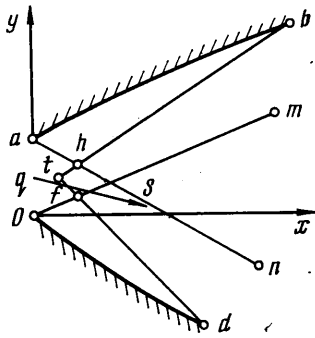


УДК 533.697.4

О ПОСТРОЕНИИ КОМПАКТНЫХ НЕСИММЕТРИЧНЫХ СОПЛ МАКСИМАЛЬНОЙ ТЯГИ ПРИ ЗАДАННОЙ ПОДЪЕМНОЙ СИЛЕ

РЫЛОВ А. И.

Решена вариационная задача о построении сверхзвуковых несимметричных плоских сопел максимальной тяги при заданной подъемной силе и заданных габаритных ограничениях. Длины контуров, согласно этим ограничениям, предполагаются достаточно малыми, так что они являются невзаимодействующими. В силу этого для решения используется метод неопределенного контрольного контура [1]. Показано, что сформулированная задача эквивалентна задаче о максимальной тяге (при отсутствии условия о подъемной силе) в системе координат, отличающейся от исходной поворотом на некоторый угол, и при неизменных габаритных ограничениях. Исследовано влияние габаритных ограничений на решение задачи. Выяснено, что в некоторых случаях метод контрольного контура неприменим, в частности из-за возможности наличия ударных волн в области влияния контура. Проведенные численные расчеты иллюстрируют влияние подъемной силы на геометрию и тягу сопел.



Фиг. 1

Укажем, что ранее рассматривались частные случаи этой задачи. Так, в [2] решена задача о плоском контуре максимальной тяги при заданной подъемной силе, а в [3] — задача о несимметричном сопле максимальной тяги без условия о подъемной силе.

1. Рассмотрим сверхзвуковое несимметричное плоское сопло с контурами ab и od (фиг. 1). Пусть внутри сопла реализуется сверхзвуковое изэнтропическое и изоэнергетическое течение идеального газа. Поток на входе в сопло в сечении oa сверхзвуковой или звуковой, но не обязательно равномерный. Предполагается, что контуры сопла не взаимодействуют, т.е. последние характеристики an и om начальных

вееров разрежения проходят правее конечных точек контуров. Внешнее давление для верхнего контура равно p° , для нижнего — p_0 .

Тяга χ_x и подъемная сила χ_y , создаваемые контурами ab и od сопла, равны

$$(1.1) \quad \chi_x = \int_a^b (py' + u) d\psi - (y_b - 1)p^\circ + y_a p_0 - \beta_x$$

$$(1.2) \quad \chi_y = \int_a^b (px' - v) d\psi - x_b p^\circ + x_a p_0 - \beta_y$$

Здесь p — давление; ρ — плотность; u и v — компоненты вектора скорости; ψ — функция тока; y' и x' — производные по ψ вдоль кривой dtb , по которой берутся интегралы в (1.1) и (1.2), причем отрезки ft и th лежат внутри начальных вееров разрежения, а df и hb лежат в областях влияния нижнего и верхнего контуров соответственно; коэффициенты β_x

и β_v зависят от параметров потока в начальном сечении oa и в дальнейшем использоваться не будут; $w = \sqrt{u^2 + v^2}$; M — число Маха.

Задача формулируется следующим образом. Для заданных ограничений на концевые точки b и d выбрать такие контуры ab и ad , чтобы тяга сопла была максимальной при заданной величине подъемной силы, т. е. чтобы

$$\chi_x = \max \text{ при } \chi_v = z = \text{const}$$

где χ_x и χ_v даются формулами (1.1) и (1.2).

Для решения поставленной задачи воспользуемся одной из модификаций метода контрольного контура — методом неопределенного контрольного контура [1]. В соответствии с этим составим вспомогательный функционал

$$(1.3) \quad J = \chi_x + \lambda(\chi_v - z) + \int_a^b \mu(\psi) L d\psi$$

где λ и $\mu(\psi)$ — соответственно постоянный и переменный неопределенные множители Лагранжа. Из определения функции тока следует, что L дается выражением

$$L = x' - (u/v)y' + 1/(\rho v) = 0$$

При допустимом варьировании $\chi_x = J$. В качестве управления выбираем $x = x(\psi)$ на hb и fd . Следуя [1], для любого, не обязательно оптимального, сопла можно так выбрать y' и $\mu(\psi)$ на hb и fd , что в выражении для δJ обратятся в нуль коэффициенты при всех вариациях, кроме коэффициентов при δx на hb и fd , а также при Δx_b , Δy_b , Δx_d , Δy_d . Опуская выкладки, приведем окончательные результаты

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \delta \chi_x = \delta J = & \int_h^b \left(-\lambda p - \left(1 + \lambda \frac{u}{v} \right) \frac{\rho v^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \right)' \delta x d\psi + \\ & + \int_a^f \left(-\lambda p + \left(1 + \lambda \frac{u}{v} \right) \frac{\rho v^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \right)' \delta x d\psi + \\ & + \Delta x_b \left(\left(1 + \lambda \frac{u}{v} \right) \frac{\rho v^2}{\sqrt{M^2 - 1}} + \lambda(p - p^\circ) \right)_b + \\ & + \Delta y_b \left(p - p^\circ - \left(1 + \lambda \frac{u}{v} \right) \frac{\rho uv}{\sqrt{M^2 - 1}} \right)_b + \\ & + \Delta x_d \left(\left(1 + \lambda \frac{u}{v} \right) \frac{\rho v^2}{\sqrt{M^2 - 1}} - \lambda(p - p^\circ) \right)_d + \\ & + \Delta y_d \left(p^\circ - p - \left(1 + \lambda \frac{u}{v} \right) \frac{\rho uv}{\sqrt{M^2 - 1}} \right)_d \\ & y' = (u + v\sqrt{M^2 - 1})(\rho v^2)^{-1} \text{ на } hb \\ & y' = (u - v\sqrt{M^2 - 1})(\rho v^2)^{-1} \text{ на } fd \end{aligned}$$

Из выражений для y' следует, что hb является отрезком характеристики первого семейства, а fd — второго.

Для оптимального сопла необходимо, чтобы коэффициенты при δx на hb и fd равнялись нулю. Отсюда имеем

$$\lambda p + (1 + \lambda u/v) \rho v^2 / \sqrt{M^2 - 1} = \text{const на } hb$$

(1.5)

$$\lambda p - (1 + \lambda u/v) \rho v^2 / \sqrt{M^2 - 1} = \text{const на } fd$$

Ранее, при построении одного контура максимальной тяги при заданной подъемной силе, второе из условий (1.5) было получено в работе [2].

Используя условия (1.5) и то, что hb и fd являются отрезками характеристик, можно показать, что на hb и fd газодинамические параметры постоянны, сами эти отрезки прямые и, как следствие, в области abh и odf реализуются течения типа простых волн.

Для окончательного решения задачи необходимо привлечь граничные условия в точках b и d .

2. Выясним геометрический смысл множителя λ . После составления вспомогательного функционала J (1.3) задача свелась к построению сопла, удовлетворяющего заданным геометрическим ограничениям и реализующего максимальное значение величины $\chi_x + \lambda \chi_y$. Пусть $\varphi = \text{arctg } \lambda$. Тогда имеем

$$\chi_x + \lambda \chi_y = (\chi_x \cos \varphi + \chi_y \sin \varphi) / \cos \varphi$$

т. е. с точностью до множителя $1/\cos \varphi$ величина $\chi_x + \lambda \chi_y$ есть проекция силы, создаваемой контурами сопла, на ось qs (фиг. 1), которая повернута относительно оси x на угол φ по часовой стрелке. Поэтому задача о максимуме тяги при заданной подъемной силе эквивалентна известной задаче о максимуме тяги, но в системе координат, повернутой относительно исходной на некоторый, зависящий от заданной подъемной силы угол. Ограничения на концевые точки контуров в обоих случаях одни и те же.

Из этого следует также, что сопло, реализующее максимум тяги при заданной подъемной силе в одной системе координат, при переходе в другую систему также будет давать максимум тяги, но уже для некоторой другой подъемной силы. Поэтому численно можно найти зависимость $\chi_x = f(\chi_y)$ для оптимальных сопел в системе координат (x, y) и при переходе в другую систему (но не меняя исходные ограничения на концевые точки) не решать заново вариационную задачу, а просто пересчитать эту зависимость с учетом угла поворота системы координат.

3. Рассмотрим граничные условия в точках b и d . Для определенности будем считать, что $0 \leq \lambda < \infty$.

Необходимыми условиями оптимальности помимо условий (1.5) являются и следующие условия в точках b и d , вытекающие из вида вариации $\delta \chi_x = \delta J$ (1.4):

$$\delta J_b = b_x \Delta x_b + b_y \Delta y_b \leq 0, \quad \delta J_d = d_x \Delta x_d + d_y \Delta y_d \leq 0$$

где b_x, b_y, d_x, d_y — коэффициенты при соответствующих вариациях в выражении для $\delta \chi_x = \delta J$ (1.4).

Для различных габаритных ограничений получаем следующие результаты.

Точка b . 1b. Задано $x_b \leq l_b, y_b$ — произвольно. Тогда

$$(3.1) \quad b_y = p - p^0 - (1 + \lambda u/v) \rho u v / \sqrt{M^2 - 1} = 0$$

При $\lambda = 0$ это есть не что иное, как условие Буземана [1,4]. Далее, из $b_y = 0$ следует, что $b_x = (p - p^0)^2 \sqrt{M^2 - 1} / (u^2 \rho) > 0$. Следовательно, в точке b выполняются два условия: $b_y = 0, x_b = l_b$. Заметим, что согласно (3.1) при больших λ (т. е. при больших значениях χ_y) в точке b $v < 0$, что согласуется с результатами п. 2.

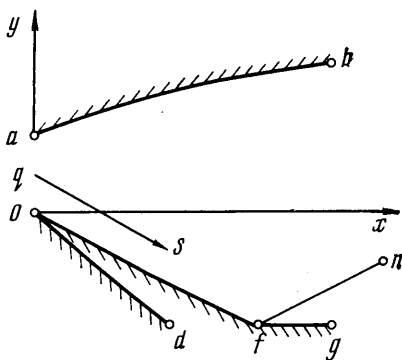
2b. Задано $y_b \leq h_b, x_b$ — произвольно. Тогда

$$(3.2) \quad b_x = \lambda (p - p^0) + (1 + \lambda u/v) \rho v^2 / \sqrt{M^2 - 1} = 0$$

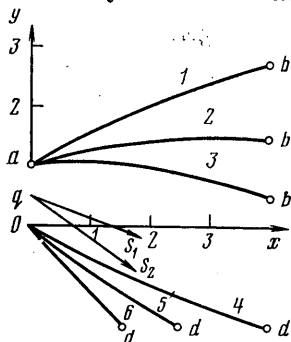
При $\lambda=0$ из (3.2) получаем $v=0$. Если $\lambda>0$, то, как нетрудно проверить, $v<0$. Поэтому на срезе сопла в точке b поток (при $\lambda>0$) наклонен вниз. В этом случае концевая точка b уже не определяет габаритов контура ab . Поэтому, строго говоря, при наличии ограничений на поперечные размеры (в направлении оси y) контура ab при $\lambda>0$ применение метода контрольного контура невозможно, и необходимо применение общего метода множителей Лагранжа [1].

3b. Заданы $x_b \leq l_b$, $y_b \leq h_b$. В этом случае либо $x_b = l_b$, $y_b = h_b$, $b_x \geq 0$, $b_y \geq 0$, либо реализуются случаи 1b или 2b. Если точка b задана строго, т. е. $x_b = l_b$, $y_b = h_b$, то может иметь место решение с торцом, как в [1, 5].

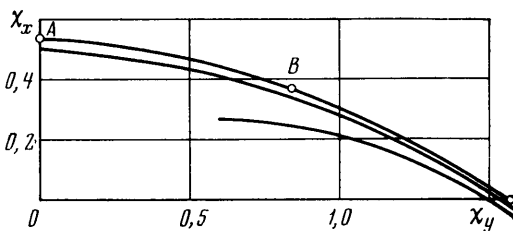
Точка d . В основном условия для точки d аналогичны условиям для точки b . Поэтому остановимся подробнее



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

на случае, специфичном для нижнего контура при $\lambda>0$. Пусть условию $y_d = h_d$ отвечает контур od , данный на фиг. 2. В точке d $d_x = 0$, $d_y < 0$. В силу $\lambda > 0$ $(v/u)_d < 0$. Интересен следующий вопрос, какую форму будет иметь оптимальный контур, если его концевой точкой будет точка g , лежащая на прямой $y = h_d$ (фиг. 2), но правее точки d , и при условии, что точки контура не могут лежать ниже этой прямой. Просто дополнить контур od отрезком dg нельзя, так как отрезок dg дает отрицательную подъемную силу. По-видимому, оптимальным решением будет комбинация некоторого контура of (фиг. 2) и горизонтального отрезка fg , и при этом, возможно, в точке f образуется присоединенная ударная волна fn . Для анализа такой конфигурации необходимо применение общего метода множителей Лагранжа [1]. Заметим также, что этот же метод необходим и при анализе системы взаимодействующих контуров, так как в этом случае на контурах возникают внутренние угловые точки, обтекаемые веерами сжатия и разгерметизации [1, 6, 7].

Итак, за исключением некоторых особых случаев, анализ условий в точках b и d (фиг. 1) приводит к двум граничным условиям для каждой из точек. Это либо два геометрических, либо одно геометрическое и одно газодинамическое условия. Этими условий, с учетом того, что на характеристиках hb и fd (фиг. 1) газодинамические параметры постоянны, достаточно для построения контуров сопла.

4. Рассмотрим некоторые численные результаты для идеального газа с показателем адиабаты $\kappa=1,4$. Поток на входе в сопло равномерный и горизонтальный с числом Маха $M_0=1,01$, внешние давления для обоих контуров равны нулю, т. е. $p^\circ=p_0=0$. Все приведенные ниже результаты получены с помощью метода характеристик.

Контур 1 и 4 (фиг. 3) отвечают соплу максимальной тяги при отсутствии условия на подъемную силу ($\lambda=0$) и при $x_b=x_d=4$. Здесь и далее линейные размеры отнесены к сечению входа oa . Очевидно, что это сопло симметрично относительно прямой $y=1/2$. Для дальнейшего укажем, что у данного сопла $y_d=h_d=-1,675$.

Контур 2 и 5 отвечают оптимальному соплу при заданной подъемной силе, соответствующей $\lambda=0,35$. Ограничения на точки b и d таковы: $x_b=4$, $x_d \leq 4$, $y_d \geq h_d=-1,675$. Контур 3 и 6 отвечают этим же геометрическим ограничениям, но большей подъемной силе ($\lambda=0,7$). На фиг. 3 нанесены также оси qs_1 и qs_2 , соответствующие значения $\lambda=0,35$ и $0,7$.

Отметим, что для нижнего контура при $\lambda > 0$ целесообразно накладывать ограничения лишь на какую-то одну координату точки d , так как другая при этом очень чувствительна к изменению λ . Так, для $x_d=4$ при $\lambda=0$ $y_d=-1,675$, а при $\lambda=0,55$ $y_d=-4,298$; для $y_d=-1,675$ при $\lambda=0$ $x_d=8,746$, а при $\lambda=0,55$ $x_d=1,870$.

На фиг. 4 нанесены кривые $\chi_x=\chi_x(\chi_v)$, где χ_x — тяга, создаваемая контурами сопла, а χ_v — подъемная сила. Обе величины отнесены к площади входа сопла, умноженной на давление на входе. Верхняя кривая соответствует ограничениям: $x_b=4$, $x_d \leq 4$, $y_d=-1,675$, $0 \leq \lambda \leq 0,7$, средняя кривая: $x_b=4$, $x_d \leq 4$, $y_d=-1$, и наконец, нижняя кривая отвечает случаю, когда нижний контур отсутствует, т. е. $x_d=0$, $y_d=0$, а $x_b=4$. На фиг. 4 точкам A , B , C соответствуют значения $\lambda=0$; $0,35$; $0,7$. Видно, что с увеличением χ_v все три кривые сближаются, и это объясняется тем, что при больших χ_v и λ роль нижнего контура уменьшается. В то же время при малых и средних значениях χ_v разница между кривыми более заметна, особенно между нижней и двумя верхними.

В заключение сделаем следующие выводы.

Из геометрического смысла множителя λ (п. 2) и численных расчетов следует, что геометрия оптимальных сопел существенно зависит от задаваемой подъемной силы.

Для сопел, близких к симметричным, зависимость тяги от подъемной силы такова, что незначительное уменьшение тяги приводит к существенному увеличению подъемной силы.

Автор признателен А. Н. Крайко за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крайко А. Н. Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.
2. Шмыглевский Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики. М.: ВЦ АН СССР, 1963. 142 с.
3. Борисов В. М. О системе тел с минимальным волновым сопротивлением. — Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 6, с. 1028.
4. Guderfey G., Hantsch E. Beste Formen für achsensymmetrische Überschallschubdüsen. — Z. Flügwiss., 1955, В. 3, Н. 9, S. 305 (рус. перев.: В кн.: Механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1956, № 4 (38)).
5. Крайко А. Н., Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д. К построению тел оптимальной формы в сверхзвуковом потоке. — ПММ, 1964, т. 28, вып. 1, с. 178.
6. Рылов А. И. Решение вариационной задачи о профилировании сопла, реализующего равномерный сверхзвуковой поток. — Изв. АН СССР МЖГ, 1974, № 4, с. 85.
7. Рылов А. И. К построению сверхзвуковых несимметричных сопел. — Изв. АН СССР МЖГ, 1977, № 3, с. 87.

Новосибирск

Поступила в редакцию
17.III.1980