

УДК 533.8.011.5

**К ПОЛУЭМПИРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГЕНЕРАЦИИ ДИСКРЕТНЫХ
ТОНОВ СВЕРХЗВУКОВОЙ НЕДОРАСШИРЕННОЙ СТРУЕЙ,
НАТЕКАЮЩЕЙ НА ПРЕГРАДУ**

ГЛАЗНЕВ В. Н.

Неустойчивому взаимодействию сверхзвуковой недорасширенной струи с плоской преградой, установленной перпендикулярно оси струи (фиг. 1), посвящены работы [1–8 и др.], содержащие как результаты эксперимента, так и попытки теоретического объяснения явления с различных позиций. Выделим следующие особенности взаимодействия, связанные с параметром $m = x/2M_a \sqrt{\kappa n}$ ($x = x^*/r_a$ – безразмерное расстояние между соплом и преградой, r_a – радиус выходного сечения сопла, M_a – число Маха на срезе сопла, n – степень нерасчетности струи, κ – отношение удельных теплоемкостей). Если зафиксировать M_a , n , κ и уменьшать x от максимально допустимого, при котором преграда еще влияет на положение диска Маха (присоевое течение между диском Маха и преградой всюду дозвуковое), до минимального $x \approx 2-3$, то параметр m будет изменяться от $m_{\max} \approx 2M_a^{-1/2}$ [6] до некоторого m_{\min} , определяемого значениями M_a , κ , n . При этом найдутся значения m , при которых частота колебаний скачкообразно уменьшается (m_1) и скачкообразно увеличивается (m_2). Низкочастотные колебания в области $m_2 < m < m_1$ названы в литературе режимом сильной неустойчивости: По мнению авторов работ [2–6], сильная неустойчивость и колебания вне области $m_2 < m < m_1$ суть явления различной физической природы.

В работе [1] изложена физическая модель изучаемого явления и соответствующая ей полуэмпирическая теория (линейное приближение). Расчеты, проведенные на ее основе для отдельных режимов истечения, показали, что она правильно отражает основные результаты экспериментальных наблюдений: частоты колебаний, области их существования. Ниже приводится более полное исследование явления в рамках теории, предложенной в [1].

1. Согласно [1], в исследуемом явлении существенны следующие волновые процессы (фиг. 1): 1 – волны, излучаемые границей вверной струи (кольцевая диафрагма шириной $(R_2 - R_1)$) во внешнее пространство и распространяющиеся в сторону среза сопла; 2 – волны в сжатом слое струи, возникающие вследствие взаимодействия границы струи с внешним акустическим полем и распространяющиеся в струе от среза сопла к преграде; 3 – волны в дозвуковой части струи между диском Маха и преградой. Заменяя реальное распределение чисел M в областях 2 и 3 их средними значениями в осевом направлении, можно описать волновые процессы известными решениями [1]. В области 3 используются решения линеаризованных уравнений гидродинамики:

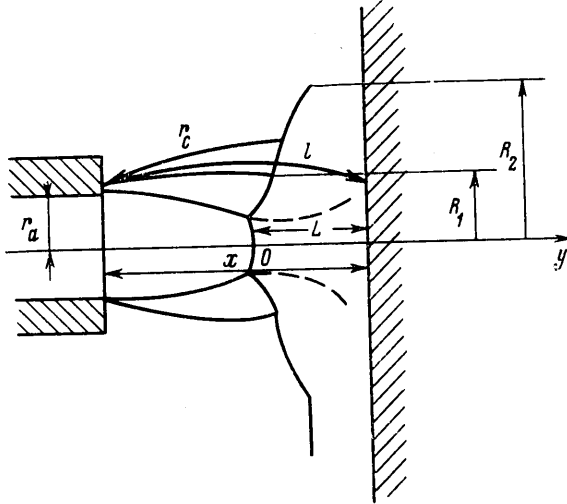
$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad p &= 0,5 [A_p f_1(\xi, \beta, M_s) + A_v f_2(\xi, \beta, M_s)] \exp \{ \beta \tau \} \\
 v &= 0,5 [A_v f_1(\xi, \beta, M_s) + A_p f_2(\xi, \beta, M_s)] \exp \{ \beta \tau \} \\
 f_1 &= \exp \{ -\beta \xi / M_s + 1 \} + \exp \{ -\beta \xi / M_s - 1 \} \\
 f_2 &= \exp \{ -\beta \xi / M_s + 1 \} - \exp \{ -\beta \xi / M_s - 1 \}
 \end{aligned}$$

Здесь p , v – безразмерные возмущения давления и скорости, $\xi = y/L^*$ (фиг. 1), $\beta = \nu + i\omega$ – безразмерная частота колебаний, $\omega = 2\pi f^* L^*/a^*$, a^* – скорость звука, $\tau = t a^*/L^*$ – время.

В сжатом слое струи (область 2) возмущения давления, порожденные у среза сопла и достигающие поверхности преграды ($\xi=1$), описываются формулой

$$(1.2) \quad p(\xi=1) = p_c \exp \{ -(\varphi_r + i\varphi_i)l + \beta\tau \}$$

Здесь φ_r , φ_i — показатели нарастания и фазовой скорости возмущений, зависящие от осредненного значения числа Маха (осевая составляющая) в сжатом слое струи и частоты колебаний. Кроме того, они включают эм-



Фиг. 1

пирическую константу, связывающую амплитуду колебаний давления на преграде и у среза сопла. Величина p_c — амплитуда колебаний давления у среза сопла.

Внешнее акустическое поле (область 1) описывается с помощью модифицированной теории поршневой диафрагмы. Согласно [8], давление у среза сопла

$$(1.3) \quad p_c = N \frac{\beta \exp \{ (\tau - r_c/L) \beta \}}{2r_c L} (R_2^2 - R_1^2)$$

Здесь N — колебательная скорость излучающей поверхности.

Для получения характеристического уравнения запишем граничные условия при $\xi=0$ и 1 (область 3):

$$(1.4) \quad v + \lambda p = 0 \quad \text{или} \quad A_s + \lambda A_p = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0$$

Здесь λ — акустическая проводимость прямого скачка уплотнения, вычисляемая по известному значению числа M_s перед центральным скачком уплотнения [9]. При $\xi=1$ вычислим пульсацию давления, обусловленную торможением на преграде возмущений, распространяющихся в сжатом слое струи, и являющуюся источником волнового процесса в области 3. Предварительно отметим экспериментально установленный [8] факт равенства амплитуд и фаз колебаний центрального скачка уплотнения и излучающей границы внешней струи. При этом условии известная [9] связь между колебательной скоростью прямого скачка уплотнения N , пульсацией давления $p(\xi=0) = A_p$ и числом Маха M за ним примет вид

$$(1.5) \quad N = \sqrt{A_p} (\kappa + 1) / M$$

Из (1.2), (1.3), (1.5) следует:

$$(1.6) \quad p(\xi=1) = A_p \frac{\kappa+1}{4M} \frac{\beta \exp\{\beta(\tau-r_c/L)\}}{2r_c L} (R_2^2 - R_1^2) \exp\{\varphi_r + i\varphi_i\}$$

Из (1.1), (1.4), (1.6) получим искомое характеристическое уравнение связывающее частоту колебаний β и режим истечения (M_a, n, x, κ) . Основные закономерности волновых процессов в областях 1-3, используемые в изложенных рассуждениях, подтверждены прямой экспериментальной проверкой [7].

Характеристическое уравнение, полученное в [1], запишем в виде

$$(1.7) \quad \begin{aligned} v &= \omega \operatorname{ctg} \alpha \\ (l_2 + 1,33) \omega \operatorname{ctg} \alpha &= 0,6\omega^2 l_1 + 1,31 - 5,16\mu + \ln(\omega/\sin \alpha) \\ \alpha &= a_1 \omega - a_2 \omega^2, \quad a_1 = l_2 + 1,33 - 0,75l_1, \quad a_2 = \frac{0,051}{M_a \sqrt{\kappa n}} \frac{l_1^2}{m} \end{aligned}$$

Входящие в (1.7) l_1, l_2, μ зависят от M_a, n, x, κ . Специально поставленный эксперимент, а также данные работ [2, 6] позволили представить эти зависимости в виде

$$\begin{aligned} l_1 &= m(m + 0,88e^{-1,75m} - 0,72)^{-1}, \quad l_2 = m(m + 0,92e^{-3,1m} - 0,49)^{-1} \\ \mu &= m/m_{\max} \end{aligned}$$

Допустимая область изменения определяющих параметров составляет $\mu \leq 1$.

Дальнейший анализ характеристического уравнения существенно связан со свойствами $\alpha(\omega, M_a, n, x, \kappa)$. Его максимальное значение как $\alpha(\omega)$ есть $\alpha_m = a_1^2/4a_2$; аппроксимируем его формулой

$$(1.8) \quad \alpha_m = M_a \sqrt{\kappa n} [0,106 + 2,37(m - 0,3)^2]$$

Числовые значения $a_1(m), a_2(m, M_a \sqrt{\kappa n}), \alpha_m$ представлены ниже.

m	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,80	1,0	1,4	1,8	2,0
a_1	0,998	0,938	0,930	1,09	1,26	1,34	1,39	1,41	1,46	1,49	1,48
$a_2 M_a \sqrt{\kappa n}$	0,586	0,895	1,46	1,51	1,19	0,874	0,470	0,276	0,126	0,0737	0,0607
$\alpha_m / M_a \sqrt{\kappa n}$	0,304	0,176	0,106	0,140	0,238	0,368	0,735	1,29	3,01	5,38	6,45

2. Из первого уравнения (1.7) следует необходимое условие неустойчивости течения:

$$(2.1) \quad 2\kappa l < \alpha < \left(2k + \frac{1}{2}\right) \pi, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Покажем, что оно является и достаточным.

Для этого второе уравнение системы (1.7) запишем в форме $A_1(\omega) = A_2(\omega)$. Так как $a_1(m), a_2(m, M_a \sqrt{\kappa n})$ всегда положительны, то при фиксированных a_1, a_2 (задан режим истечения) всегда найдется некоторый интервал $\Delta\omega_k$, где величина α как $\alpha(\omega)$ изменится от $(2k+1/2)\pi$ до $2\kappa l$. Если $\alpha_m > (2k+1/2)\pi$, то $\Delta\omega_k$ найдутся как для $\alpha > 0$, так и для $\alpha < 0$. При изменении α от $(2k+1/2)\pi$ до $2\kappa l$ величина A_1 изменится от 0 до ∞ . Величину A_2 можно представить в виде

$$A_2 = b(\omega, m) + \ln(\omega/\sin \alpha)$$

Так как $\mu \leq 1$ и $l_1 \leq 3,5$, то для всех конечных $\omega \geq 2,0$ $b(\omega, m)$, как показывают оценки, будет конечной положительной величиной. Легко показать, что при $\alpha \rightarrow 2\kappa l$

$A_1, A_2 \rightarrow \infty$, но при этом $A_2/A_1 \rightarrow 0$. Поэтому для всех $\mu \leq 1$ и $\omega \geq 2,0$ обязательно найдется корень уравнения $A_1(\omega) = A_2(\omega)$, $\omega \in \Delta\omega_k$, при котором α удовлетворяет неравенствам (2.1).

Граница области устойчивости представляет собой при фиксированном κ поверхность в пространстве независимых переменных (M_a, n, x) , которая определяется (1.7) при $\nu = 0$:

$$(2.2) \quad \alpha_k = a_1 \omega_{k0} - a_2 \omega_{k0}^2 = (2k + 1/2)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$(2.3) \quad A_2 = 0,6\omega_{k0}^2 l_1 + 1,31 - 5,16\mu + \ln \omega_{k0} = 0$$

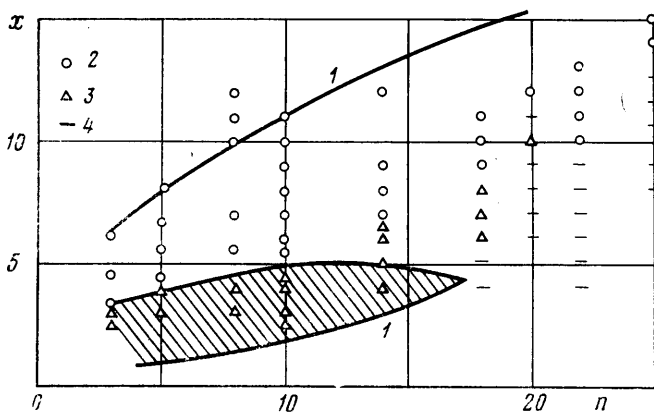
Здесь ω_{k0} — частота нейтральных колебаний k -той моды. Так как $A_2 > 0$ для $\omega \geq 2,0$ при всех $\mu \leq 1$, то течение будет неустойчивым по отношению к высокочастотным ($\omega \geq 2,0$) колебаниям при всех допустимых значениях определяющих параметров M_a, n, x . Однако по отношению к низкочастотным ($\omega \leq 2,0$) колебаниям граница области устойчивости, как показывают оценки по уравнению (2.3), находится при $\mu < 1$. Если зафиксировать M_a, n , то низкочастотные колебания будут возбуждаться при $x_1 < x_{\max}$, где x_{\max} — предельно допустимое при данных M_a, n значение x . Величину x_1 будем называть верхней границей низкочастотных колебаний. Расчеты по формулам (2.2), (2.3) позволили аппроксимировать ее уравнением

$$(2.4) \quad x_1 = 2,24(M_a)^{0,7} \sqrt{\kappa n}$$

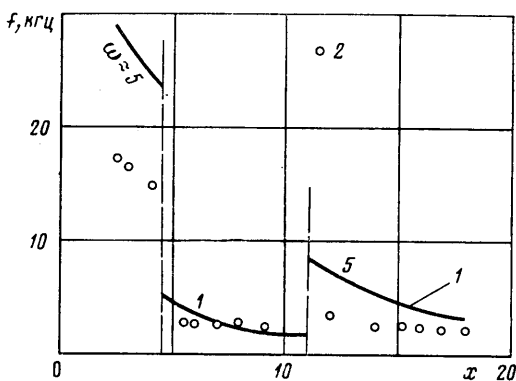
Таким образом, при фиксированных M_a, n и непрерывном уменьшении x (традиционная процедура в эксперименте) частота колебаний должна скачкообразно уменьшаться при переходе через значение $x = x_1$, определяемом (2.4).

3. Обычно в эксперименте исследователь фиксирует режим истечения струи (M_a, κ, n) и изучает эволюцию амплитудно-частотной характеристики процесса при изменении x . Аналогично проведем теоретический анализ. Пусть x непрерывно уменьшается так, что m уменьшается от значения m_1 , соответствующего x_1 (см. (2.4)), до минимально возможного $m^* \approx 0,115$ (диск Маха располагается в плоскости среза сопла). Эволюция частотной характеристики зависит от величины α_m . При $N = M_a \sqrt{\kappa n} \geq 7,40$, согласно (1.8), будет $\alpha_m \geq \pi/2$. В соответствии с вышеизложенным (см. (2.1)) при всех x система (1.7) будет иметь корень, отвечающий $k = 0$. При $N < 7,40$ система не для всех x будет иметь корни, соответствующие $k = 0$.

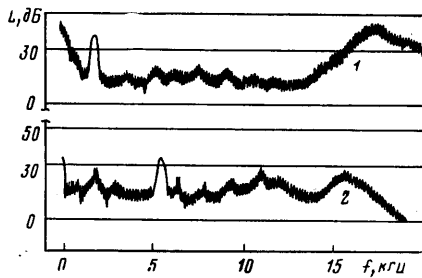
Пусть $N < N_* \approx 7,40$. С уменьшением x величина α_m , согласно (1.8), уменьшается. Обозначим через ω_m значение ω , при котором $\alpha = \alpha_m = a_1^2 / 4a_2$ (см. (1.7)). При некотором $x = x_2$ будет $A_1(\omega_m) > A_2(\omega_m)$, ибо при $\alpha_m \rightarrow 0$ $\text{ctg } \alpha_m \rightarrow \infty$, $A_2(\omega_m)/A_1(\omega_m) \rightarrow 0$. Так как $dA_1/d\omega > dA_2/d\omega$, то (1.7) не удовлетворится ни при каких ω , для которых $\alpha > 0$. В этом случае, согласно (2.1), корней нулевой моды не будет, наименьший корень уравнения найдется при $k = -1$. Следовательно, при непрерывном уменьшении x найдется некоторое x_2 , при переходе через которое наименьшая собственная частота системы скачкообразно увеличится. Можно приближенно оценить величину скачка частот. Пусть перед скачком частот $\alpha_1 = \alpha_m \approx \pi/4$. Соответствующее ему $\omega_1 = \omega_m = a_1/2a_2$ (см. (1.7)). После скачка частот можно положить $\alpha_2 \approx \alpha_m - 2\pi$. По (1.7) $\omega_2(\alpha_2) = a_1/2a_2 \pm \sqrt{(\alpha_m - \alpha_2)/a_2}$. Отсюда $\omega_2/\omega_1 \approx 3,8$; величина эта слабо зависит от режима истечения струи. При дальнейшем уменьшении x будет уменьшаться α_m , мода $k = 0$ корней не даст. Следовательно, низкочастотных колебаний не будет,



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

частота высокочастотных колебаний (мода $k=-1$) будет плавно увеличиваться с уменьшением x . Величина α_m имеет минимум при $m=0,3$. Уменьшение x в области $m < 0,3$ приведет к возрастанию α_m , и при $\alpha_m \geq \pi/4$ снова возбудится мода $k=0$, наименьшая частота колебаний скачкообразно понизится при некотором x_3 . Уравнение поверхности в пространстве M_a, n, x , на которой скачкообразно изменяются частоты колебаний, получится, если в (1.8) положить $\alpha_m \approx \pi/4$:

$$(3.1) \quad x_{2,3} = 2N[0,3 \pm \sqrt{0,42(0,785/N - 0,11)}]$$

Здесь знак плюс соответствует x_2 (скачкообразное повышение частоты колебаний); знак минус соответствует x_3 (скачкообразное понижение частоты колебаний). Уравнение (3.1) справедливо для $N \leq 7,40$. При $M_a = \text{const}$ $x_2(n)$ представляет собой линию, которую назовем нижней границей нулевой моды. В эксперименте [6] с ней отождествляют начало неустойчивого взаимодействия, границу сильной неустойчивости. Из (3.1) следует, что $\Delta x = x_2 - x_3$ монотонно уменьшается с ростом n при заданном M_a . При $N \approx 7,40$ $\Delta x = 0$, обе линии сливаются.

Пусть $N > N^*$. При этом для всех m , по (1.8), будет $\alpha_m > \pi/4$. Поэтому для всех x найдется корень уравнения (1.7) при $0 < \alpha < \pi/2$, соответствующий нулевой моде. Скачка частот не произойдет ни при каком значении $x < x_1$. Нулевая мода — низкие частоты — будет существовать для всех $x < x_1$.

Из предыдущих рассуждений видно, что значением N_* следует пользоваться как оценочным, указывающим на принципиально различные свойства частотной характеристики исследуемой системы для малых и больших N . Для получения точной картины необходимо всякий раз вычислять корни из (1.7).

4. Для иллюстрации основных результатов изложенного анализа был поставлен эксперимент. Опыты проводились на струйной установке Института теоретической и прикладной механики СО АН СССР, рабочее тело — холодный воздух. Число Маха на срезе сопла в большей части опытов $M_a=1,5$, $d_a=20$ мм, $n=3-25$, диаметр преграды 600 мм. Колебания давления измерялись пьезокерамическим датчиком с предусилителем, изготовленным в ИТПМ СО АН СССР. Датчик с диаметром мембраны 18 мм располагали непосредственно у торца сопла в плоскости его выходного сечения. Неравномерность его частотной характеристики в полосе частот 0,1–8 кГц не превышает 3 дБ. В процессе эксперимента при фиксированных M_a , n , x регистрировался спектр колебаний давления с помощью анализатора С5-3 и самописца Н-110. Затем менялся режим истечения, процедура повторялась. Случайная погрешность измерения амплитуды колебаний давления на данной частоте не превышает 10%.

В эксперименте [2, 3] с областью существования моды $k=0$ отождествляют область существования низкочастотных колебаний, зону сильной неустойчивости. Результаты расчета и эксперимента представлены на фиг. 2, где 1 — границы области, полученные теоретически. Заштрихована область высокочастотных колебаний, соответствующая $k=-1$; 2 — низкие ($\omega \approx 1,0$), 3 — высокие ($\omega \approx 4-5$) частоты, 4 — отсутствие дискретного тона в спектре колебаний давления. При $n \leq 20$ уменьшение x приводит в соответствии с теорией к скачкообразному повышению частоты колебаний. При этом как верхняя граница низкочастотных колебаний (большие x), так и нижняя свидетельствуют об удивительном совпадении не только качественно, но и количественно результатов расчета и эксперимента. При больших n теория не описывает столь же полно всех деталей процесса.

На фиг. 3 представлены результаты расчетов 1 и экспериментов 2 по частотам колебаний. Эксперимент проведен при $M_a=1,5$, $n=10$, $d_a=20$ мм. Как в расчетах, так и в экспериментах обнаруживаются три характерные ветви частотной характеристики процесса. Отметим, что низкочастотные колебания лучше описываются теорией, чем высокочастотные, что соответствует допущениям, принятым при формулировке теории [1].

Выше показано, что при постоянных M_a , n и непрерывном уменьшении x частота колебаний скачкообразно увеличивается при переходе через x_2 (см. (3.1)). Для экспериментальной проверки этого закона спектры колебаний давления записывались при постоянных M_a , n для $x_2+\Delta x$ и $x_2-\Delta x$, при этом $\Delta x/x_2 \ll 1$ (непосредственно до и после скачка частот). Ниже представлены результаты эксперимента. Среднее значение ω_2/ω_1 оказалось действительно близко к 3,8, предсказанному теорией, и слабо зависит от режима истечения. Результаты эксперимента, представленные на фиг. 1, а и 2 работы [6] столь же убедительно подтверждают этот закон.

M_a	1,5	1,5	1,5	1,5	2,0	2,0
n	5	10	14	18	3	5
ω_2/ω_1	3,05	3,38	4,26	4,30	3,8	4,0

В заключение следует сказать, что сложившееся в литературе [2–6] противопоставление сильной и слабой неустойчивости по механизму возбуждения колебаний представляется неосновательным. В работе [6] показано, что при постоянных M_a , n и непрерывном изменении x амплитуда колебаний давления на преграде δr изменяется плавно, не содержит разрывов, хотя в области сильной неустойчивости и достигает максимальных значений. Аналогичный результат получен в настоящей работе. На фиг. 4 представлены две спектрограммы колебаний давления с одинаковым масштабом по вертикали, полученные при $M_a=2,0$; $n=5,0$; $d_a=40$ мм. Спектрограмма 1 получена для $x=6,5$ (частота дискретного тона 1,8 кГц соответствует моде $k=0$); спектрограмма 2 получена для $x=6,0$ (частота дискретного тона 5,5 кГц соответствует моде $k=-1$). На спектрограмме 1 (зона сильной неустойчивости) амплитуда всего лишь на 5–6 дБ превышает амплитуду на спектрограмме 2. Частоты колебаний на границах области сильной неустойчивости действительно изменяются резко (см. [6] и фиг. 3, 4 настоящей работы). Известно [9], что амплитуда колебаний ударной волны (в данном случае диска Маха) под действием акустического возмущения в дозвуковой части потока $\delta x \sim \delta r/\omega$. Следовательно, резкое повышение частоты колебаний на обеих границах области сильной неустойчивости приведет к

резкому уменьшению амплитуды колебаний диска Маха, что и наблюдается в эксперименте. Можно предположить, что это соединение акустического и оптического эффектов и послужило главной причиной той классификации типов колебаний, которая предлагается в работах [2-4, 6]. Однако сопоставление результатов эксперимента, представленных в настоящей работе и в работе [6], с результатами предлагаемой теории показывает, что как сильная, так и слабая неустойчивость объясняются с позиций одной и той же теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глазнев В. Н., Демин В. С. Полуэмпирическая теория генерации дискретных тонов сверхзвуковой недорасширенной струей, натекающей на преграду.— ПМТФ, 1976, № 6.
2. Семилетенко Б. Г., Усков В. Н. Экспериментальные зависимости, определяющие положение ударных волн в струе, натекающей на преграду, перпендикулярно ее оси.— Инж.-физ. ж., 1972, т. 23, № 3.
3. Остапенко В. А., Сологчин А. В. О критериях моделирования поля течения сверхзвуковой струи при наличии преграды.— Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1974, вып. 2, № 8.
4. Дулов В. Г. Модели струйных течений.— В кн.: Аэрогазодинамика и физическая кинетика. Новосибирск, 1977.
5. Набережная Г. В. Расчет нестационарного взаимодействия сверхзвуковой струи с плоской преградой методом «крупных частиц».— Тр. ЦАГИ, 1978, вып. 1899.
6. Семилетенко Б. Г., Собколов Б. Н., Усков В. Н. Особенности неустойчивого взаимодействия сверхзвуковой струи с безграничной преградой.— Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1972, вып. 3, № 13.
7. Глазнев В. Н., Демин В. С., Якушев А. М. Об автоколебаниях в недорасширенной струе, натекающей на преграду.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 6.
8. Глазнев В. Н. Об акустическом поле сверхзвуковой недорасширенной струи, натекающей на преграду.— Акуст. ж., 1977, т. 23, в. 2.
9. Глазнев В. Н., Желтухин Н. А. Отражение акустической волны от ударной в канале переменного сечения.— Изв. СО АН СССР. Сер. тех. наук, 1972, вып. 2, № 8.

Новосибирск

Поступила в редакцию
7.V.1979