МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1981

УДК 532.51.013.4–2

НЕЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКИХ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ С ПОСТОЯННОЙ ЗАВИХРЕННОСТЬЮ И ИХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ АНАЛОГОВ

БЫКОВ В. М.

Течения с постоянной завихренностью находят широкое применение в качестве локальных моделей более сложных течений [1]. Во многих случаях такие течения оказываются устойчивыми относительно конечных двумерных возмущений. В частности, свойством нелинейной устойчивости обладает невязкое плоскопараллельное течение Куэтта. Аналогичное рассмотрение одного класса осесимметричных течений дает нелинейную устойчивость сферического вихря Хилла и невязкого течения Пуазейля в круглой трубе относительно осесимметричных возмущений.

1. Законы сохранения для возмущений течения с постоянной завихренностью. Пусть Ω — ограниченная плоская $(n+1)$-связная область. Предположим, что ее граница Γ состоит из замкнутых кривых $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ класса C^2, ориентированных согласованно с ориентацией Ω, причем $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ лежат в области, ограниченной кривой Γ_0. Массовые силы предполагаются потенциальными, при этом всякое двумерное соленоидальное векторное поле с постоянной завихренностью является стационарным течением идеальной жидкости. Одно из течений с постоянной завихренностью ω^* в области Ω можно построить, прибавив к функции тока поля скоростей вращения как твердого тела $\psi_1^*=-0.25\omega^*(x^2+y^2)$ гармоническую функцию ψ_2^*, удовлетворяющую условию $\psi_2^*|_\Gamma=-\psi_1^*|_\Gamma$. Пусть $\psi_0^*=\psi_1^*+\psi_2^*$. Произвольное течение $\mathbf{v}^*$ с завихренностью ω^* в области Ω имеет функцию тока ψ^*, постоянную на каждой компоненте Γ_k границы Γ. Обозначим $\mu_k=\psi^*|_{\Gamma_k}$, причем всегда можно считать $\mu_0=0$. Введем функции [2] ψ_k, $k=1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющие уравнению $\Delta\psi_k=0$ и условиям $\psi_k|_{\Gamma_s}=0$ при $s\neq k$, $\psi_k|_{\Gamma_k}=1$. Тогда разность

$$\psi^*-\psi_0^*-\sum_{k=1}^{n}\mu_k\psi_k$$

гармонична в Ω и равна 0 на Γ, а потому тождественно равна нулю. Следовательно, функция тока течения $\mathbf{v}^*$ имеет вид (1.1)

$$\psi^*=\psi_0^*+\sum_{k=1}^{n}\mu_k\psi_k \tag{1.1}$$

и обратно, всякая функция тока вида (1.1) определяет течение с постоянной завихренностью ω^*.

Произвольное двумерное возмущение $\mathbf{v}\in C^2(\bar\Omega)$ течения $\mathbf{v}^*$, удовлетворяющее условию непроницаемости Γ, $v_n|_\Gamma=0$, имеет однозначную функцию тока $\psi\in C^3(\bar\Omega)$, являющуюся решением задачи

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}(\psi^*+\psi)\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}(\psi^*+\psi)\frac{\partial\omega}{\partial y}=0,\qquad \omega=-\Delta\psi \tag{1.2}$$

(1.3) $\qquad \psi|_{t=0}=\psi(0), \quad \psi|_{\Gamma_0}=0, \quad \psi|_{\Gamma_k}=\lambda_k(t), \quad k=1,2,\ldots,n$

При этом функции $\lambda_k(t)$ не задаются, а находятся по решению из условия сохранения циркуляций векторного поля $\mathbf{v}$ по каждому контуру Γ_k.

Для всякой функции $f(\omega)\in C^1(\mathbf{R})$ в силу (1.2) и формулы Грина имеем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} f(\omega)\,dx\,dy=\int\limits_{\Omega} f'(\omega)\frac{\partial\omega}{\partial t}\,dx\,dy=-\int\limits_{\Gamma} fd(\psi^*+\psi)=0$$

так как из (1.3) следует $d(\psi^*+\psi)|_\Gamma=0$.

Таким образом, для возмущения $\mathbf{v}$ течения с постоянной завихренностью $\mathbf{v}^*$ справедливы те же законы сохранения, что и для произвольного плоского нестационарного течения идеальной жидкости, за исключением закона сохранения энергии

$$2E=\int\limits_{\Omega}|\mathbf{v}|^2dxdy$$

который, как видно из простых примеров, может не выполняться.

Полагая $f(\omega)=|\omega|^p$, $p>1$, получим сохранение норм завихренности возмущения в пространствах $L_p(\Omega)$:

(1.4) $$\|\omega(t)\|_p=\left(\int\limits_{\Omega}|\omega(t)|^p\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\right)^{1/p}=\|\omega(0)\|_p$$

Переходя к пределу при $p\to\infty$, получаем

(1.5) $$\|\omega(t)\|_\infty=\sup_{\Omega}|\omega(t)|=\|\omega(0)\|_\infty$$

Заметим, что теоремы существования и единственности решения двумерных уравнений Эйлера были доказаны в пространстве функций тока, снабженном нормой (1.5) [2].

2. Случай односвязной области. В этом случае законов сохранения (1.4)–(1.5) достаточно, чтобы доказать устойчивость течения $\mathbf{v}^*$ в некоторых нормах.

Теорема. Течение с постоянной завихренностью в односвязной области Ω устойчиво относительно двумерных возмущений поля скоростей в нормах пространств Соболева $W_p^1(\Omega)$, $p>1$ (см. [4]), и в норме (1.5).

Доказательство. В предположениях теоремы $\psi|_\Gamma=0$, поэтому (1.5) действительно является нормой в любом пространстве функций тока, в котором единственно решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа, и последнее утверждение теоремы следует из сохранения этой нормы. Далее имеем

(2.1) $$\|\mathbf{v}(t)\|_p^1\leqslant\|\psi(t)\|_p^2\leqslant C\|\omega(t)\|_p=C\|\omega(0)\|_p\leqslant 2C\|\mathbf{v}(0)\|_p^1$$

где $\|\cdot\|_p^l$ означает норму в пространстве $W_p^l(\Omega)$. Действительно, второе из неравенств (2.1) хорошо известно в теории эллиптических уравнений ([4, с. 90]), следующее за ним равенство есть (1.4), а крайние неравенства вытекают из определений соответствующих норм. Таким образом, норма возмущения увеличивается со временем не более чем в $2C$ раз, где C зависит только от области Ω.

Для того чтобы убедиться, что в других нормах возможна неустойчивость даже по линейному приближению, достаточно рассмотреть течение с постоянной завихренностью $\omega^*=4$ в равностороннем треугольнике, ограниченном прямыми, выходящими из начала координат под углами $\pm30°$, и вертикальной прямой $x=1$, заданное функцией тока

$\psi^*=(1-x)(x^2-3y^2)$. Линеаризованное уравнение (1.2) для малого возмущения завихренности ω имеет вид

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{\partial\psi^*}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}=0 \tag{2.2}$$

Уравнения характеристик для (2.2) являются каноническими с функцией Гамильтона ψ^*:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial\psi^*}{\partial y}=6y(x-1), \qquad \frac{dy}{dt}=-\frac{\partial\psi^*}{\partial x}=3(x^2-y^2)-2x \tag{2.3}$$

Так как ψ^* является интегралом системы (2.3), то малое возмущение завихренности в силу (2.2) переносится вдоль линий тока невозмущенного течения. Исключая из системы (2.3) функцию y на линии тока $\psi^*=C$, получим уравнение

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=12(x-1)(x^3-x^2+C)$$

допускающее явное решение в эллиптических функциях. Из этого решения ясно, что период обращения возмущения ω вдоль линии тока невозмущенного течения будет различным для разных линий. Поэтому возмущение ω, первоначально отличное от нуля в малом круге, с течением времени «размажется» в узкую спиралевидную ленту, длина которой возрастает пропорционально t, а площадь сохраняется. Поскольку $\sup\limits_{\Omega}|\omega(t)|$ также сохраняется, то максимум модуля производной от ω по направлению поперек ленты неограниченно возрастает со временем и норма возмущения $\mathbf{v}$ в пространстве $C^2(\bar{\Omega})$ стремится к бесконечности. Заметим, что эту неустойчивость нельзя объяснить наличием углов у Ω (в теореме Γ — кривая класса C^2), так как можно рассмотреть то же самое течение в области, ограниченной линией тока, близкой к периметру треугольника.

3. Случай неодносвязной области. В общем случае функция тока ψ возмущения $\mathbf{v}$ представляется в виде (1.1) с $\psi_0^*=\psi_0$, $\mu_k=\lambda_k(t)$, которому соответствует разложение для скорости

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(t)\mathbf{u}_k \tag{3.1}$$

где $\mathbf{u}_k$ — векторное поле с функцией тока ψ_k. Нетрудно проверить, что слагаемое $\mathbf{v}_0$ в (3.1) ортогонально каждому из $\mathbf{u}_k$ в смысле скалярного произведения

$$(ab)=\int\limits_{\Omega} ab\,dx\,dy$$

Поскольку $\omega=-\Delta\psi=-\Delta\psi_0=\omega_0$, то уравнение (1.2) имеет место с заменой ω на ω_0 и для слагаемого $\mathbf{v}_0$ из (3.1) справедливы неравенства (2.1), показывающие его устойчивость. Система уравнений для коэффициентов $\lambda_k(t)$ в рассматриваемом случае имеет вид [2]

$$\sum_{k=1}^{n}(\mathbf{u}_k\mathbf{u}_r)\frac{d\lambda_k(t)}{dt}+\sum_{k=1}^{n}(\mathbf{u}_k\times\mathbf{u}_r\omega_0)\lambda_k(t)= \tag{3.2}$$

$$=((\mathbf{v}_0^*+\mathbf{v}_0)\times\omega_0\mathbf{u}_r), \qquad r=1,2,\ldots,n$$

Если область Ω такова, что правые части уравнений (3.2) обращаются в 0 для всех $\mathbf{v}_0$ с $\psi_0|_\Gamma=0$ (т. е. с нулевым расходом жидкости через любой разрез, соединяющий разные компоненты границы), то система (3.2) имеет первый интеграл $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\ldots+\lambda_n^2=\text{const}$, и все слагаемые возмущения (3.1) дают устойчивость основного течения $\mathbf{v}^*$. Единственный известный автору пример, в котором названное условие выполняется, есть плоскопараллельное течение Куэтта. Рассмотрим этот пример подробнее. Течение Куэтта с постоянной завихренностью ω^* и линейным профилем скоростей задается в полосе $-1\leqslant y\leqslant 1$ функцией тока $\psi^*=\psi_0^*=0.5\omega^*(1-y^2)$. Пусть $\mathbf{v}$ — периодическое по x возмущение, T — его период. Отождествим точки (x, y) и $(x+T, y)$ области течения, чтобы сделать ее компактной, что необходимо для получения законов сохранения и оценок (2.1). При этом Ω становится двусвязной. Обозначим через Γ_0 компоненту границы Ω с $y=1$, через Γ_1 — компоненту с $y=-1$, тогда $\psi_1=0.5(1-y)$, $\mathbf{u}_1=-0.5\mathbf{e}_x$ и система (3.2) сводится к единственному уравнению

$$T\frac{d\lambda_1(t)}{dt}=-\int\limits_{-1}^{1}dy\int\limits_0^T\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_0}{\partial y^2}\right)dx \tag{3.3}$$

Если первое слагаемое правой части (3.3) проинтегрировать по частям по x, а второе — сначала по y, а затем по x и учесть исчезновение внеинтегральных членов за счет граничных условий и периодичности ψ_0 по x, получится равенство нулю интегралов от каждого слагаемого. Итак, $\lambda_1(t)=\text{const}$. Сохранение λ_1 представляет в данном случае сохранение количества движения вдоль оси x [3], равного $-\lambda_1 T$:

$$\int\limits_\Omega v_x\,dx\,dy=(\mathbf{v}\mathbf{e}_x)=-2(\mathbf{v}\mathbf{u}_1)=-2(\mathbf{v}_0+\lambda_1\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1)=-2\lambda_1(\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1)=-\lambda_1 T$$

Пусть теперь $\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\lambda_1\mathbf{u}_1$ — произвольное возмущение плоского течения Куэтта, так что $\|\mathbf{v}(t)\|_p^1\leqslant\|\mathbf{v}_0(t)\|_p^1+\|\lambda_1\mathbf{u}_1\|_p^1$. В силу (2.1) имеем $\|\mathbf{v}_0(t)\|_p^1\leqslant C\|\omega_0(t)\|_p=C\|\omega_0(0)\|_p$. Так как $\lambda_1\mathbf{u}_1=\mathbf{v}(0)-\mathbf{v}_0(0)$, то $\|\lambda_1\mathbf{u}_1\|_p^1\leqslant\|\mathbf{v}(0)\|_p^1+\|\mathbf{v}_0(0)\|_p^1\leqslant\|\mathbf{v}(0)\|_p^1+C\|\omega_0(0)\|_p$. В итоге

$$\|\mathbf{v}(t)\|_p^1\leqslant 2C\|\omega_0(0)\|_p+\|\mathbf{v}(0)\|_p^1=2C\|\omega(0)\|_p+\|\mathbf{v}(0)\|_p^1\leqslant(4C+1)\|\mathbf{v}(0)\|_p^1$$

Это означает нелинейную устойчивость плоского течения Куэтта относительно двумерных возмущений. Заметим, что для возмущения течения Куэтта между соосными цилиндрами, также имеющего постоянную завихренность, величина $\lambda_1(t)$ не сохраняется и предлагаемый метод доказательства устойчивости не проходит.

4. Поперечные возмущения. Назовем поперечными возмущения вида $\mathbf{v}=v_z(x, y)\mathbf{e}_z$. Подставив $\mathbf{v}^*+\mathbf{v}$ в уравнение Эйлера, получим

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=(\mathbf{v}^*+\mathbf{v})\times(\boldsymbol{\omega}^*+\boldsymbol{\omega})-\operatorname{grad}H \tag{4.1}$$

где H — функция Лэмба [1]. Проекция уравнения (4.1) на ось z дает

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+\frac{\partial\psi^*}{\partial y}\frac{\partial v_z}{\partial x}-\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\frac{\partial v_z}{\partial y}=0. \tag{4.2}$$

Две остальные проекции служат только для вычисления давления и на скорости не влияют. Теми же рассуждениями, что в п. 1, устанавливается сохранение со временем в силу уравнения (4.2) норм $\|v_z(t)\|_p$, $p>1$, и равномерной нормы $\|v_z(t)\|_\infty=\sup\limits_\Omega|v_z(t)|$. Итак, течения с постоянной завихренностью всегда устойчивы в нормах пространств $L_p(\Omega)$

(в частности, в энергетической норме) и $C^0(\bar{\Omega})$ относительно поперечных возмущений. Односвязность для этого не требуется. Поскольку уравнение (4.2) с точностью до обозначения искомой функции совпадает с (2.2), то пример п. 2 показывает, что устойчивости в норме $C^1(\bar{\Omega})$ нет.

5. Случай осевой симметрии. Осесимметричными аналогами течений с постоянной завихренностью являются течения, вихрь которых совпадает с полем скоростей твердого вращения вокруг оси симметрии. Точный смысл аналогии состоит в том, что в обоих случаях основное течение и возмущение инвариантны относительно однопараметрической группы преобразований пространства, порожденной векторным полем вихря основного течения. За счет этой инвариантности вихрь основного течения не входит в уравнение, которому удовлетворяет вихрь возмущения, что и дает возможность получить законы сохранения для вихря возмущения.

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве, обладающая осевой симметрией относительно оси z. Построим в Ω течение $\mathbf{v}^*$, вихрь которого в цилиндрических координатах (r, φ, z), имеет вид $\boldsymbol{\omega}^*=\omega^* r\mathbf{e}_\varphi$. Для этого достаточно к течению Пуазейля $\mathbf{v}_1^*=-0.5\omega^* r^2\mathbf{e}_z$ прибавить гармоническое векторное поле $\operatorname{grad} u$, где u — решение задачи Неймана

$$(5.1)\qquad \Delta u=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=-\mathbf{v}_1^*\mathbf{n}$$

Здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к Γ. Условие разрешимости задачи (5.1) выполнено:

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\,d\Gamma=-\int_\Gamma \mathbf{v}_1^*\mathbf{n}\,d\Gamma=-\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{v}_1^*\,d\Omega=0$$

Обозначим функцию тока течения $\mathbf{v}^*=\mathbf{v}_1^*+\operatorname{grad} u$ через ψ^*. Предположим для простоты, что сечение Ω' области Ω полуплоскостью, ребро которой совпадает с осью симметрии, односвязно, и пусть Γ' — граница Ω'.

Функция тока ψ произвольного осесимметричного возмущения $\mathbf{v}\in C^2(\bar{\Omega})$ течения $\mathbf{v}^*$ удовлетворяет уравнению

$$(5.2)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{D\psi}{r^2}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(\psi^*+\psi)\frac{\partial}{\partial z}\frac{D\psi}{r^2}-\frac{\partial}{\partial z}(\psi^*+\psi)\frac{\partial}{\partial r}\frac{D\psi}{r^2}\right],$$

$$D=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

начальному условию $\psi|_{t=0}=\psi(0)$ и граничному условию $\psi|_{\Gamma'}=0$. Из уравнения (5.2) следует, как и в п. 1, сохранение со временем величин

$$\int_{\Omega'} f\left(\frac{D\psi}{r^2}\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$$

для произвольной гладкой функции f, в частности сохранение норм

$$(5.3)\qquad \|\mathbf{v}\|_p^1=\left(\int_{\Omega'}\left|\frac{D\psi}{r^2}\right|^p r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\right)^{1/p},\quad p>1,\quad \|\mathbf{v}\|_\infty^1=\sup\left|\frac{D\psi}{r^2}\right|$$

Итак, течение $\mathbf{v}^*$ устойчиво в этих нормах. Заметим, что для осесимметричного векторного поля $\mathbf{v}\in C^2(\bar{\Omega})$, $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$, функция $D\psi/r^2$ непрерывна вплоть до оси и нормы (5.3) конечны. Если замыкание области Ω не пересекается с осью z, то первая из норм (5.3) эквивалентна стандартной норме в пространстве $W_p^1(\Omega)$.

Рассмотрим теперь возмущение закрутки $\mathbf{v}=v_\varphi(r,\ z)\mathbf{e}_\varphi$. Азимутальная компонента уравнения (4.1) имеет вид

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial\psi^*}{\partial z}\frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r}-\frac{\partial\psi^*}{\partial r}\frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial z}\right]=0 \tag{5.4}$$

Из уравнения (5.4) следует сохранение со временем норм

$$\|\mathbf{v}\|_p=\left(\int_{\Omega'}|rv_\varphi|^p r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\right)^{1/p},\quad p>1,\quad \|\mathbf{v}\|_\infty=\sup_{\Omega'}|rv_\varphi| \tag{5.5}$$

и устойчивость течения $\mathbf{v}^*$ относительно возмущений закрутки в этих нормах.

Примером течения $\mathbf{v}^*$ с $\operatorname{rot}\mathbf{v}^*=\omega^* r\mathbf{e}_\varphi$ является сферический вихрь Хилла, рассматриваемый как течение в шаровой полости без склейки с внешним безвихревым обтеканием, или более общее течение внутри эллипсоида вращения

$$\frac{r^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1:\qquad \psi^*=\frac{\omega^* a^2b^2r^2}{2(a^2+4b^2)}\left(\frac{r^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}-1\right)$$

Линеаризованное уравнение для малого возмущения завихренности этого течения допускает явное решение в эллиптических функциях. Исходя из этого решения, можно показать, как и в п. 2, неустойчивость $\mathbf{v}^*$ в норме $C^2(\overline{\Omega})$, хотя устойчивость в нормах (5.3) гарантирована.

Другой интересный пример — невязкое течение Пуазейля в круглой трубе единичного радиуса, задаваемое функцией тока $\psi^*=0{,}125\omega^* r^2(r^2-2)$. Считая возмущение $\mathbf{v}$ периодическим по z с периодом T, отождествим точки $(r,\ z)$ и $(r,\ z+T)$ области Ω'. Обозначим через Γ_0' ось симметрии, а через Γ_1' — компоненту границы Ω', соответствующую стенке трубы $(r=1)$. Произвольное осесимметричное возмущение $\mathbf{v}$ представляется в виде $\mathbf{v}_0+\lambda_1\mathbf{u}_1$, где $\mathbf{v}_0$ имеет нулевой расход и функцию тока ψ_0, удовлетворяющую условиям $\psi_0|_{\Gamma_0'}=\psi_0|_{\Gamma_1'}=0$, а $\mathbf{u}_1=-2\mathbf{e}_z$ задается функцией тока $\psi_1=r^2$. Пусть $\psi=\psi_0+\lambda_1\psi_1$, тогда $D\psi=D\psi_0$, и из уравнения (5.2) следует сохранение со временем норм (5.3) для слагаемого $\mathbf{v}_0$. Так же, как и в случае плоского течения Куэтта, величина $\lambda_1(t)$ представляет с точностью до постоянного множителя количество движения вдоль оси z и потому сохраняется

$$\int_{\Omega'}v_z r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z=\int_0^T dz\int_0^1\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_0}{\partial r}-2\lambda_1\right)r\,dr=-\lambda_1 T=\mathrm{const}$$

Следовательно, невязкое течение Пуазейля устойчиво относительно осесимметричных возмущений без азимутальной компоненты в нормах (5.3), а также относительно закрутки в нормах (5.5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973.
2. *Юдович В. И.* Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963. т. 3, вып. 6.
3. *Арнольд В. И.* Об условиях нелинейной устойчивости плоских стационарных криволинейных течений идеальной жидкости.— Докл. АН СССР, 1965, т. 162, № 5.
4. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.

Челябинск

Поступила в редакцию 14.IV.1980