

3. При $n=1$
 (13) $F_1(\xi_1) = c_1 A(l_0, a) + c_2 A(l_0, -a)$
 4. При $n=1, T_1 = \infty, \lim_{\xi_1 \rightarrow \infty} h_1 = 0$

(14) $F_1(\xi_1) = N(\xi_1)$

Входящие в формулы (9)–(14) константы c_1 и c_2 определяются из равенств

$$2 \int_{-b}^{-a} F_1^-(x) dx = H_2 - H_1, \quad 2 \int_a^b F_1^-(x) dx = H_3 - H_2$$

Следует отметить, что из решения данной задачи можно получить решение аналитической задачи для одного флюэтбета, полагая $a=0$, а так же для многослойной области, состоящей из анизотропных и изотропных слоев, при этом достаточно в полученных формулах для изотропных слоев положить $k_{11}^j = k_{22}^j = k_j$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Простейшие случаи движения грунтовой воды в двух слоях с различными коэффициентами фильтрации. — Изв. АН СССР. ОТН, 1939, № 6, с. 75.
2. *Shima S.* On the application of variation principle to seepage flow underneath dams. — In: Proc. 5th Japan. Nat. Congr. Appl. Mech., 1955. Tokyo, 1956, p. 283.
3. *Веремчук И. А., Прусов И. А.* Стационарная фильтрация жидкости под флюэтбетом в двухслойном анизотропном грунте. — В кн.: Тез. докл. Всес. совещания-семинара по краевым задачам теории фильтрации. Ч. 1. Ровно, 1979, с. 29.

Могилев

Поступила в редакцию
14.III.1980

УДК 532.591

ОБ ЭВОЛЮЦИИ КВАЗИПЛОСКИХ СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

СУВОРОВ А. М.

Одним из простейших модельных уравнений, описывающих нелинейные волновые процессы в средах с дисперсией, является уравнение Кортевега — де Вриза (КдВ) [1], которое впервые было выведено при исследовании длинных волн на поверхности жидкости в отсутствие потерь. Обобщение этого уравнения на двумерный случай дано в работе [2]. Точные аналитические решения двумерного уравнения КдВ рассмотрены в [3, 4], численный метод нахождения неодномерных солитонных решений изложен в [5]. Аналогичное уравнение для поверхностных и внутренних волн в идеальной несжимаемой стратифицированной жидкости получено в [6]. При этом в невозмущенном состоянии жидкость покоилась.

В настоящей работе методом многомасштабных асимптотических разложений выводится модельное уравнение, описывающее эволюцию внутренних волн в потоке вязкой стратифицированной жидкости с учетом эффектов нелинейности, дисперсии и дифракции в диффузионном приближении. Рассматривается приближенное аналитическое решение полученного уравнения в случае слабой нелинейности, дается его анализ. Обсуждается возможность использования приближения Буссинеска.

1. Пусть движение вязкой стратифицированной жидкости, заключенной между двумя твердыми поверхностями, описывается следующими вытекающими из уравнений гидродинамики соотношениями:

$$(1.1) \quad U(z) = U_0 \int_{-H}^z \frac{dz}{\mu} \left(\int_{-H}^0 \frac{dz}{\mu} \right)^{-1}, \quad \frac{dp_0}{dz} = -g\rho_0(z)$$

Здесь $\mu(z)$ — динамический коэффициент вязкости, U_0 — скорость движения верхней поверхности. Используя это состояние жидкости в качестве исходного, наложим на него трехмерные слабые возмущения скорости $\mathbf{u} = (u, v, w)$, давления p и плотности ρ . Тогда систему уравнений и граничных условий для флуктуаций запишем

в виде

$$(1.2) \quad (\rho_0 + \rho)(Lu + Uu_x + wU_z) = -\text{grad } p - g\rho + \mu\Delta u + \mu_z(u_x + \text{grad } w)$$

$$(1.3) \quad \text{div } u = 0, \quad L\rho + U\rho_x + w\rho_z = 0 \quad (-\infty < x, y < \infty, -H < z < 0)$$

$$u = 0 \quad (z = -H, 0)$$

$$L \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}, \quad U = (U, 0, 0), \quad g = (0, 0, g)$$

Рассмотрим далее ограниченное по оси y возмущение, движущееся со скоростью c вдоль оси x и испытывающее медленную эволюцию как во времени, так и в пространстве. Перейдем в систему координат, связанную с возмущением, введем безразмерные переменные и будем искать решения вида

$$(1.4) \quad \Phi = \varepsilon^2 \Phi_1 + \varepsilon^4 \Phi_2 + \dots$$

$$x' = (x - ct)\lambda^{-1}, \quad z' = zH^{-1}, \quad y' = ya^{-1}, \quad t' = \varepsilon^2 t c_0 \lambda^{-1}$$

$$(u', c', U') = (u, c, U)c_0^{-1}, \quad (v', w') = (v, w)(\varepsilon c_0)^{-1}$$

$$(\rho', \rho_0') = (\rho, \rho_0)\rho_1^{-1}, \quad p' = p(\rho_1 c_0^2)^{-1}, \quad \mu' = \varepsilon^3 \mu(\rho_1 H c_0)^{-1}$$

$$c_0 = \sqrt{gH}, \quad \rho_1 = \rho_0(0)$$

Здесь λ, a — характерные размеры возмущения вдоль осей x и y соответственно, $\varepsilon = H\lambda^{-1} = \lambda a^{-1} \ll 1$, Φ — любая из функций u', v', w', p' и ρ' . Условие $H\lambda^{-1} \ll 1$ означает, что глубина жидкости мала по сравнению с характерным размером возмущения вдоль оси x . Кроме того, характерный размер возмущения вдоль направления распространения полагается малым по сравнению с характерным поперечным масштабом, т. е. возмущение квазиплоское. В дальнейшем штрихи у безразмерных переменных опускаются.

Подставляя (1.4) в (1.1)–(1.3) и приравнивая члены одинакового порядка малости, получим в первом приближении линейную систему уравнений для идеальной жидкости, допускающую решение методом разделения переменных:

$$(1.5) \quad u_1 = A(x, y, t)W_z(z), \quad w_1 = -A_x W$$

$$v_{1x} = U_1 A_y (WU_1^{-1})_z, \quad \rho_1 = \rho_{0z} U_1^{-1} A W$$

$$p_1 = -\rho_0 U_1^2 A (WU_1^{-1})_z, \quad U_1 = U - c$$

где c и W — собственные значения и собственные функции однородной краевой задачи

$$(1.6) \quad (\rho_0 W_z)_z - W \left[\frac{(\rho_0 U_z)_z}{U_1} + \frac{\rho_{0z}}{U_1^2} \right] = 0 \quad (-1 < z < 0)$$

$$W = 0 \quad (z = -1, 0)$$

Здесь $A(x, y, t)$ — неизвестная функция, определяемая из следующего приближения.

Полагая $U_1 \neq 0$ при $z \in [-1, 0]$, рассмотрим далее отдельную моду волнового движения. Во втором приближении имеем неоднородную систему уравнений для Φ_2 . Сводя ее к одному уравнению для w_2 и используя условие разрешимости неоднородной краевой задачи, найдем в итоге уравнение для $A(x, y, t)$:

$$(1.7) \quad (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A A_x + \alpha_3 A_{xxx})_x + \alpha_4 A_{yy} + \alpha_5 A_x = 0$$

$$\alpha_1 = \int_{-1}^0 \frac{W^2}{U_1^2} \left[(\rho_0 U_z)_z + \frac{2\rho_{0z}}{U_1} \right] dz$$

$$\alpha_2 = \int_{-1}^0 \left\{ \frac{\rho_0 W^3}{2U_1} \left[2U_z \left(\frac{\beta}{U_1} \right)_z - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\rho_0 U_{zz}}{U_1} \right)_z + \frac{U_1}{\beta} \left(\frac{\beta^2}{U_1^3} \right)_z \right] + \rho_{0z} W W_z^2 + W^2 W_z \left[2\rho_0 U_1 \left(\frac{\beta}{U_1} \right)_z \right] \right\} dz$$

$$\alpha_3 = \int_{-1}^0 \rho_0 W^2 dz, \quad \alpha_4 = - \int_{-1}^0 \frac{\rho_{0z} W^2}{U_1^2} dz$$

$$\alpha_5 = - \int_{-1}^0 (\mu W_{zz})_{zz} W dz, \quad \beta = - \frac{\rho_{0z}}{\rho_0}$$

Легко видеть, что первые три члена уравнения (1.7) в скобках совпадают с известным уравнением Кортвега – де Вриза. Четвертый член учитывает дифракционную расходимость, связанную с ограниченностью возмущения вдоль оси y , а пятый – диссипацию. Таким образом, уравнение (1.7) описывает эволюцию начального возмущения в потоке стратифицированной жидкости с учетом эффектов нелинейности, дисперсии, дифракции и диссипации в простейшем виде.

2. Рассмотрим более подробно уравнение, получающееся из исходной системы (1.2), (1.3), полагая в (1.4)

$$u' = u(\varepsilon c_0)^{-1}, \quad (v', w') = (v, w)(\varepsilon^2 c_0)^{-1}; \quad \rho' = \rho(\varepsilon \rho_1)^{-1}, \quad p' = p(\varepsilon c_0^2 \rho_1)^{-1}$$

В этом случае коэффициент при нелинейном члене в (1.7) будет иметь вид $\varepsilon \alpha_2$, что дает возможность оценить его влияние на эволюцию начального возмущения методом возмущений

$$A = A_1 + \varepsilon A_2 + \dots$$

Пусть в момент времени $t=0$ задано возмущение

$$A(x, y, t=0) = \exp(-y^2 + 2\pi i x)$$

Заметим, что волновое число записано в безразмерной форме $k' = k\lambda = 2\pi$. Если искать решение линеаризованного уравнения для A_1 вида

$$A_1(x, y, t) = B_1(y, t) \exp(2\pi i x)$$

то для B_1 получим уравнение параболического типа

$$B_{1t} - \left(i \frac{\beta_3}{6} - \beta_5 \right) B_1 - i \frac{\beta_4}{4} B_{1yy} = 0, \quad \beta_3 = \frac{48\pi^3 \alpha_3}{\alpha_1}, \quad \beta_4 = \frac{2\alpha_4}{\pi \alpha_1}, \quad \beta_5 = \frac{\alpha_5}{\alpha_1}$$

с начальным условием $B_1(y, t=0) = \exp(-y^2)$.

Решая эту задачу [7], имеем

$$(2.1) \quad A_1 = \exp \left[2\pi i x + \left(i \frac{\beta_3}{6} - \beta_5 \right) t - \frac{y^2(1 - i\beta_4 t)}{\alpha} - \frac{i}{2} \arctg(\beta_4 t) \right] / \sqrt[4]{\alpha}$$

$$\alpha = 1 + \beta_4^2 t^2$$

Отсюда видно, что с ростом времени амплитуда начальной волны при $y=0$ убывает как $\exp(-\beta_5 t) / \sqrt[4]{\alpha}$ вследствие диссипации (экспонента в числителе) и диффузионного расплывания (иррациональное выражение в знаменателе). Ширина гребня волны увеличивается пропорционально $\sqrt[4]{\alpha}$.

Отыскивая далее решение для A_2 в виде

$$A_2(x, y, t) = B_2(y, t) \exp(4\pi i x)$$

получим с учетом (2.1) для B_2 неоднородное уравнение параболического типа

$$(2.2) \quad B_{2t} - \left(i \frac{4\beta_3}{3} - \beta_5 \right) B_2 - i \frac{\beta_4}{8} B_{2yy} =$$

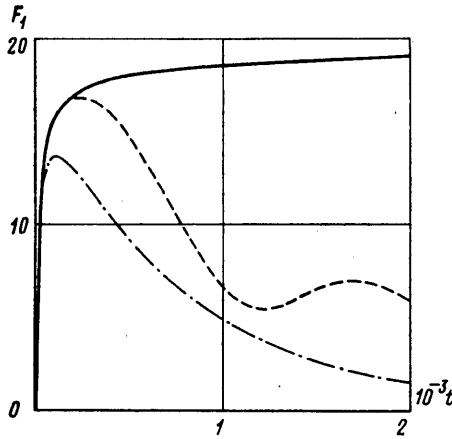
$$= - \frac{2\pi i \alpha_2}{\alpha_1} \exp \left[\left(i \frac{\beta_3}{3} - 2\beta_5 \right) t - \frac{2y^2(1 - i\beta_4 t)}{\alpha} - i \arctg(\beta_4 t) \right] / \sqrt[4]{\alpha}$$

Решая (2.2) с начальным условием $B_2(y, t=0) = 0$ и возвращаясь к переменной A_2 , найдем

$$A_2 = - \frac{2\pi \alpha_2}{\sqrt[4]{i\alpha_1}} \exp(4\pi i x) F(y, t)$$

$$F(y, t) = \frac{\exp[-2y^2(1+i\beta_4 t)/\alpha]}{\sqrt[4]{\alpha}} \times \int_0^t \frac{\exp i/2 \arctg \{ (1-\beta_4^2 \tau t) / \beta_4 (\tau+t) \} - \beta_5 (\tau+t) + i\beta_3 (t/2t-\tau)}{\sqrt[4]{1+\beta_4^2 \tau^2}} d\tau$$

На фигуре представлен график функции $F_1(t) = |F(y=0, t)|$, определяющий изменение амплитуды второй гармоники во времени при $y=0$ для различных значений β_3, β_4 и β_5 ($\beta_3=\beta_5=0, \beta_4=0,1$ — сплошная линия; $\beta_3=0,005, \beta_4=0,1, \beta_5=0$ — штрихо-



вая линия, $\beta_3=0, \beta_4=0,1, \beta_5=0,001$ — штрихпунктирная линия). При малых t амплитуда второй гармоники во всех трех случаях растет линейно, как и в плоской волне. При этом нелинейное искажение профиля волны преобладает над дифракционными, диссипативными и дисперсионными эффектами. С ростом t при $\beta_3=\beta_5=0, \beta_4=0,1$ дифракционные эффекты приводят к стабилизации амплитуды второй гармоники и выходу ее на постоянный режим. Учет диссипации и дифракции (штрихпунктирная линия) при некотором значении t , соответствующем максимуму кривой, компенсирует нелинейные эффекты. После этого $F_1(t)$ начинает уменьшаться, причем ее затухание протекает более медленно, чем это было бы при распространении отдельной волны с удвоенной частотой. Учет дисперсии приводит к модуляции амплитуды второй гармоники во времени (штриховая линия). Этот факт связан с отсутствием синхронизации вследствие изменения фазы второй гармоники относительно фазы вынуждающей волны.

3. Известно (см., например, [8]), что для постоянной частоты Вайселя — Брента в отсутствие потока и в приближении Буссинеска уравнение, описывающее длинные нелинейные внутренние волны, становится линейным. Это хорошо видно и из (1.7), поскольку в приближении Буссинеска коэффициент α_2 при нелинейном члене принимает вид

$$(3.1) \quad \alpha = \alpha_2' = - \int_{-1}^0 \frac{W^3}{U_1} \left[\left(\frac{U_{zz}}{U_1} \right)_z + \frac{2\rho_{0zz}}{\rho_0 U_1^3} - \frac{3\rho_{0z} U_z}{\rho_0 U_1^3} \right] dz$$

Считая $U = \text{const}$, $\rho_0 = \rho_1(1-\delta z)$, имеем из (3.1) $\alpha_2' = 0$. Рассмотрим более подробно случай

$$U = az + U_0, \quad \rho_0 = \rho_1(1-\delta z)$$

Тогда

$$(3.2) \quad \alpha_2' = -3a\delta \int_{-1}^0 \frac{W^3 dz}{(az + U_0 - c)^4}$$

Полагая далее, что $a \ll U_0 - c$ и удерживая в (3.2) члены вплоть до порядка $O(a)$, имеем с учетом (1.6)

$$\alpha_2' \approx - \frac{2a\delta B^3}{(U_0 - c)^4 (n\pi)^{3/2}} [1 - (-1)^n]$$

где B — амплитуда собственной функции, $n=1, 2, 3, \dots$ — номер моды волнового движения.

Отсюда видно, что для четных n в принятом приближении $\alpha_2' \approx 0$ и уравнение (1.7) является линейным. Для нечетных мод

$$\alpha_2' \approx -4a\delta B^3 / (U_0 - c)^4 (n\pi)^{3/2}$$

и профиль начального возмущения испытывает нелинейные искажения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Korteweg D. J., de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long solitary waves.— *Philos. Mag.*, 1895, Ser. 5, v. 39.
2. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах.— Докл. АН СССР, 1970, т. 192, № 4, с. 753.
3. Захаров В. Е. Неустойчивость и нелинейные колебания солитонов.— Письма в ЖЭТФ, 1975, т. 22, № 7, с. 364.
4. Магеев В. Б. Римановы поверхности и периодические решения нелинейных уравнений типа Кортевега — де Вриза.— В кн.: Нелинейные волны. М.: Наука, 1979, с. 20.
5. Петвиашвили В. И. Неоднородные солитоны.— В кн.: Нелинейные волны. М.: Наука, 1979, с. 5.
6. Леонов А. И. О двумерных уравнениях Кортевега — де Вриза в нелинейной теории поверхностных и внутренних волн.— Докл. АН СССР, 1976, т. 229, № 4, с. 820.
7. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики, 4-е изд. испр. М.: Наука, 1972. 735 с.
8. Long R. R. On the Boussinesq approximation and its role in the theory of internal waver.— *Tellus.*, 1965, v. 17, № 1, p. 46.

Севастополь

Поступила в редакцию
7.I.1980

УДК 533.6.011

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОТРЫВНОГО ТЕЧЕНИЯ ПЕРЕД ЦИЛИНДРОМ С ИГЛОЙ

МЫШЕНКОВ В. И.

В рамках модели вязкой жидкости решается задача осесимметричного обтекания совершенным теплопроводным газом цилиндра с выступающей перед ним тонкой иглой при до- и сверхзвуковых скоростях набегающего потока.

Исследуется образование и развитие отрывного течения перед лобовой поверхностью цилиндра, вызванного иглой. Изучается изменение газодинамических и геометрических параметров отрывной зоны в зависимости от чисел Маха и Рейнольдса набегающего потока. Полученные результаты сравниваются с имеющимися экспериментальными данными.

Тонкая игла, выступающая из лобовой части тупого тела, при больших скоростях вызывает существенное изменение картины его обтекания благодаря образованию отрывной зоны у иглы [1]. В результате вместо обтекания исходного тупого тела реализуется обтекание некоторого фиктивного с конической лобовой частью. Отходящая ударная волна с прямым скачком у оси симметрии при этом заменяется присоединенной к игле конической волной, а сопротивление тела и теплопередача к нему значительно снижаются. Широкое экспериментальное исследование отрывных течений, вызванных иглами, выступающими перед тупыми телами, было проведено в [1]. Интерес к этим исследованиям был обусловлен возможностью применения игл для уменьшения сопротивления и теплопередачи, а также для эффективного способа управления. Исследования были проведены в диапазонах чисел Маха набегающего потока $1,75 \leq M \leq 14$ и чисел Рейнольдса, рассчитанных по параметрам набегающего потока и радиусу миделя, близких к переходным $0,42 \cdot 10^6 \leq Re \leq 0,75 \cdot 10^6$. Были исследованы основные особенности отрывного течения и зависимость сопротивления тел от длины иглы [1].