

УДК 533.6.071.8

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ЗАПУСКЕ СОПЛА, ВМОНТИРОВАННОГО В ТОРЕЦ УДАРНОЙ ТРУБЫ¹

ГРИНЬ В. Т., КРАЙКО А. Н., СЛАВЯНОВ Н. Н.

Вмонтированное в торец ударной трубы сопло является элементом многих установок, предназначенных для изучения различных газодинамических и физико-химических процессов. Хотя правильное истолкование результатов измерений часто невозможно без знания качественных особенностей и количественных закономерностей запуска, до настоящего времени отсутствовали численные алгоритмы, дающие для больших отношений радиусов трубы и входного сечения сопла Y аккуратное решение указанной задачи в двумерном приближении (запуск ударной трубы с соплом, состыкованным с трубой без скачка площади, рассчитывался в [1]). Поскольку, как правило, $Y \gg 1$, то достижение требуемой точности (разрешающей способности) метода на более или менее равномерной разностной сетке сопряжено с неоправданно большими временами счета. По той же причине постепенное укрупнение сетки в сопле не дает существенного улучшения. Сказанное подтверждают результаты, приведенные в [2] для плоской конфигурации с отношением ординат $Y=5$, и в еще большей степени — материалы качественного характера, полученные в [3, 4] для еще меньших Y . Анализ этих и других данных, в том числе по решению близких задач нестационарного обтекания тел в трубе (см. [5, 6]), указывает на необходимость существенного повышения разрешающей способности результатов счета.

Отсутствие аккуратных методов решения двумерной задачи лишь частично восполняют приближенные подходы [7—11], опирающиеся на одномерные уравнения и на дополнительные предположения об условиях стыковки потоков в плоскости торца, где эти уравнения неприменимы. Указанные предположения и уравнения тесно связаны с гипотезами о квазистационарности процесса в сечении стыковки и об одномерности потока в трубе и сопле в отдельности и потому заведомо неприменимы для начальной стадии запуска, когда в сложном дифракционном процессе в окрестности входа в сопло формируются отраженный скачок и скачок, проходящий в сопло. После завершения этого процесса, когда течение в большей степени отвечает упомянутой приближенной модели, наилучший способ оценки точности последней, а также внесения в нее необходимых корректив состоит в сравнении результатов одномерных и двумерных расчетов.

Ниже описаны особенности обсуждаемой задачи, которые, в частности, объясняют сложность получения аккуратных результатов, изложена схема развитого авторами метода решения и приводятся материалы, иллюстрирующие его эффективность. Эти материалы дают весьма полное представление о начальном этапе запуска и позволяют за счет «поправки на коэффициент расхода» существенно повысить точность одномерного приближения для более поздних этапов. Как показали одномерные расчеты, выполненные с использованием этой поправки в [12], на этапах, отличных от начального, она обеспечивает хорошее согласование результатов одномерного приближения и экспериментальных данных.

1. Рассмотрим осесимметричное или плоское расширяющееся или сужающееся — расширяющееся сопло, вмонтированное в торец ударной трубы. Ось x цилиндрических или декартовых координат x, y, z или x, y, z направлена по оси трубы или лежит в плоскости ее симметрии, начало отсчета x совмещено с плоскостью торца. Запуск сопла осуществляется падающей ударной волной, приходящей слева в сечение $x=0$ в момент $t=0$. При $t < 0$ газ в сопле (и в соответствующей части трубы) в принятой постановке задачи покоится и однороден. Его параметрам будем приписывать нижний индекс 0. Ограничимся далее временами до момента

¹ Работа докладывалась на Всесоюзном семинаре по ударным трубам и ударным волнам (Черноголовка) 6.II.1980 г.

прихода в рассматриваемую область возмущений, которые возникают при взаимодействии отраженного скачка с контактной поверхностью, образующейся в ударной трубе при разрыве диафрагмы. Тогда можно считать, что труба полубесконечна, падающая волна при $t \leq 0$ распространяется с постоянной скоростью D и числом Маха $M_s = D/a_0$, где a — скорость звука, а параметры за волной (вплоть до $x = -\infty$) постоянны. Указанным параметрам будем приписывать нижний индекс $-\infty$. В частности, отношение давлений $p_{-\infty}/p_0$, как и M_s , характеризует начальную интенсивность падающей волны.

В данной задаче наряду с условиями непротекания на стенках трубы и сопла требуется ставить граничные условия на левом (γ_-) и на правом (γ_+) участках границы области G , которая, естественно, всегда будет конечной (хотя бы в силу возможностей ЭВМ). До прихода возмущений на участке γ_- и γ_+ , в качестве которых возьмем отрезки прямых $x = -X_-$ и $x = X_+$, где X_{\pm} — заданные константы, условия на них формулируются точно: на γ_- параметры потока постоянны и равны соответствующим значениям за приходящим скачком, а на γ_+ газ покоится и его параметры равны величинам с индексом 0. Далее все линейные размеры будем относить к y_*^0 — ординате стенки сопла в его минимальном сечении.

Граничные условия на γ_+ и γ_- начинают влиять на течение в окрестности входа в сопло через конечное время. Поэтому, если $X_{\pm} \gg 1$, это влияние проявится лишь к моменту, когда поток в этой окрестности уже практически установится. Желательно, однако, чтобы в исследуемой области в интересующем нас интервале времени указанное влияние было незаметно при не очень больших X_{\pm} . Последнее можно достигнуть за счет специального выбора граничных условий. Данной цели, в частности, отвечают такие условия на γ_{\pm} , которые получаются, если для $t > 0$ слева от γ_- и справа от γ_+ поток считать невозмущенным, а параметры на γ_{\pm} находить из решения автомодельной задачи о распаде произвольного разрыва. Потoki на γ_{\pm} со стороны G берутся при этом такими, какими они получились к рассматриваемому моменту времени. Описанный прием, подсказанный авторам В. А. Широносковым, обеспечивает для цилиндрических каналов реализацию условия «отсутствия отражения» от γ_- или от γ_+ , под которым понимается следующее.

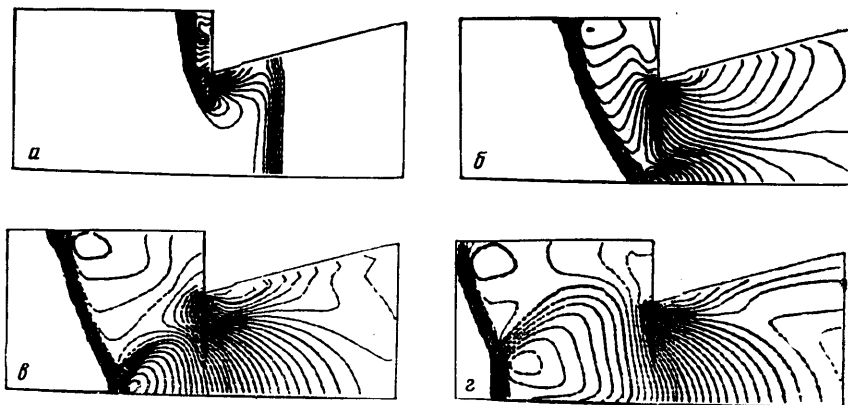
Пусть по невозмущенному потоку в цилиндрическом канале распространяется слабый плоский скачок. Тогда в нем, как и в непрерывной плоской волне, сохраняются (с точностью до ϵ^2 включительно, где ϵ характеризует интенсивность скачка) те инварианты, которые переносятся по встречным характеристикам одномерного нестационарного течения. Для отраженного скачка, распространяющегося влево, и сверхзвукового невозмущенного потока за падающей волной это будут c^+ , c^0 и c^- -характеристики, а для дозвукового — c^+ и c^0 -характеристики. Сохранение тех же инвариантов обеспечивает и решение задачи о распаде разрыва. Эта же задача определяет параметры и за отраженным скачком, а если скорость скачка не сильно отличается от своего асимптотического значения D_{∞} , отвечающего $t \rightarrow \infty$, то и необходимые инварианты на γ_- . Аналогичные соображения справедливы и для γ_+ , если при $x > X_+$ к соплу примыкает цилиндрическая труба. Если это даже не так, то уже при умеренных X_{\pm} соответствующие возмущения все равно не влияют на течение в окрестности входа в сопло, поскольку их проникновению в эту область мешает возникновение сверхзвуковой скорости в его расширяющейся части. Подчеркнем, наконец, что окончательным критерием пригодности принятого способа задания (точнее, получения) условий на γ_{\pm} служили результаты специальных методических расчетов, которые, помимо прочего, определяли и допустимые значения X_+ и X_- .

2. В рамках описанной выше постановки решение задачи осуществлялось при помощи алгоритма, основанного на разностной схеме С. К. Годунова [13]. Остановимся лишь на некоторых специфических особенностях

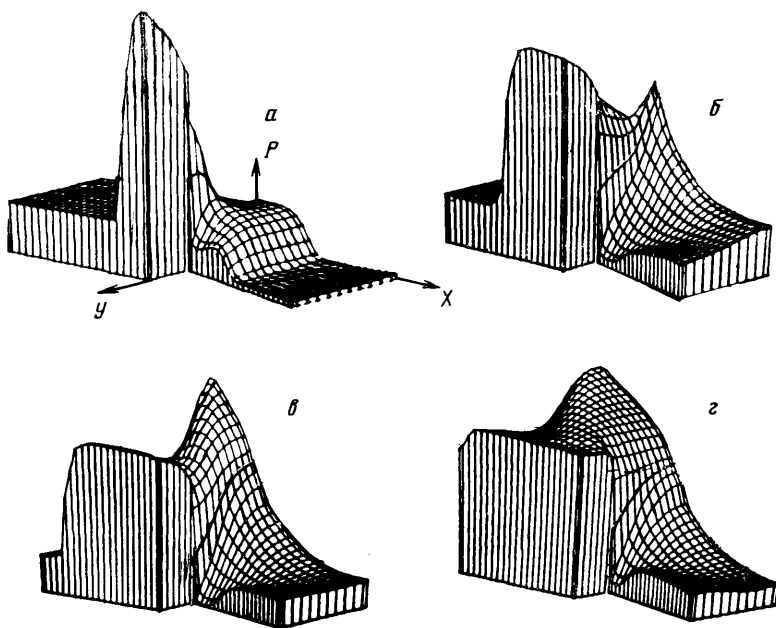
этого алгоритма, обусловленных направленностью исследования (анализ особенностей течения в начале запуска в окрестности G_0 входа в сопло) и тем, что в типичных ситуациях радиус трубы $Y \gg 1$. Такое отличие радиусов трубы и минимального сечения сопла ведет к такому же различию линейных и временных масштабов потока в G_0 и в оставшейся части G , т. е. в $G' = G - G_0$. Это в свою очередь требует весьма густой разностной сетки, по крайней мере в G_0 . Использование такой же сетки и в G' нецелесообразно, а подчас и невозможно из-за ограничений на память и быстродействие ЭВМ. Применение неравномерной сетки, сгущающейся к G_0 , усложняет алгоритм и требует задания специального закона сгущения. Вместо этого в G_0 и в частях G' , расположенных в трубе (G_-) и в сопле (G_+), сетки были взяты практически однородными, но с существенно различающимися размерами ячеек. Область G_0 , покрытая мелкой сеткой, имела линейные размеры порядка нескольких единиц. Сетка в G_0 при $x < 0$ была квадратной с $h_0 \ll 1$ в качестве стороны квадрата, а при $x > 0$ — криволинейной с тем же характерным размером. В G_- и G_+ сетки были существенно более крупными. Например, размер стороны h_- квадратной сетки в G_- был в $K \approx Y/2$ раз больше, чем h_0 . Сохранение порядка аппроксимации при использовании сеток существенно разных размеров обеспечивалось так. Сначала с временным шагом $\tau = \min(\tau_+, \tau_-)$, где τ_{\pm} — шаги, определяемые условием устойчивости в G_{\pm} , рассчитывались параметры в этих областях. При расчете к G_- и G_+ по их границам с G_0 добавлялись (со стороны G_0) слои крупных вспомогательных ячеек, того же размера, что в G_- и G_+ . Параметры в этих ячейках находились осреднением по мелким ячейкам G_0 . После этого по границе G_0 с G_{\pm} строился внешний вспомогательный слой (теперь вне G_0) из ячеек того же размера, что и в G_0 . Параметры в них находились линейной интерполяцией по времени (по параметрам в G_{\pm} в моменты времени t и $t + \tau$), а затем — по x и y . Шаг интегрирования τ_0 в G_0 был много меньше τ и также выбирался из условия устойчивости разностной схемы. Шаг, отвечающий получению полей параметров в момент $t + \tau$, обычно был меньше того, который допускало условие устойчивости.

Принятая процедура, являющаяся обобщением способа, предложенного в [14], хотя и нарушает дивергентность разностной схемы на границах между G_0 и G' , однако обеспечивает первый порядок аппроксимации и устойчивость счета. К ее недостаткам можно отнести разное (в G_0 и G_{\pm}) размазывание ударных волн на границах соприкасающихся областей. Этот эффект прежде всего касается отраженного скачка и приводит к некоторым дополнительным ошибкам счета. Соответствующие погрешности приводят, например, в тестовой задаче об отражении скачка от закрытого конца трубы к появлению вертикальной компоненты скорости v . Тем не менее даже вблизи оси симметрии, где из-за эффекта кумуляции такие ошибки максимальны, они в выполненных расчетах не превышали нескольких процентов от точных значений характерных величин (например, v — от скорости скачка), падали с увеличением области G_0 и быстро затухали после ухода из G_0 отраженной волны. Методические расчеты, выполненные для исследованных конфигураций при разных размерах G_0 , показали, что указанные ошибки лежат вне возможностей графического изображения на представленных ниже фигурах.

Численная реализация описанных выше условий на γ_{\pm} в рамках схемы С. К. Годунова элементарна и состоит в введении слева от γ_- и справа от γ_+ вертикальных слоев дополнительных ячеек. В ячейках левого слоя параметры при $t > 0$ совпадали с параметрами за падающим скачком, а в ячейках правого слоя — с параметрами покоящегося газа. В примененной схеме осредненные по t потоки массы, импульса и энергии на границах всех ячеек находятся из решения задачи о распаде разрыва, решение той же задачи определяет требуемые потоки на γ_{\pm} , обеспечивая, таким образом, однородность численного алгоритма в смысле [15]. Заметим, наконец, что уравнения течения использовались в форме «разрешенной относительно $y^v \gg [13]$, где $v = 0$ и 1 соответственно в плоском и в осесимметричном случаях. При $v = 1$ такая форма записи уравнений обеспечивает большую точность счета (особенно у оси симметрии), чем исходная почти полностью дивергентная система.



Фиг. 1



Фиг. 2

3. В рамках подхода, описанного в предыдущих пунктах, была составлена программа для ЭВМ БЭСМ-6 и выполнены обширные расчеты. Часть полученных результатов приводится ниже. Все результаты двумерных расчетов относятся к течению совершенного газа с показателем адиабаты $\kappa=1,4$.

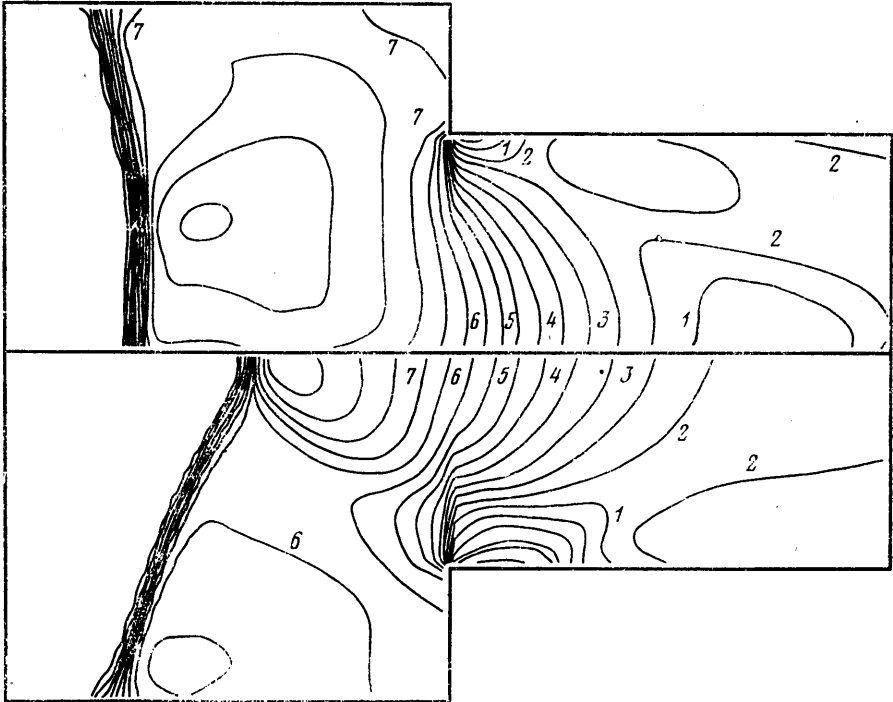
Достаточно наглядное представление о дифракционной картине взаимодействия падающего скачка с торцом трубы и стенками начального участка сопла дают фигуры 1 и 2. В данном случае сопло коническое с полууглом раствора прямолинейных образующих $\theta=15^\circ$ и с $Y=10$, число Маха падающего скачка $M_\infty=3$, а перепад давления на нем $p_\infty/p_0=10,4$. Плоскость торца и минимальное сечение сопла совпадают. За характерную размерную плотность ρ_*° была взята критическая плотность покоящегося газа, а за характерную скорость q_*° — скорость падающего скачка. Плотность относилась к ρ_*° , скорости — к q_*° , время — к y_*°/q_*° и давление — к

$\rho^* q_*^{\circ 2}$. Величины без верхнего индекса градус — безразмерные. В соответствии с принятым способом обезразмеривания $\rho_0 = [(\kappa + 1)/2]^{1/(\kappa - 1)} = 1,58$; $\rho_{-\infty} = 6,1$; $p_{-\infty} = 3,63$ и $p_0 = 0,35$.

На фиг. 1 для разных t даны картинки изохор — линий $\rho = \text{const}$. Изохоры построены через интервал $\Delta\rho = 0,5$, причем крайне левые из них, формирующие область сгущения, которая изображает размазанный скачок, отвечают $\rho = 6,1$. Фиг. 1, $a-g$ построены для $t = 0,14$; $0,44$; $0,68$ и $0,93$ соответственно. Для тех же моментов времени на фиг. 2 приведены пространственные барограммы, отвечающие нижней половине сопла (масштабы по оси p , а также ракурс, под которым видно меридиональное сечение сопла, на фиг. 2, $a-g$ разные). Как следует из фиг. 2, сначала максимум давления реализуется у стенки трубы. Для более поздних моментов времени он смещается на ось трубы. Наряду с только что отмеченным эффектом кумуляции фигуры 1 и 2 показывают процесс установления стационарного течения в окрестности входа в сопло с характерным для конических сопел перерасширением на начальном участке стенки. Наконец, в течение всего запуска поля давления в сопле существенно неравномерны по y лишь при $x < 1,5-2,0$. Поэтому при больших x анализ течения с приемлемой для многих приложений точностью можно проводить в одномерном приближении (см. ниже).

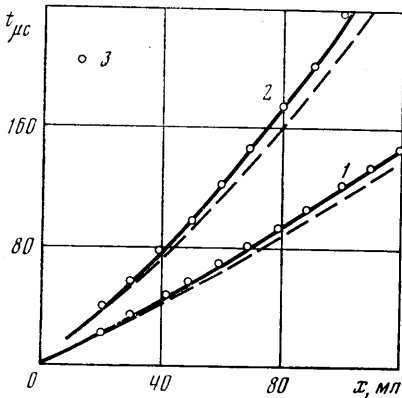
Для $t \gg 1$ отраженный скачок становится почти плоским, а его скорость D стремится к D_∞ , т. е. к предельному значению, отвечающему $t \rightarrow \infty$. Величина D_∞ такова, что имеет место равенство потоков массы непосредственно за скачком и в минимальном сечении сопла. При этом предельным значениям параметров за отраженным скачком нижний индекс ∞ . Тогда для $Y \gg 1$ предельные скорость (u_∞) и число Маха потока за отраженным скачком (M_∞) оказываются весьма малыми. В частности, здесь справедлива формула: $M_\infty \sim Y^{-(1+\nu)}$ и, следовательно, для $\nu = 1$ и $Y = 10$ число Маха M_∞ не превышает нескольких сотых. В таких случаях D_∞ лишь незначительно отличается от величины, соответствующей отражению от полностью закрытого конца полубесконечной трубы. В плоском случае (при $\nu = 0$), согласно приведенной формуле, при том же Y наличие сопла сказывается сильнее. Однако и здесь при $Y \gg 10$ отличие D_∞ от величины, найденной для закрытой трубы, также невелико.

В силу эффекта кумуляции максимальное давление p_m , реализующееся на оси x в процессе отражения, в осесимметричном случае должно быть больше, чем в плоском. В рассмотренном примере $p_m \approx 19$ и 32 соответственно в плоском и осесимметричном случаях. Интересно, что отношение приведенных величин ($0,59$) близко к отношению интенсивностей отраженных волн в одномерной нестационарной задаче об отражении от плоскости или от оси симметрии сильной ударной волны. Для $\kappa = 1,4$ это отношение [17] равно $0,48$. Если учесть неполную тождественность задач и умеренную интенсивность ударных волн в рассчитанных примерах, то отличие приведенных цифр представляется не очень большим. Естественно, что на начальном этапе в плоском случае отраженная волна в G_0 менее интенсивна, чем в осесимметричном. Это легко понять, если учесть, что при $\nu = 0$ вход в сопло — вытянутая щель, а при $\nu = 1$ — круглое отверстие. Наблюдающаяся в данном случае ситуация противоположна той, которая реализуется при обтекании клина и конуса с одинаковыми углами при вершине. Сказанное иллюстрирует фиг. 3, рассчитанная для плоского и осесимметричного случаев (соответственно нижняя и верхняя половинки фигуры) при $\Phi = 0$ и прежних остальных параметрах. Обе части фиг. 3 построены для $t = 0,68$ и показывают линии $\rho = \text{const}$ через интервал $\Delta\rho = 1,0$. Некоторые изохоры пронумерованы цифрами $1, 2, \dots$ при следующем соответствии цифр и значений ρ : $1(5), 2(6), 3(8), 4(10), 5(12), 6(14), 7(16)$. Крайне левая изохора области размазанного скачка отвечает $\rho = 6,1$. Отметим хо-



Фиг. 3

рошее согласие результатов, рассчитанных для плоского случая с теневыми фотографиями из [10, 16]. Фиг. 1 и 2 аналогичны кадрам кинофильма, снятого по результатам счета с экрана дисплея. Расчет типичного варианта при 3000 расчетных ячеек в G , из которых на G_0 приходится 2400, занимает около 1 часа на ЭВМ БЭСМ-6.



Фиг. 4

Ранее отмечалось, что скорость отраженного скачка можно достаточно аккуратно найти из стационарного баланса массы (разгон потока при этом предполагается изоэнергетическим и изэнтропическим). Дальнейшее уточнение достигается введением коэффициента расхода сопла μ . Наиболее сильно, однако, отличие μ от единицы сказывается на течении в самом сопле. Расчеты, выполненные по одномерной методике [12], показали, что для $t \gg 1$ учет $\mu \neq 1$ схватывает основное влияние двумерности, а в остальном достаточно ограничиваться одномерным приближением. Сказанное подтверждает фиг. 4, рассчитанная для $\nu=0$; $Y=17,4$; $\phi=15^\circ$; $M_\infty=3$ и $p_\infty/p_0=10,4$. Точки 3 — экспериментальные результаты [10, 16], полученные для сопла без скругления, т. е. при начальном радиусе кривизны стенки $r \equiv r^\circ/y_*^\circ=0$. Согласно имеющимся расчетным и экспериментальным данным, в этом случае $\mu \approx 0,85$. Фиг. 4 построена в размерных переменных, причем $y_*^\circ=3$ мм. Цифры 1 и 2 на фиг. 4 приписаны траекториям первичного и вторичного скачков.

Первичный скачок отделяет область возмущенного потока от покоящегося газа. Вторичный скачок возникает внутри возмущенного потока и движется против него, хотя в рассматриваемом примере он сносится потоком вправо. Штрихами на фиг. 4 нанесены траектории этих скачков, рассчитанные без поправки на μ , а сплошными линиями — с такой поправкой.

При расчете сплошных и штриховых кривых в рамках [12, 18] учитывались также реальные свойства газа. Подчеркнем, что столь же хорошее согласие экспериментальных данных и результатов одномерного приближения с поправкой на μ наблюдалось и для $g > 0$. Правда, по мере роста g эта поправка становится все менее и менее существенной ($\mu \approx 0,98$ при $g=0,6$ и $v=1$). Заметим, наконец, что, как и в выполненных расчетах, указанная поправка легко вводится малой деформацией окрестности минимального сечения сопла. Например, при $g=0$ и $\phi > 0$ можно слегка продолжить его прямолинейные стенки внутрь трубы настолько, чтобы площадь минимального сечения уменьшилась по сравнению с действительной в μ раз. Затем для деформированного контура одномерный расчет ведется без дальнейших поправок на коэффициент расхода, а в новом минимальном сечении, согласно [7–12], ставится условие: $M=1$.

В заключение авторы выражают признательность А. Б. Британу, В. А. Левину и С. А. Лосеву за стимулирующие обсуждения, В. А. Широносову и А. А. Сеницыну за помощь в организации графического отображения полученных результатов, В. Л. Григоренко за проведение расчетов в одномерном приближении и В. А. Вострецову за помощь в оформлении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов М. Я. К расчету течения газа в ударной трубе переменного сечения.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 3, с. 162–166.
2. Рудакова Г. М., Пашкин А. П. К расчету некоторых плоских нестационарных течений газа.— Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1975, № 3, вып. 1, с. 70–77.
3. Иванов М. Я., Тунник Ю. В. Движение газа с неравновесными релаксационными процессами в соплах и ударных трубах. Ин-т мех. МГУ, 1974, Отчет № 1488, с. 67–77.
4. Белова Л. И., Жигалко Е. Ф. Примеры расчета ранней стадии формирования истечения из ударной трубы.— В кн.: Газодинамика и теплообмен, вып. 4. Л., 1975, с. 46–50.
5. Балакин В. Б., Буланов В. В. Численное решение задачи о взаимодействии ударной волны с цилиндром в сверхзвуковом потоке.— Инж.-физ. ж., 1971, т. 21, № 6, с. 1033–1039.
6. Дубровская Л. И., Комаровский Л. В. Осесимметричное нестационарное обтекание преград в цилиндрической трубе.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 4, с. 81–86.
7. Ударные трубы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
8. Баженова Т. В., Гвоздева Л. Г. Нестационарные взаимодействия ударных волн. М.: Наука, 1977.
9. Smith C. E. The starting process in hypersonic nozzle.— J. Fluid Mech., 1966, v. 24, pt 4, p. 625–640.
10. Amann H. O. Vorgänge beim Start einer ebenen Reflexionsdüse.— Z. Flugwiss., 1971, Bd. 19, H. 10, s. 393–406.
11. Британ А. Б. Формирование течения в плоском сопле ударной трубы.— Научн. тр. Ин-та мех. МГУ, 1976, № 43, с. 48–57.
12. Григоренко В. Л. Численное исследование ударного запуска сверхзвуковых сопел и сравнение с экспериментальными данными.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 1, с. 120–127.
13. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
14. Тагиров Р. К. Усовершенствование метода расчета трансзвукового обтекания тел вращения.— Учен. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 6, с. 1–11.
15. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные схемы газовой динамики. М.: Наука, 1975.
16. Amann H. O. Experimental study of the starting process in reflection nozzle.— Phys. Fluids, Suppl. 1, 1969, v. 12, № 5, p. 150–153.
17. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
18. Крайко А. Н. Аналитическое представление термодинамических функций воздуха.— Инж. ж., 1964, т. 4, в. 3, с. 548–550.

Москва

Поступила в редакцию
21.IV.1980