

УДК 533.69.01

**РАСЧЕТ ОБТЕКАНИЯ КРЫЛА КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ
ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ**

ЗАЙЦЕВ А. А., ХАМЗАЕВ А. Д.

Задача о потенциальном обтекании крыла конечной толщины и конечного размаха с помощью формулы Грина сводится к решению системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода на поверхности крыла [1]. Спутная вихревая пелена представляется свободной вихревой поверхностью. Помимо панельных методов (например, [2]) известны также приемы приближенного решения этой задачи на основе предварительной дискретизации решения по размаху крыла, в которых двумерные интегральные уравнения приводятся к системе одномерных интегральных уравнений [1], численные методы решения которых уже отработаны [3-6]. При этом проводится дискретизация и спутной вихревой пелены по размаху крыла. В настоящей статье эта идея численного решения задачи о потенциальном обтекании крыла конечного размаха проводится на основе кусочно-линейной по размаху крыла аппроксимации искомых функций. Спутная вихревая пелена представляется вихревыми нитями [7] в нелинейной задаче. В линейной задаче пелена представляется как вихревыми нитями, так и вихревой поверхностью. Приводятся примеры аэродинамического расчета стреловидных крыльев конечной толщины с сужением, а также сравнение результатов расчета с экспериментом.

1. **Постановка задачи.** Уравнение поверхности крыла в параметрической форме имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(\theta, \zeta) &= ix(\theta, \zeta) + jy(\theta, \zeta) + kz(\theta, \zeta) \\ (1.1) \quad x(\theta, \zeta) &= x^*(\zeta) + b(\zeta) \left[\cos \beta(\zeta) \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin \beta(\zeta) f(\theta, \zeta) \right] \\ y(\theta, \zeta) &= y^*(\zeta) + b(\zeta) \left[-\sin \beta(\zeta) \cos^2 \frac{\theta}{2} + \cos \beta(\zeta) f(\theta, \zeta) \right] \\ z(\theta, \zeta) &= -\zeta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -l/2 \leq \zeta \leq l/2 \end{aligned}$$

Здесь θ, ζ — криволинейные координаты на поверхности крыла; i, j, k — единичные векторы базиса декартовой системы координат; $\theta=0, 2\pi, -l/2 \leq \zeta \leq l/2$ — задняя кромка крыла. В сечениях $\zeta = \pm l/2$, поверхность (1.1) переходит в поверхности, замыкающие крыло с торцов. Эти поверхности представляются, например, в виде

$$(1.2) \quad z = \pm [l/2 + F(\alpha, \beta)], \quad x = \alpha, \quad y = \beta, \quad F(\alpha, \beta) \geq 0$$

От задней кромки крыла начинается свободная вихревая поверхность S , являющаяся тангенциальным разрывом; V_+ и V_- — предельные значения скорости с разных сторон вихревой поверхности. Вводятся обозначения

$$(1.3) \quad \mathbf{r}_2(\xi, \eta) = ix(\xi, \eta) + jy(\xi, \eta) + kz(\xi, \eta)$$

$$(1.4) \quad \mathbf{V}_0 = 1/2(\mathbf{V}_+ + \mathbf{V}_-), \quad \delta = \mathbf{V}_+ - \mathbf{V}_-, \quad \mathbf{\Omega} = \mathbf{n}^\circ \times \delta$$

Здесь ξ, η — криволинейные координаты вихревой поверхности, $\mathbf{\Omega}$ — вектор ее интенсивности, \mathbf{n}° — единичный вектор нормали на той стороне

вихревой поверхности, где скорость принимает предельное значение V_+ .

Кинематические и динамические условия на свободной вихревой поверхности требуют, чтобы векторы $\partial \mathbf{r}_2 / \partial \xi$, $\partial \mathbf{r}_2 / \partial \eta$, \mathbf{V}_0 были компланарны, а соленоидальные векторы $\mathbf{\Omega}$ и \mathbf{V}_0 — коллинеарны:

$$(1.5) \quad \mathbf{V}_0 (\partial \mathbf{r}_2 / \partial \xi \times \partial \mathbf{r}_2 / \partial \eta) = 0, \quad \mathbf{\Omega} = \mu \mathbf{V}_0, \quad \text{div } \mathbf{\Omega} = 0$$

Интенсивность свободной вихревой поверхности на задней кромке крыла определяется изменением циркуляции скорости вокруг крыла по размаху.

От поверхностей (1.2), замыкающих крыло с торцов, может отходить спутная вихревая пелена в виде вихревых поверхностей и вихревых нитей, построение которых должно делаться с учетом особенностей замыкающих поверхностей и введением дополнительных условий.

Интегральное уравнение для потенциала скорости φ на замкнутой непроницаемой поверхности (1.1), (1.2) получается на основе формулы Грина. Поочередное дифференцирование этого уравнения по криволинейным координатам θ и ξ приводит к системе интегральных уравнений относительно ковариантных компонентов вектора скорости на поверхности крыла [1]:

$$(1.6) \quad V_\theta(\theta_0, \xi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \{V_\theta(\theta, \xi) K_1 - V_\xi(\theta, \xi) K_2\} d\theta d\xi + \\ + \frac{1}{2\pi} \iint_{S_1+S_2} \{V_\alpha(\alpha, \beta) K_5 - V_\beta(\alpha, \beta) K_6\} d\alpha d\beta + 2V_\theta^* + 2V_\theta^{**} + 2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta_0}$$

$$(1.7) \quad V_\xi(\theta_0, \xi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \{V_\theta(\theta, \xi) K_3 - V_\xi(\theta, \xi) K_4\} d\theta d\xi + \\ + \frac{1}{2\pi} \iint_{S_1+S_2} \{V_\alpha(\alpha, \beta) K_7 - V_\beta(\alpha, \beta) K_8\} d\alpha d\beta + 2V_\xi^* + 2V_\xi^{**} + 2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi_0}$$

$$V_\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad V_\xi = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \quad V_\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad V_\beta = \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$$

$$K_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_0} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \right), \quad K_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_0} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right), \quad K_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_0} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \right)$$

$$K_4 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_0} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right), \quad \dots, \quad K_8 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_0} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \right)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1(\theta, \xi) - \mathbf{r}_1(\theta_0, \xi_0) \quad (K_i, i=1, 2, 3, 4)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1(\alpha, \beta) - \mathbf{r}_1(\theta_0, \xi_0) \quad (K_i, i=5, 6, 7, 8)$$

Здесь Φ_0 — потенциал скорости набегающего потока, S_1 и S_2 — поверхности (1.2). Криволинейные координаты выбираются так, что векторы $\partial \mathbf{r} / \partial \theta \times \partial \mathbf{r} / \partial \xi$ и $\partial \mathbf{r} / \partial \alpha \times \partial \mathbf{r} / \partial \beta$ направлены внутрь крыла; V_θ^* и V_ξ^* — ковариантные компоненты вектора скорости на поверхности крыла, индуцируемой вихревой поверхностью (1.3); V_θ^{**} и V_ξ^{**} — ковариантные компоненты скорости на поверхности крыла, индуцируемые вихревой пеленой, сходящей с поверхностей (1.2).

В случае, когда $b(\pm l/2) = 0$, поверхности (1.2) исчезают и вместе с этим в уравнениях (1.6) и (1.7) исчезают соответствующие интегралы по поверхностям S_1 , S_2 , а также компоненты индуктивных скоростей V_θ^{**} и V_ξ^{**} . Получается система двух интегральных уравнений относительно

функций V_θ и V_ζ :

$$(1.8) \quad V_\theta(\theta_0, \zeta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \{V_\theta(\theta, \zeta) K_1 - V_\zeta(\theta, \zeta) K_2\} d\theta d\zeta + 2V_\theta^* + 2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta_0}$$

$$(1.9) \quad V_\zeta(\theta_0, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \{V_\theta(\theta, \zeta) K_3 - V_\zeta(\theta, \zeta) K_4\} d\theta d\zeta + 2V_\zeta^* + 2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \zeta_0}$$

$$(1.10) \quad V_\theta^* = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \Omega^1 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_0} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \right) + \Omega^2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_0} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} \right) \right\} \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} \right| d\xi d\eta$$

$$(1.11) \quad V_\zeta^* = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \Omega^1 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta_0} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \right) + \Omega^2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta_0} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} \right) \right\} \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} \right| d\xi d\eta$$

$$(1.12) \quad \Omega = \Omega^1 \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \xi} + \Omega^2 \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \eta}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2(\xi, \eta) - \mathbf{r}_1(\theta_0, \zeta_0)$$

Эта система уравнений может рассматриваться как приближенная в случае $b(\pm l/2) \neq 0$, если интегралы по $S_1 + S_2$ и составляющие индуктивных скоростей V_θ^{**} и V_ζ^{**} малы. При этом Ω на краях вихревой поверхности приобретает особенность. При оценке погрешности следует учесть, что площадь поверхностей (1.2) мала по сравнению с площадью поверхности (1.1), а сходящиеся с поверхностью (1.2) вихри и соответствующие индуктивные скорости в расчетной схеме компенсируются особенностями вихревой поверхности (1.3).

При указанных допущениях задача об обтекании крыла конечной толщины и конечного размаха сводится к решению системы уравнений (1.5), (1.8) — (1.12) относительно поверхностных компонент вектора скорости на поверхности крыла с одновременным построением спутной вихревой поверхности, сходящейся с задней кромки крыла. В линейной теории форма спутной вихревой поверхности задается.

2. Численный метод решения задачи. Задача о стационарном обтекании идеальной жидкостью крыла бесконечного размаха ($l = \infty$, $x^* = y^* = \beta = d\beta/d\zeta = d\beta/d\zeta_0 = 0$) сводится к решению одномерного интегрального уравнения

$$(2.1) \quad V_\theta(\theta_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V_\theta(\theta) \frac{(y-y_0)x_0' - (x-x_0)y_0'}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} d\theta + 2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta_0}$$

относительно ковариантной компоненты вектора скорости на поверхности крыла V_θ . Решение интегрального уравнения (2.1) существует [9], для единственности решения достаточно положить $V_\theta(0) = V_\theta(2\pi) = 0$, что представляет известный постулат Чаплыгина — Жуковского. При численном решении этой задачи (а также ее обобщений на случай обтекания системы аэродинамических профилей) методами, описанными в работах [3–6], одномерные интегралы вычисляются по формуле трапеций. Уравнения удовлетворяются в тех же опорных точках, по которым вычисляются интегралы. Это приводит к системе алгебраических уравнений относительно значений искомых функций в опорных точках.

Идея приближенного решения системы двумерных интегральных уравнений (1.8), (1.9) на основе сведения ее к системе одномерных интегральных уравнений типа (2.1) путем ступенчатой, кусочно-постоянной аппроксимации решения по координате ζ проводится в работе [1]. Эта идея обобщается на случай любой другой аппроксимации решения по координате ζ , выражающейся через значения искомых функций в дискретных сечениях $\zeta = \zeta_n$. В качестве таких аппроксимаций можно использовать сплайны, полиномы Лагранжа и т. д.

В настоящей работе проводится кусочно-линейная аппроксимация решения по координате ζ на примере стреловидного крыла без крутки с неизменной формой профиля. Это означает, что

$$(2.2) \quad x^*(\zeta) = |\zeta| \operatorname{tg} \chi; \quad y^*(\zeta) = 0; \quad b(\zeta) = b_0 + b'|\zeta|; \quad \beta = 0; \quad f(\theta, \zeta) = y(\theta)$$

$$\eta_c = \frac{b_0}{(b_0 + b'J/2)} = \frac{(4 - \lambda b')}{(4 + \lambda b')}$$

Здесь χ — угол стреловидности передней кромки крыла, η_c — сужение крыла. Крыло разбивается по размаху на $2J$ отсеков сечениями

$$(2.3) \quad \zeta = \zeta_i = -\frac{l}{2} + \frac{l(i-1)}{2J}, \quad i = 1, 2, \dots, 2J+1$$

На i -м отсеке ($\zeta_i \leq \zeta \leq \zeta_{i+1}$) функции V_θ и V_ζ аппроксимируются линейной зависимостью от ζ :

$$(2.4) \quad V_i(\theta, \zeta) = V(\theta, \zeta)_i + \frac{V(\theta, \zeta_{i+1}) - V(\theta, \zeta_i)}{\zeta_{i+1} - \zeta_i}(\zeta - \zeta_i)$$

С помощью (2.4) интегралы, стоящие в правых частях уравнений (1.8), (1.9), представляются в виде

$$(2.5) \quad \sum_{i=1}^{2J+1} \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} V_\theta(\theta, \zeta_i) K_{1i}(\theta; \theta_0, \zeta_0) d\theta - \int_0^{2\pi} V_\zeta(\theta, \zeta_i) K_{2i}(\theta; \theta_0, \zeta_0) d\theta \right\}$$

$$(2.6) \quad \sum_{i=1}^{2J+1} \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} V_\theta(\theta, \zeta_i) K_{3i}(\theta; \theta_0, \zeta_0) d\theta - \int_0^{2\pi} V_\zeta(\theta, \zeta_i) K_{4i}(\theta; \theta_0, \zeta_0) d\theta \right\}$$

$$K_{ji}(\theta; \theta_0, \zeta_i) = \int_{\zeta_i}^{\zeta_{i+1}} \left(1 - \frac{\zeta - \zeta_i}{\zeta_{i+1} - \zeta_i} \right) K_j(\theta, \zeta; \theta_0, \zeta_0) d\zeta +$$

$$+ \int_{\zeta_{i+1}}^{\zeta_i} \frac{\zeta - \zeta_{i-1}}{\zeta_i - \zeta_{i-1}} K_j(\theta, \zeta; \theta_0, \zeta_0) d\zeta, \quad i = 2, 3, \dots, 2J, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

(2.7)

$$K_{j1}(\theta; \theta_0, \zeta_0) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left(1 - \frac{\zeta - \zeta_{2J}}{\zeta_{2J+1} - \zeta_{2J}} \right) K_j(\theta, \zeta; \theta_0, \zeta_0) d\zeta$$

$$K_{j(2J+1)}(\theta; \theta_0, \zeta_0) = \int_{\zeta_{2J}}^{\zeta_{2J+1}} \frac{\zeta - \zeta_{2J}}{\zeta_{2J+1} - \zeta_{2J}} K_j(\theta, \zeta; \theta_0, \zeta_0) d\zeta, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

Ядра $K_{ji}(\theta; \theta_0, \zeta_0)$ выражаются через элементарные функции, хотя и достаточно громоздко. Рассматриваемые интегралы следует понимать в смысле главного значения Коши. Если $\theta_0 = \theta$, а $\zeta_0 = \zeta_i$ или $\zeta_0 = \zeta_{i+1}$, то интеграл (2.7) не существует. Это происходит вследствие того, что особая точка оказывается на краю области интегрирования, и интеграл берется не в смысле главного значения. Этот интеграл существует в смысле главного значения Коши для $\zeta_i < \zeta_0 < \zeta_{i+1}$ и, в частности, при

$$(2.8) \quad \zeta_0 = \zeta_i^\circ = \frac{(\zeta_i + \zeta_{i+1})}{2}$$

Под интегралами (2.5), (2.6) функции $V_\theta(\theta, \zeta_i)$ и $V_\zeta(\theta, \zeta_i)$ выражаются через $V_\theta(\theta, \zeta_j^\circ)$ и $V_\zeta(\theta, \zeta_j^\circ)$ с помощью линейной интерполяции

$$(2.9) \quad V_\theta(\theta, \zeta_{k+l}) = V_\theta(\theta, \zeta_k^\circ) + [V_\theta(\theta, \zeta_{k+l}^\circ) - V_\theta(\theta, \zeta_k^\circ)] \frac{(\zeta_{k+l}^\circ - \zeta_k^\circ)}{(\zeta_{k+l} - \zeta_k)}, \quad l = 0, 1, 2$$

$$(2.10) \quad V_\theta(\theta, \zeta_{i+1}) = V_\theta(\theta, \zeta_i^\circ) + [V_\theta(\theta, \zeta_{i+1}^\circ) - V_\theta(\theta, \zeta_i^\circ)] \frac{(\zeta_{i+1}^\circ - \zeta_i^\circ)}{(\zeta_{i+1} - \zeta_i)}, \quad 2J \geq i \geq k+2$$

$$(2.11) \quad V_\theta(\theta, \zeta_{i-1}) = V_\theta(\theta, \zeta_i^\circ) + [V_\theta(\theta, \zeta_i) - V_\theta(\theta, \zeta_{i-1}^\circ)] \frac{(\zeta_{i-1} - \zeta_{i-1}^\circ)}{(\zeta_i - \zeta_{i-1}^\circ)}, \quad k \geq i \geq 2$$

Выражения для $V_\zeta(\theta, \zeta_i)$ через $V_\zeta(\theta, \zeta_j^\circ)$ получаются из (2.9)–(2.11) заменой индекса θ на индекс ζ . Задача сводится к расчету функций $V_\theta(\theta, \zeta_j^\circ)$ и $V_\zeta(\theta, \zeta_j^\circ)$. Значение этих функций позволяет рассчитать с помощью формул (2.4), (2.9)–(2.11) распределение скорости, а значит, и давления по поверхности крыла. При симметричном относительно плоскости $z=0$ обтекании крыла число неизвестных функций сокращается вдвое, ибо в этом случае

$$(2.12) \quad V_\theta(\theta, \zeta_i^\circ) = V_\theta(\theta, \zeta_{2J+1-i}), \quad V_\zeta(\theta, \zeta_i^\circ) = -V_\zeta(\theta, \zeta_{2J+1-i})$$

При этом в расчетах принималось $k=J/2$, если J четное, и $k=(J+1)/2$, если J нечетное.

Спутная вихревая пелена представляется системой вихревых нитей, сходящихся с задней кромки крыла в сечениях ζ_i (2.3). Номер вихревой нити совпадает с номером сечения. Интенсивность i -й вихревой нити γ_i определяется разностью

$$(2.13) \quad \gamma_i = \Gamma(\zeta_{i-1}^\circ) - \Gamma(\zeta_i^\circ), \quad \Gamma(\zeta) = \int_0^{2\pi} V_\theta(\theta, \zeta) d\theta$$

Вихревая нить приближенно представляется ломаной. Звенья ломаной строятся последовательно. Если x_{ij} , y_{ij} , z_{ij} – координаты начала j -го звена i -й ломаной, то координаты конца этого звена определялись по формулам

$$(2.14) \quad x_{i,j+1} = x_{ij} + \frac{V_x}{|V|} l_j, \quad y_{i,j+1} = y_{ij} + \frac{V_y}{|V|} l_j, \quad z_{i,j+1} = z_{ij} + \frac{V_z}{|V|} l_j$$

Здесь l_j – длина j -го звена, $V = iV_x + jV_y + kV_z$ – скорость, складывающаяся из скорости набегающего потока и индуктивных скоростей от крыла и всех вихревых нитей, за исключением i -й нити. Первое звено строилось двумя различными способами. При первом способе направление первого звена i -й нити определялось скоростью в точке на линии хорд i -го сечения на расстоянии 0,05 хорды от задней кромки. При втором способе первое звено направлялось по касательной либо к верхней, либо к нижней поверхности крыла в соответствии с правилом, предложенным в работе [11]. Индуктивные скорости от вихревых нитей вычислялись по закону Био – Савара [10]. Размеры звеньев выбирались, например, по закону $l_j = 0,03j$. Последнее звено бралось бесконечным.

При решении задачи в линейной постановке вихревая пелена представлялась как с помощью системы прямолинейных вихревых нитей, так и с помощью вихревой поверхности. Вихревые нити и вектор интенсивности вихревой поверхности брались параллельными оси x . Проекция вектора интенсивности вихревой поверхности на ось x определялась соотношениями

$$(2.15) \quad \Omega = -\frac{d\Gamma}{d\zeta}, \quad \Gamma(\zeta) = \int_0^{2\pi} V_\theta(\theta, \zeta) d\theta$$

По принятой аппроксимации $\Gamma(\zeta)$ является кусочно-линейной функцией, поэтому Ω принимает постоянное значение Ω_i на каждом интервале (ζ_i, ζ_{i+1}) . В соответствии с этим ковариантные компоненты индуктивной скорости от плоской вихревой поверхности в точке крыла с координатами $x_0 = x(\theta_0, \zeta_0)$, $y_0 = y(\theta_0, \zeta_0)$, $z = -\zeta_0$ рассчитывались по формулам (1.10), (1.11) при $\Omega^1 = \Omega$, $\Omega^2 = 0$, $x(\xi, \eta) = \xi$, $y(\xi, \eta) = \eta$, $z(\xi, \eta) = 0$:

$$(2.16) \quad V_\theta^* = V_x^* \frac{\partial x_0}{\partial \theta_0} + V_y^* \frac{\partial y_0}{\partial \theta_0} + V_z^* \frac{\partial z_0}{\partial \theta_0}$$

$$(2.17) \quad V_\zeta^* = V_x^* \frac{\partial x_0}{\partial \zeta_0} + V_y^* \frac{\partial y_0}{\partial \zeta_0} + V_z^* \frac{\partial z_0}{\partial \zeta_0}$$

$$V_x^* = 0, \quad V_y^* = \sum_{i=1}^{2J} \frac{\Omega_i}{4\pi} \int_{\zeta_i}^{\zeta_{i+1}} \frac{z - z_0}{y_0^2 + (z - z_0)^2} \left(1 - \frac{x - x_0}{r_-} \right) d\zeta$$

$$V_z^* = \sum_{i=1}^{2J} \frac{\Omega_i}{4\pi} \int_{\zeta_i}^{\zeta_{i+1}} \frac{-y_0}{y_0^2 + (z-z_0)^2} \left(1 - \frac{x_- - x_0}{r_-} \right) d\zeta$$

$$x_- = x(0, \zeta), \quad r_- = \sqrt{(x_- - x_0)^2 + y_0^2 + (z - z_0)^2}$$

В случае, когда $\Gamma(\pm l/2) \neq 0$, к индуктивной скорости от вихревой поверхности добавляется индуктивная скорость от параллельных оси x вихревых нитей интенсивности $\Gamma(\pm l/2)$, которые сходят с концов крыла.

Таким образом, система интегральных уравнений (1.8), (1.9) относительно $V_\theta(\theta, \zeta)$, $V_\zeta(\theta, \zeta)$ приводится к следующей системе интегральных уравнений относительно функций $V_\theta(\theta, \zeta_i)$, $V_\zeta(\theta, \zeta_j)$:

$$(2.18) \quad V_\theta(\theta_0, \zeta_j^\circ) = L_{\theta j} \{ \theta_0, V_\theta(\theta, \zeta_i^\circ), V_\zeta(\theta, \zeta_i^\circ) \}$$

$$(2.19) \quad V_\zeta(\theta_0, \zeta_j^\circ) = L_{\zeta j} \{ \theta_0, V_\theta(\theta, \zeta_i^\circ), V_\zeta(\theta, \zeta_i^\circ) \}$$

$$(2.20) \quad L_{\theta j} \{ \theta_0, V_\theta(\theta, \zeta_i^\circ), V_\zeta(\theta, \zeta_i^\circ) \} = 2V_\theta^*(\theta_0, \zeta_j^\circ) +$$

$$+ 2 \frac{\partial \Phi_0(\theta_0, \zeta_j^\circ)}{\partial \theta_0} + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{2J} \int_0^{2\pi} \{ V_\theta(\theta, \zeta_i^\circ) K_{ij}^{(1)} - V_\zeta(\theta, \zeta_i^\circ) K_{ij}^{(2)} \} d\theta, \quad K_{ij}^{(1)} = K_{ij}^{(1)}(\theta_0, \theta)$$

$$(2.21) \quad L_{\zeta j} \{ \theta_0, V_\theta(\theta, \zeta_i^\circ), V_\zeta(\theta, \zeta_i^\circ) \} = 2V_\zeta^*(\theta_0, \zeta_j^\circ) +$$

$$+ 2 \frac{\partial \Phi_0(\theta_0, \zeta_j^\circ)}{\partial \zeta_j^\circ} + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{2J} \int_0^{2\pi} \{ V_\theta(\theta, \zeta_i^\circ) K_{ij}^{(3)} - V_\zeta(\theta, \zeta_i^\circ) K_{ij}^{(4)} \} d\theta, \quad K_{ij}^{(1)} = K_{ij}^{(1)}(\theta_0, \theta)$$

Функции $V_\theta^*(\theta, \zeta_j^\circ)$ и $V_\zeta^*(\theta, \zeta_j^\circ)$ могут быть вычислены, если известны форма и напряженность вихревых нитей спутной вихревой пелены в нелинейной задаче и интенсивность вихревой поверхности или напряженность вихревых нитей в линейной задаче.

Система интегральных уравнений (2.18)–(2.21) решалась аналогично тому, как решается система интегральных уравнений при расчете обтекания системы аэродинамических профилей с выполнением условия Чаплыгина – Жуковского на задних кромках. В расчетах использовались следующие итерационные формулы:

$$(2.22) \quad V_\theta^{(n+1)}(\theta_0, \zeta_j^\circ) = \kappa_1 V_\theta^{(n)}(\theta_0, \zeta_j^\circ) + (1 - \kappa_1) [L_{\theta j}^{(n)} \{ \theta_0, V_\theta^{(n)}(\theta, \zeta_i^\circ), V_\zeta^{(n)}(\theta, \zeta_i^\circ) \} - L_{\theta j}^{(n)} \{ 0, V_\theta^{(n)}(\theta, \zeta_i^\circ), V_\zeta^{(n)}(\theta, \zeta_i^\circ) \}]$$

$$(2.23) \quad V_\zeta^{(n+1)}(\theta_0, \zeta_j^\circ) = \kappa_2 V_\zeta^{(n)}(\theta_0, \zeta_j^\circ) + (1 - \kappa_2) L_{\zeta j}^{(n)} \{ \theta_0, V_\theta^{(n)}(\theta, \zeta_i^\circ), V_\zeta^{(n)}(\theta, \zeta_i^\circ) \}$$

Здесь n – номер итерации. Если n -е приближение известно, то известны $V_\theta^{(n)}$ и $V_\zeta^{(n)}$, а также расположение вихревых нитей спутной вихревой пелены, при котором были получены $V_\theta^{(n)}$ и $V_\zeta^{(n)}$. Далее рассчитывается распределение напряженностей вихревых нитей, соответствующее функции $V_\theta^{(n)}$. Определяется, как указано выше (2.14), положение вихревых нитей при данных $V_\theta^{(n)}$, $V_\zeta^{(n)}$ и рассчитанном распределении напряженностей вихревых нитей; при расчете формы i -й нити остальные нити остаются на прежних местах. В операторах $L_{\theta j}^{(n)}$ и $L_{\zeta j}^{(n)}$ компоненты индуктивной скорости от вихревой пелены рассчитываются при полученных форме и распределении напряженностей вихревых нитей. В остальном операторы $L_{\theta j}^{(n)}$ и $L_{\zeta j}^{(n)}$ совпадают с операторами (2.20) и (2.21).

Коэффициенты релаксации κ_1 и κ_2 подбираются из условия наиболее быстрой сходимости процесса итерации. В проведенных расчетах наиболее оптимальными значениями оказались $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = 0,8$. В качестве нулевого приближения принимались

$V_\theta^{(0)}(\theta, \xi_i)$, $V_\xi^{(0)} = 0$, соответствующие обтеканию крыла бесконечного размаха. Интегралы по θ вычислялись с помощью формулы трапеций по 100 точкам. Расчеты проводились для симметричного относительно плоскости $z=0$ обтекания крыла.

3. Результаты расчетов. Проведены методические расчеты для стреловидного крыла удлинения $\lambda=9$, сужения $\eta_c=3$ с учетом стреловидности передней кромки $\chi=30^\circ$ и для треугольного крыла удлинения $\lambda=4/\sqrt{3}$ с углом стреловидности $\chi=60^\circ$. В обоих случаях профиль крыла задавался в виде

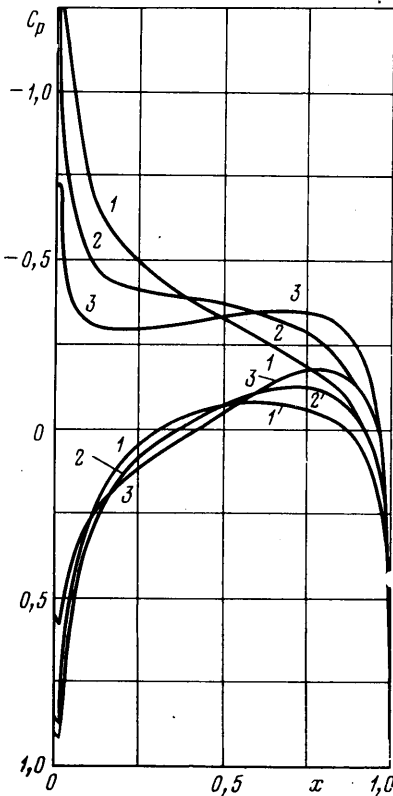
$$(3.1) \quad x(\theta) = \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad y(\theta) = \pm C \sqrt{x} \sqrt{r^2 - (x-x_1)^2 + y_1^2}$$

$$x_1 = y_1 = 0,5(1 - \sqrt{1 + 2(r^2 - 1)}); \quad r = 1, 2; \quad C = 0, 1$$

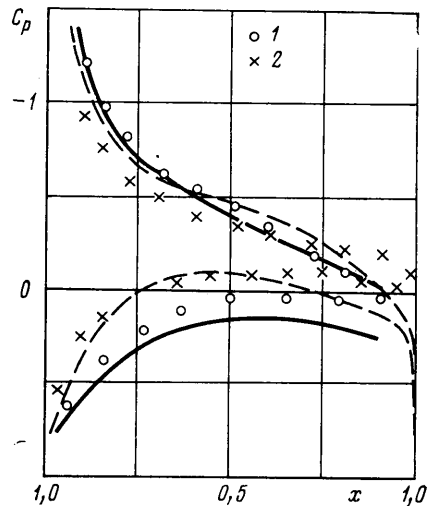
Для этих крыльев при угле атаки $\alpha=10^\circ$ кривые распределения по размаху коэффициента подъемной силы сечения $C_y(\xi)$ для разбиений $J=4$ и 8 оказались близкими.

Сходимость итерационного процесса определялась по величине δ_i — среднеквадратичной разности значений коэффициента давления в расчетных точках выбранного сечения

$\zeta = \text{const}$ при i -й и $(i-1)$ -й итерациях. Например, для стреловидного крыла при $\alpha=10^\circ$ $\delta_8 \leq 1,1 \cdot 10^{-2}$ по всем контрольным сечениям. Для треугольного крыла при том же угле атаки $\delta_8 \leq 3,3 \cdot 10^{-2}$. Итерационный процесс для крыла треугольной формы в плане малого удлинения сходилась медленнее,



Фиг. 1



Фиг. 2

чем для стреловидного крыла большого удлинения. Для заданной формы в плане итерационный процесс сходится быстрее с увеличением относительной толщины профиля и с уменьшением угла атаки.

В случае плоской пелены при $J=4, 8, 10$ время счета одной итерации соответственно 2,25; 4,87; 6,6 мин. С построением вихревой пелены при $J=10$ время счета одной итерации 8,1 мин.

Распределения давления на стреловидном крыле по линейной теории, полученные с представлением вихревого следа вихревой поверхностью и дискретными вихревыми нитями, оказались весьма близкими ($\alpha=10^\circ$, $J=8$).

Для стреловидного крыла ($J=10$) в нелинейной постановке с указанными выше двумя различными способами начала построения вихревых нитей расчеты показали, что распределения давления по поверхности крыла практически не различаются.

С целью изучения влияния угла стреловидности на характер распределения аэродинамических нагрузок проведены расчеты обтекания крыльев с $\lambda=8$ и $\eta_c=4$, имеющих профили (3.1), при значениях угла стреловидности передней кромки $\chi=-15, 10, 30^\circ$. Эпюры распределения коэффициента давления C_p в сечении $2\xi/l=0,0625$ при $\alpha=5^\circ$ приведены на фиг. 1. Кривые для значений $\chi=-15, 10, 30^\circ$ обозначены соответственно цифрами 1, 2, 3. Характер распределения давления в корневой части крыла с обратной стреловидностью значительно отличается от случая $\chi>0$.

Для сравнения с экспериментом были проведены расчеты обтекания стреловидного крыла удлинения $\lambda=3,8$, сужения $\eta_c=1,8$ и $\chi=30^\circ$. Это крыло имеет профиль М6 с относительной толщиной $c=0,09786$ в сечении, перпендикулярном линии 0,25 хорды. Экспериментальные данные взяты из работы [12]. Эксперимент проводился при $V_\infty=40$ м/с, т. е. число Маха можно считать равным нулю. На фиг. 2 для $\alpha=10^\circ$ изображены рассчитанные эпюры распределения коэффициента давления C_p в двух сечениях крыла: $2\xi/l=0,65$ — сплошные линии, $2\xi/l=0,95$ — пунктирные. Там же нанесены данные эксперимента: 1 — для первого сечения, 2 — для второго. Расчеты проводились с учетом сворачивания вихревой пелены за крылом по 1000 расчетным точкам в десяти сечениях полукрыла. Сравнение результатов расчета с экспериментом показывает их удовлетворительное согласие.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вернигора В. Н., Ираклионов В. С., Павловец Г. А. Расчет потенциальных течений около крыльев и несущих конфигураций крыло — фюзеляж. — Тр. ЦАГИ, вып. 1803, 1976, 23 с.
2. Захаров А. Г., Назаров Б. В. Применение панельного метода для расчета аэродинамических характеристик самолета и его элементов при до- и сверхзвуковых скоростях. — Тр. ЦАГИ, 1978, вып. 1942, с. 16–32.
3. Martensen E. Berechnung der Druckverteilung an Gitterprofilen in ebener Potentialströmung mit einer Fredholmischen Integralgleichung. — Arch. Rat. Mech. and Anal., 1959, v. 3, № 3, 1959.
4. Jakob K., Riegels F. W. Berechnung der Druckverteilung endlich dicker Profile ohne und mit Klappen und Vorflügeln. — Z. Flugwiss. 1963, Bd 11, № 9, S. 357–367.
5. Павловец Г. А. Методы расчета обтекания сечений крыла идеальным сжимаемым потоком. — Тр. ЦАГИ, 1971, вып. 1344, 71 с.
6. Зайцев А. А., Комаров А. М. Метод расчета потенциального обтекания системы аэродинамических профилей в несжимаемой жидкости. — Вестн. МГУ. Матем., механ., 1979, № 3, 65–69.
7. Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978. 351 с.
8. Седов Л. И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1976, т. 1. 535 с.; т. 2. 573 с.
9. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.—Л.: Гостехиздат, 1951. 476 с.
10. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Изд-во АН СССР, 1951. 426 с.
11. Mangler K. W., Smith J. H. B. Behaviour of the vortex sheet at the trailing edge of a lifting wing. — Aeronaut. J., 1970, v. 74, № 719, p. 906–908.
12. Ledoux M., Monnerie B. Etude theorique et experimentale d'une aile en fleche a faible vitesse et dans un large domaine d'incidences. Association aeronautique et astronomique de France. Paris, 9ème Colloque d'aerodynamique applique 8–10 novembre, 1972.

Москва

Поступила в редакцию
7.11.1980