем в донной. Такое перераспределение давления, вызванное температурными напряжениями, создает силу, направленную против потока, и, следовательно, уменьшает сопротивление сферы при температурах поверхности сферы как больших, так и меньших температуры газа вдали от сферы.

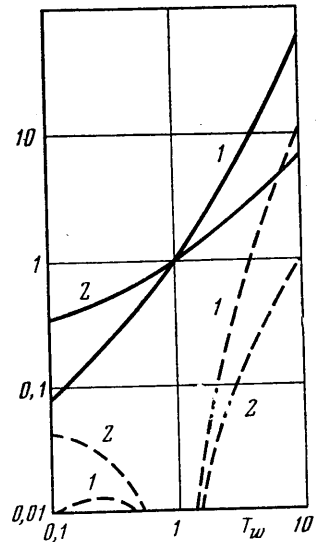
Расчеты для молекул твердых сфер ($s=1/2$, $\mu=\lambda=T^*$) показали существенную зависимость величины сопротивления от закона зависимости коэффициентов переноса от температуры. Навье-стоксовская кривая для $s=1/2$, как и для $s=1$, имеет почти линейный характер, однако наклон ее значительно меньше. Качественный характер действия температурных напряжений при $s=1/2$ тот же, что и при $s=1$. Но так как барнеттовские члены пропорциональны $\mu^2/\rho T \sim T^{2s}$, то при $s=1/2$ влияние их меньше и кривая становится более растянутой.

Существование отрицательного сопротивления (подсасывающей силы) означает, что стационарное движение свободной сильно нагретой сферической частицы в потоке газа при $Re_\infty \ll 1$ невозможно и скорость частицы относительно газа будет увеличиваться до значений, соответствующих числам $Re_\infty \sim 1$.

В дальнейшем возможна проверка обнаруженных эффектов решением непосредственно кинетического уравнения (без применения асимптотических методов).



Фиг. 1



Фиг. 2

Наиболее простым является релаксационное кинетическое уравнение

$$\frac{df}{dt} = \frac{p}{\mu} (f_0 - f)$$

где f_0 — максвелловская функция распределения, а $\mu \sim T$. С помощью этого уравнения были вычислены коэффициенты ω_i : $\omega_1 = 2/Pr$, $\omega_2 = 0$, $Pr = 1$.

Изменение коэффициентов приведет лишь к изменению температурного поля, а величина сопротивления будет такой же, как и в случае точных значений Pr и ω_i , полученных из уравнения Больцмана, поскольку температура и ее производные пропорциональны Pr (что видно из уравнения энергии (5)), а коэффициенты при барнеттовских членах обратно пропорциональны Pr .

Рассмотрим теперь аналогично работе [2] течение около сферы, температура поверхности которой слабо неравномерна:

$$(15) \quad T_{r=1} = T_w(1 + \varepsilon b(\theta, \varphi)), \quad \varepsilon \ll 1$$

Поскольку неравномерность температуры мала, решение, как и раньше, можно искать в виде разложения по малому параметру (7) с ε , введенным соотношением (15). Невозмущенное решение v_0, T_0 то же, что и раньше (8). Для возмущенных величин v_1, T_1 на бесконечности имеем условия затухания возмущений, а на поверхности сферы — условия температурного скольжения:

$$v_1 = 0, \quad T_1 = 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

$$v_{1r} = 0, \quad v_{1\theta} = \beta T_w^s \frac{\partial b}{\partial \theta}, \quad v_{1\varphi} = \beta T_w^s \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial b}{\partial \varphi}, \quad T_1 = T_w b(\theta, \varphi) \quad (r=1)$$

Будем считать, что $b(\theta, \varphi) = \cos \theta$. В этом случае решение можно искать в виде (9). В результате получаем систему (10)–(13) с новыми граничными условиями

$$(16) \quad \begin{aligned} f \rightarrow 0, \quad g \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty) \\ f = 0, \quad g = \beta T_w^{s+1}, \quad \tau = T_w^{s+1} \quad (r=1) \end{aligned}$$

Для силы, действующей на сферу, имеем

$$\begin{aligned} F = F_0/3\beta \{ 2T_w^s [g(1) + g'(1)] - h(1) + \delta(s\omega_1 + \omega_2) T_w^{s-1} T_0'(1) \times \\ \times [(2^{-1/2} T_w^{-1} T_0'(1)) \tau(1) + \tau'(1)] \}, \quad F_0 = 4\pi \mu \infty^2 \beta \varepsilon / \rho \infty \end{aligned}$$

Коэффициент температурного скольжения β принимался равным 0,84.

Результаты расчетов представлены на фиг. 2. Сплошными линиями показана величина силы, действующей на сферу с учетом температурных напряжений F_T/F_0 , а штриховыми — приращение силы по сравнению с расчетами по уравнениям Навье — Стокса $(F_T - F_N)/F_0$. Кривые 1 соответствуют случаю $s=1$, а кривые 2 — $s=1/2$. Для максвелловских молекул ($s=1$) и $1 < T_w < 4$ такие кривые были получены в [2].

Учет температурных напряжений при всех T_w приводит к увеличению силы, действующей на сферу. Такое действие температурных напряжений можно объяснить аналогично тому, как это было сделано в случае обтекания сферы равномерным на бесконечности потоком. Течение, вызванное наличием скорости температуры скольжения на поверхности сферы (перетекание газа от горячей части к холодной), вызовет вблизи от сферы качественно такое же, как и в случае обтекания, искажение изотермических поверхностей и, следовательно, такое же перераспределение давления из-за температурных напряжений. Возникающая при этом сила направлена в ту же сторону, что и сила, вызванная наличием температурного скольжения на поверхности сферы, что и приводит к увеличению суммарной силы, действующей на сферу. Однако, как показали расчеты, величина изменения силы в случае учета температурных напряжений невелика и при значительных перепадах температуры.

Характер зависимости коэффициентов переноса от температуры, хотя и не приводит к качественным изменениям, оказывает значительное влияние на величину силы при больших перепадах температуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галкин В. С., Коган М. Н., Фридлендер О. Г. Обтекание сильно нагретой сферы потоком газа при малых числах Рейнольдса. — ПММ, 1972, т. 36, вып. 5, с. 880–885.
2. Фридлендер О. Г. Течение газа около неравномерно нагретой сферы. — Уч. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 5, с. 55–61.

3. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.— Усп. матем. наук, 1971, т. 16, в. 3, с. 171—174.
4. Kassoy D. R., Adamson T. S., Messiter A. F. Compressible low Reynolds Number flow around a sphere.— Phys. Fluids, 1966, v. 9, № 4, p. 671—681.
5. Галкин В. С., Коган М. Н., Фридлендер О. Г. О некоторых кинетических эффектах в течениях сплошной среды.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 3, с. 13—21.
6. Галкин В. С., Коган М. Н., Фридлендер О. Г. О свободной конвекции в газе в отсутствие внешних сил.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 3, с. 98—107.
7. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 510 с.
8. Галкин В. С. Вывод уравнений медленных течений смесей газов из уравнения Больцмана.— Уч. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 4, с. 40—47.
9. Галкин В. С., Коган М. Н. К выводу уравнений медленных неизотермических течений газа.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 6, с. 77—84.

Москва

Поступила в редакцию
6.II.1980