5. *Вайнштейн П. Б., Нигматулин Р. И.* Горение смесей газа с частицами.– ПМТФ, 1971, № 4, с. 19.
6. *Нигматулин Р. И., Рахматулина И. Х.* Нестационарный тепломассообмен около сферической частицы.– ПМТФ, 1977, № 4, с. 95.
7. *Беляев А. Ф., Боболев В. К., Коротков А. П., Сулимов А. А., Чуйко С. В.* Переход горения конденсированных систем во взрыв. М.: Наука, 1973. 292 с.

Москва

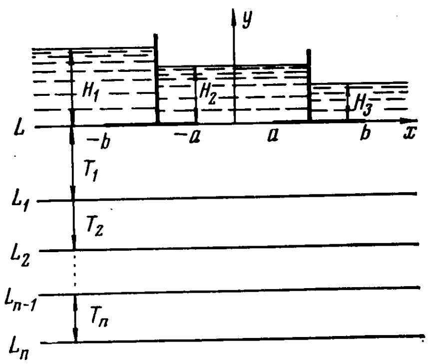
Поступила в редакцию
6.II.1980

УДК 532.546

# СТАЦИОНАРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПОД ФЛЮТБЕТАМИ В АНИЗОТРОПНЫХ ГРУНТАХ

ВЕРЕМЧУК И. А.

Впервые вопросы фильтрации жидкости под плоским флютбетом в двухслойном грунте, состоящем из однородных изотропных слоев одинаковой мощности, с помощью аналитической теории линейных дифференциальных уравнений исследовались в работе [1]. Приближенное решение этой же задачи для слоев различной мощности методами вариационного исчисления дано в [2]. Решение подобной задачи для однородных анизотропных слоев различной мощности с помощью методов специального представления комплексной переменной и линейного сопряжения приведено в [3].




В настоящей работе тем же методом, что и в работе [3], исследуется плоская стационарная фильтрация жидкости под двумя флютбетами в многослойном грунте, состоящем из $n$ однородных анизотропных слоев различной мощности, причем главные направления анизотропии каждого слоя расположены произвольно по отношению к горизонту.

Обозначим через $S_j^-$ область фильтрации, а через $S_j^+$ симметричную ей область относительно оси $x$. Считаем, что фильтрация подчиняется линейному закону и описывается уравнениями [3]

$$c_{11}^j \frac{\partial^2 h_j}{\partial x^2} + 2c_{12}^j \frac{\partial^2 h_j}{\partial x\, \partial y} + c_{22}^j \frac{\partial^2 h_j}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

$$c_{11}^j = k_{11}^j \cos^2 \alpha_j + k_{22}^j \sin^2 \alpha_j, \qquad c_{22}^j = k_{11}^j \sin^2 \alpha_j + k_{22}^j \cos^2 \alpha_j$$

$$c_{12}^j = (k_{11}^j - k_{22}^j) \sin \alpha_j \cos \alpha_j \qquad (j=1, \ldots, n)$$

Здесь $h_j$, $k_{11}^j$, $k_{22}^j$, $\alpha_j$ – значения соответственно напоров, коэффициентов фильтрации вдоль главных направлений, угла наклона одного из главных направлений анизотропии к горизонту в каждом слое. Схематически рассматриваемая задача представлена на фигуре.

Для решения поставленной задачи надо найти решение уравнений (1) при следующих граничных условиях:

$$h_1 = H_k \text{ на } L'' = \{|x| < |a|;\ |b| < |x|\}, \qquad v_{N1} = 0 \text{ на } L' = L - L'' \tag{2}$$

$$h_j = h_{j+1}, \qquad v_{Nj} = v_{Nj+1} \text{ на } L_j \quad (j=1, \ldots, n-1) \tag{3}$$

$$v_{Nn} = 0 \text{ на } L_n \tag{4}$$

$$\left( v_{Nj} = c_{12}^j \frac{\partial h_j}{\partial x} + c_{22}^j \frac{\partial h_j}{\partial y} \right)$$

где $H_k$ $(k=1, 2, 3)$ – напоры в бьефах, $v_{Nj}$ – нормальные скорости.

Для решения этой задачи методом линейного сопряжения воспользуемся формулами [3]

$$F_{0j}(\xi_j)-F_{0j}(\bar{\xi}_j)=h_j+i\eta_j,\quad F_j(\xi_j)-F_j(\bar{\xi}_j)=\partial(h_j+i\eta_j)/\partial x, \tag{5}$$

$$\lambda_{0j}F_j(\xi_j)-\bar{\lambda}_{0j}F_j(\bar{\xi}_j)=\partial(h_j+i\eta_j)/\partial y,\qquad \xi_j=x+\lambda_{0j}(y+d_{j-1})$$

$$\lambda_{0j}=(-c_{12}^j+i\varkappa_{0j})/c_{22}^j=\lambda_{0j}'+i\lambda_{0j}''$$

$$\varkappa_{0j}=(c_{11}^jc_{22}^j-(c_{12}^j)^2)^{1/2}$$

$$d_{j-1}=\sum_{r=1}^{j-1}T_r\quad (j=1,\ldots,n),\quad d_0=0,\quad i=\sqrt{-1}$$

Здесь $F_{0j}(\xi_j)$ – аналитические функции в областях фильтрации комплексного переменного $\xi_j$, $h_j$ и $\eta_j$ – попарно гармонически несопряженные функции переменных $\mathrm{Re}\,\xi_j$ и $\mathrm{Im}\,\xi_j$.

Как следует из формул (5), условий (2)–(4) и свойств функций $h_j$ и $\eta_j$, функции $F_j(\xi_j)$ должны удовлетворять граничным условиям

$$F_1^-(t)-F_1^+(t)=0 \text{ на } L'',\qquad F_1^-(t)+F_1^+(t)=0 \text{ на } L' \tag{6}$$

$$\mathrm{Re}(F_j(t)-F_j(\bar{t}))=\mathrm{Re}(\bar{F}_{j+1}(x)-\overset{+}{F}_{j+1}(x)) \tag{7}$$

$$\varkappa_{0j}\,\mathrm{Im}(F_j(t)+F_j(\bar{t}))=\varkappa_{0j+1}\,\mathrm{Im}(\bar{F}_{j+1}(x)+\overset{+}{F}_{j+1}(x))$$

на $L_j$ $(j=1,\ldots,n-1)$

$$\mathrm{Im}\,(F_n(t)+F_n(\bar{t}))=0 \text{ на } L_n \tag{8}$$

Условиям (6), (8) удовлетворим, полагая $(j=1,\ldots,n)$

$$F_j(\xi_j)=c_1A(l_{j-1},a)+c_2A(l_{j-1},-a)+R_j(\xi_j),\quad \xi_j\in S_j^- \tag{9}$$

$$F_j(\xi_j)=c_1A(\bar{l}_{j-1},a)+c_2A(\bar{l}_{j-1},-a)+R_j^*(\xi_j),\quad \xi_j\in S_j^+$$

$$A(l_{j-1},a)=iw\left\{\frac{\operatorname{sh}w(\xi_j-l_{j-1}-a)}{\operatorname{sh}w(\xi_j-l_{j-1}+a)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{\operatorname{sh}w(\xi_j-l_{j-1}+b)\operatorname{sh}w(\xi_j-l_{j-1}-b)}\right\}^{1/2},\qquad R_1(\xi_1)=B(\lambda_{01})$$

$$R_1^*(\xi_1)=B(\bar{\lambda}_{01})$$

$$B(\lambda_{01})=(n-1)\frac{X(\xi_1)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma_nf_1(\tau)\,d\tau}{X(\tau-\lambda_{01}T_1)\operatorname{th}\gamma_n(\tau-\lambda_{01}T_1-\xi_1)}$$

$$X(\xi_1)=\left(\frac{\operatorname{sh}\varepsilon(\xi_1+a)\operatorname{sh}\varepsilon(\xi_1-b)\operatorname{sh}\varepsilon(\xi_1+b)}{\operatorname{sh}\varepsilon(\xi_1-a)}\right)^{1/2}$$

$$R_j(\xi_j)=E(f_j)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma_jf_j(\tau)\,d\tau}{\operatorname{th}\gamma_i(\tau-\xi_j)}$$

$$R_j^*(\xi_j)=E(f_j^*)\qquad (j=2,\ldots,n-1)$$

$$R_n(\xi_n)=R_n^*(\xi_n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma_nf_n(\tau)\,d\tau}{\operatorname{sh}\gamma_n(\tau-\xi_n)}$$

$$f_j(\tau)=f_{1j}(\tau)+if_{2j}(\tau),\qquad f_j^*(\tau)=i\overline{f_j(\tau)}$$

$$f_{21}=f_{2n}=0,\qquad l_{j-1}=\sum_{r=1}^{j-1}\lambda_{0r}T_r,\qquad l_0=0$$

$$w=\frac{\pi}{2\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_{0j}''T_j},\qquad \gamma_j=\frac{\pi}{\lambda_{0j}''T_j}\qquad (j=2,\ldots,n-1)$$

$$\gamma_n=\frac{\pi}{2\lambda_{0n}''T_n},\qquad \varepsilon=\frac{\pi}{2\lambda_{01}''T_1}$$

Здесь $f_j(\tau)$ $(j=1,\ldots,n)$ – произвольные комплексные функции вещественного переменного $\tau$, $c_1$ и $c_2$ – произвольные вещественные константы.

Удовлетворяя условиям (7) и воспользовавшись формулами Сохоцкого – Племеля для функций $R_j(\xi_j)$ и $R_j^*(\xi_j)$ на $L_j$, получим следующую систему интегральных уравнений для определения неизвестных функций $f_j(\tau)$:

$$\begin{aligned}
&2(1-n)f_1(x)=\psi_2(x)+A_2(x)\\
&2(n-1)M_n(x)=r_1\varphi_2(x)+B_2(x)+Q_1(x)\\
&\psi_j(x-l_j')-A_j(x-l_j')=-\varphi_{j+1}(x)-B_{j+1}(x)\\
&\varphi_j(x-l_j')+B_j(x-l_j')=r_j(B_j(x)-\varphi_{j+1}(x))-Q_{j-1}(x)\qquad (j=2,\ldots,n-2)\\
&\psi_{n-1}(x-l_{n-1}')-A_{n-1}(x-l_{n-1}')=-2f_n(x)\\
&\varphi_{n-1}(x-l_{n-1}')+B_{n-1}(x-l_{n-1}')=-4ir_{n-1}R_n(x)-Q_{n-1}(x)\\
&\varphi_j(x)=f_{1j}(x)-f_{2j}(x),\qquad \psi_j(x)=f_{1j}(x)+f_{2j}(x)
\end{aligned}\tag{10}$$

$$M_n(x)=\frac{X_1(x)}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma_nf_1(\tau)\,d\tau}{X_1(\tau)\operatorname{th}\gamma_n(\tau-x)}$$

$$X_1(x)=\left(\frac{\operatorname{ch}\varepsilon(x+a)\operatorname{ch}\varepsilon(x-b)\operatorname{ch}\varepsilon(x+b)}{\operatorname{ch}\varepsilon(x-a)}\right)^{1/2}$$

$$A_j(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma_i\varphi_j(\tau)\,d\tau}{\operatorname{th}\gamma_j(\tau-x)}$$

$$B_j(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma_i\psi_j(\tau)\,d\tau}{\operatorname{th}\gamma_j(\tau-x)}$$

$$Q_j(x)=2(1-r_j)\operatorname{Im}\left[c_1A(l_{j-1},a)+c_2A(l_{j-1},-a)\right]$$

$$r_j=\varkappa_{0j+1}/\varkappa_{0j},\qquad l_j'=\lambda_{0j}'T_j\quad (j=1,\ldots,n-1)$$

Определив из системы (10) $f_j(\tau)$, $f_j^*(\tau)$, найдем вначале $F_{0j}(\xi_j)$, проинтегрировав по $\xi_j$ (9), а затем по первой из формул (5) и значения напоров $h_j$ в каждом слое.

Исследуем частные случаи этой задачи.

1. При $n=2$ система (10) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
&f_1(x)=-f_2(x)\\
&M_1(x)=\frac{r_1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{\gamma_2f_2(\tau)\,d\tau}{\operatorname{sh}\gamma_2(\tau-x)}+Q_1(x)
\end{aligned}\tag{11}$$

2. При $n=2$, $T_2=\infty$, $\lim\limits_{\xi_2\to\infty}h_2'=0$ получаем систему

$$\begin{aligned}
&f_1(x)=-f_2(x)\\
&M_1(x)=\frac{r_1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f_2(\tau)\,d\tau}{\tau-x}+2(1-r_1)N(x)\\
&N(x)=i[c_1N_1(a)+c_2N_2(-a)]\\
&N_1(a)=\left(\frac{x-l_1-a}{(x-l_1+a)(x-l_1+b)(x-l_1-b_1)}\right)^{1/2},\qquad \lim_{\tau\to\infty}f_2(\tau)=0
\end{aligned}\tag{12}$$

3. При $n=1$

$$F_1(\xi_1)=c_1A(l_0, a)+c_2A(l_0, -a) \tag{13}$$

4. При $n=1$, $T_1=\infty$, $\lim\limits_{\xi_1\to\infty} h_1=0$

$$F_1(\xi_1)=N(\xi_1) \tag{14}$$

Входящие в формулы (9)–(14) константы $c_1$ и $c_2$ определяются из равенств

$$2\int\limits_{-b}^{-a} F_1^-(x)\,dx=H_2-H_1, \qquad 2\int\limits_{a}^{b} F_1^-(x)\,dx=H_3-H_2$$

Следует отметить, что из решения данной задачи можно получить решение аналитической задачи для одного флютбета, полагая $a=0$, а так же для многослойной области, состоящей из анизотропных и изотропных слоев, при этом достаточно в полученных формулах для изотропных слоев положить $k_{11}{}^j=k_{22}{}^j=k_j$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Простейшие случаи движения грунтовой воды в двух слоях с различными коэффициентами фильтрации.– Изв. АН СССР. ОТН, 1939, № 6, с. 75.
2. *Shima S.* On the application of variation principle to seepage flow underneath dams.– In: Proc. 5th Japan. Nat. Congr. Appl. Mech., 1955. Tokyo, 1956, p. 283.
3. *Веремчук И. А., Прусов И. А.* Стационарная фильтрация жидкости под флютбетом в двухслойном анизотропном грунте.– В кн.: Тез. докл. Всес. совещания-семинара по краевым задачам теории фильтрации. Ч. 1. Ровно, 1979, с. 29.

Могилев

Поступила в редакцию
14.III.1980

---

УДК 532.591

# ОБ ЭВОЛЮЦИИ КВАЗИПЛОСКИХ СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

**СУВОРОВ А. М.**

Одним из простейших модельных уравнений, описывающих нелинейные волновые процессы в средах с дисперсией, является уравнение Кортевега – де Вриза (КдВ) [1], которое впервые было выведено при исследовании длинных волн на поверхности жидкости в отсутствие потерь. Обобщение этого уравнения на двумерный случай дано в работе [2]. Точные аналитические решения двумерного уравнения КдВ рассмотрены в [3, 4], численный метод нахождения неодномерных солитонных решений изложен в [5]. Аналогичное уравнение для поверхностных и внутренних волн в идеальной несжимаемой стратифицированной жидкости получено в [6]. При этом в невозмущенном состоянии жидкость покоилась.

В настоящей работе методом многомасштабных асимптотических разложений выводится модельное уравнение, описывающее эволюцию внутренних волн в потоке вязкой стратифицированной жидкости с учетом эффектов нелинейности, дисперсии и дифракции в диффузионном приближении. Рассматривается приближенное аналитическое решение полученного уравнения в случае слабой нелинейности, дается его анализ. Обсуждается возможность использования приближения Буссинеска.

1. Пусть движение вязкой стратифицированной жидкости, заключенной между двумя твердыми поверхностями, описывается следующими вытекающими из уравнений гидродинамики соотношениями:

$$U(z)=U_0\int\limits_{-H}^{z}\frac{dz}{\mu}\left(\int\limits_{-H}^{0}\frac{dz}{\mu}\right)^{-1}, \qquad \frac{dp_0}{dz}=-g\rho_0(z) \tag{1.1}$$

Здесь $\mu(z)$ – динамический коэффициент вязкости, $U_0$ – скорость движения верхней поверхности. Используя это состояние жидкости в качестве исходного, наложим на него трехмерные слабые возмущения скорости $\mathbf{u}=(u, v, w)$, давления $p$ и плотности $\rho$. Тогда систему уравнений и граничных условий для флуктуаций запишем