

УДК 532.546

ЗАДАЧА НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ НАСЫЩЕННО-НЕНАСЫЩЕННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ К ГОРИЗОНТАЛЬНЫМ ДРЕНАМ

РЫБАКОВА С. Т., САБИНИН В. И.

На орошаемых массивах со слабой естественной дренированностью применяется искусственный дренаж для предотвращения развития процессов вторичного засоления и заболачивания. Расчет параметров дренажа требует решения задач насыщено-ненасыщенной фильтрации в области между дренами [1-6]. Влияние движения в ненасыщенной зоне на общий поток грунтовых вод наиболее существенно при небольшой мощности водонасыщенной зоны (близкое залегание водоупора) и особенно в случае тонкозернистых грунтов. Если капиллярная кайма пересекает поверхность почвы и происходит чередование процессов инфильтрации, перераспределения, испарения влаги, то возможны быстрые колебания уровня грунтовых вод. В этих условиях расчет параметров дренажа по гидравлическим моделям [7], не учитывающим движение в зоне неполного насыщения, затрудняется необходимостью задания коэффициента водоотдачи (недостатка насыщения), а также скорости притока (оттока) из зоны аэрации в грунтовые воды.

В данной работе дается математическая постановка, описывается алгоритм численного решения и приводятся примеры расчетов для плоской задачи неустановившейся совместной фильтрации грунтовых вод и почвенной влаги.

1. Математическая постановка задачи. Рассматривается задача двумерной неустановившейся фильтрации с учетом зоны неполного насыщения при наличии в области движения систематических горизонтальных дрен (фиг. 1). Предполагается, что пористая среда является несжимаемой, давление воздуха в почве равно атмосферному, движение влаги происходит под действием капиллярных и гравитационных сил, закон Дарси справедлив при полном и неполном насыщении пористой среды. Учитывается слоистое сложение толщи грунта по вертикали. Зависимости давления ψ и коэффициента влагопроводности k от влажности θ считаются однозначными.

С учетом указанных допущений определение основных характеристик насыщено-ненасыщенного потока сводится к решению следующей задачи:

$$(1.1) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k(\psi, z) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[k(\psi, z) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) \right] - f(\theta, z, t)$$

$$(1.2) \quad \psi(x, z, 0) = \psi^0(x, z), \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq z \leq d$$

$$(1.3) \quad -k \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) = R(x, t), \quad 0 \leq x \leq l, \quad z = 0$$

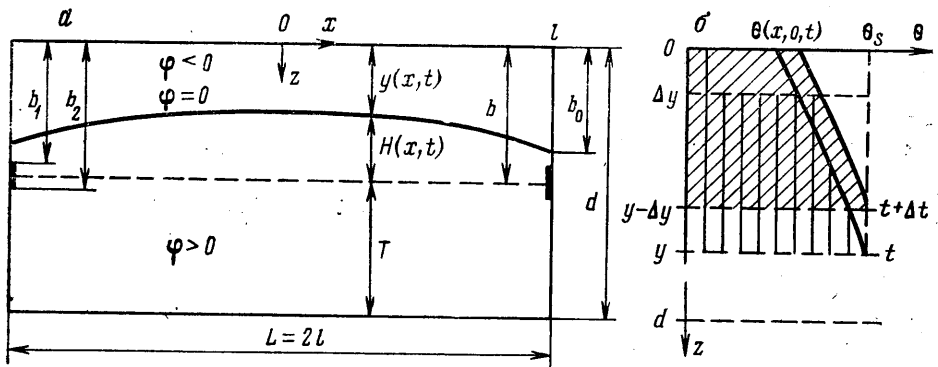
$$(1.4) \quad \partial \psi / \partial z = 1, \quad 0 \leq x \leq l, \quad z = d$$

$$(1.5) \quad \partial \psi / \partial x = 0, \quad x = 0, \quad 0 \leq z \leq d$$

$$(1.6) \quad \partial \psi / \partial x = 0, \quad x = l, \quad b_2 < z \leq d$$

$$(1.7) \quad \psi = z - b, \quad x = l, \quad b \leq z \leq b_2$$

На участке $0 \leq z < b$ граничные условия задаются в зависимости от типа дрены.



Фиг. 1

Если дрена открытая ($b_1=0$), то

$$(1.8) \quad \psi=0, x=l, b_0 \leq z < b$$

$$(1.9) \quad \partial\psi/\partial x=0, x=l, 0 \leq z < b_0$$

В случае закрытой полностью заполненной водой дрена ($b=b_1=b_0$) условие (1.8) пропадает. Если дрена заполнена водой неполностью ($b > b_0 \geq b_1$), то выполняются оба условия. В уравнениях и граничных условиях ось z направлена вертикально вниз, b_1 и b_2 — соответственно координаты по оси z начала и конца дрена, b — отметка уровня воды в дренае, b_0 — отметка точки выхода зеркала грунтовых вод на откос дрена (фиг. 1, а).

Условия (1.3)–(1.6), (1.9) отражают либо симметрию картины течения, либо задают потоки на соответствующих участках границы. На дрена считается известным напор $\varphi = \psi - z = -b$. На участке высачивания ставится условие (1.8). При определении положения точки b_0 учитывается, что $\partial\psi/\partial x > 0$ при $x=l$, $b_1 \leq b_0 < z < b$. Поверхности зеркала грунтовых вод соответствует изолиния давления $\psi=0$, являющаяся границей раздела между зонами полного и неполного насыщения.

Для решения задачи (1.1)–(1.9) необходимо задать вид функции $\theta(\psi)$ и $k(\theta)$ для каждого литологического слоя зоны аэрации, а также функцию f при учете отбора влаги корнями растений.

Здесь в качестве зависимости $k(\theta)$ принята формула [2]

$$(1.10) \quad k = k_s [(\theta - \theta_r) / (\theta_s - \theta_r)]^n, \quad \theta > \theta_r; \quad k = 0, \quad \theta \leq \theta_r$$

Связь влажности и давления определяется формулой [5]

$$(1.11) \quad \theta = \frac{\theta_s - \theta_0}{1 + (-\psi/a)^m} + \theta_0, \quad \psi < 0; \quad \theta = \theta_s, \quad \psi \geq 0$$

где k_s и θ_s — соответственно коэффициент фильтрации и влажность при полном насыщении, θ_r — влажность, соответствующая связанной воде [2]. Параметры k_s , θ_s , θ_r , n , θ_0 , m , a зависят от типа грунта.

Аналогично [6] функция f принимается в виде

$$(1.12) \quad f = \varepsilon(t) p(\theta) q(z) / \int_0^{z_k} p(\theta) q(z) dz, \quad 0 \leq z \leq z_k, \quad f = 0, \quad z > z_k$$

$$q(z) = cz_k - z, \quad p(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta \geq \theta_k \\ \frac{\theta - \theta_*}{\theta_k - \theta_*}, & \theta_* < \theta < \theta_k \\ 0, & \theta \leq \theta_* \end{cases}$$

где $z_k(t)$ — мощность корневой зоны, θ_* — влажность завядания, θ_k — кри-

тическая влажность, $\varepsilon(t) = \int_0^{z_k} f dz$ — интенсивность транспирации.

Решение задачи (1.1)–(1.9) позволяет получить динамику влажности (давления) в зоне аэрации и поведение зеркала грунтовых вод для различных процессов.

2. Численный метод решения. Задача (1.1)–(1.9) аппроксимировалась на неравномерной разностной сетке чисто неявной с разрывами в узлах пятиточечной разностной схемой. Получающаяся в результате система квазилинейных уравнений с пятидиагональной матрицей коэффициентов решалась новым итерационным методом. Этот метод является модификацией и обобщением на квазилинейные системы варианта итерационного метода неполной факторизации, предложенного для линейных систем в работах [8, 9]. Использование соответствующего итерационного параметра с циклически повторяющимся набором значений позволило получить высокую скорость сходимости метода. Разработанный метод быстро сходится также и при решении стационарной задачи, когда матрица коэффициентов близка к вырождению.

На каждом шаге по времени начальная итерация задавалась экстраполяцией с двух предыдущих шагов. Величина шага по времени определялась так же, как и в [10]. За верхнюю границу участка высачивания принимался самый верхний из возможных узлов, в котором посчитанное по последней известной итерации давление было неотрицательным, а поток — не направленным внутрь области. Дрена считалась квадратной или прямоугольной, и шаги по пространству задавались так, чтобы ее контур проходил по средней линии между узлами.

3. Приближенная модель. Для расчета режима уровней грунтовых вод в случаях осушения первоначально насыщенной толщи грунта или равномерной инфильтрации на поверхности почвы рассматривается также модель, основанная на гидравлической теории. В этой модели влияние ненасыщенной зоны на общий поток грунтовых вод учитывается приближенно.

Определение превышения уровня грунтовых вод $H(x, t)$ над уровнем воды в дрене (фиг. 1, а) сводится к решению следующей задачи:

$$(3.1) \quad \mu \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k_s (H + H_k + T_1) \frac{\partial H}{\partial x} \right] + W$$

$$(3.2) \quad H(x, 0) = H_0(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

$$(3.3) \quad \partial H / \partial x = 0, \quad x = 0$$

$$(3.4) \quad H(l, t) = 0, \quad x = l$$

Здесь $\mu(x, t)$ — коэффициент водоотдачи (недостатка насыщения), $W(x, t)$ — интенсивность инфильтрации. Учет несовершенства дрены производится с применением метода фильтрационных сопротивлений [7, 11].

При этом

$$T_1 = \alpha T, \quad \alpha = l / (l + 4\Phi)$$

где Φ — фильтрационное сопротивление, T — мощность толщ от уровня воды в дрене до водоупора. Если эта толща состоит из n слоев, то

$$T = m_1 + \sum_{i=2}^n k_{i,s} \cdot m_i / k_{i,s}$$

где $k_{i,s}$ и m_i — соответственно коэффициент фильтрации и мощность i -го слоя.

Параметры $\mu(x, t)$ и $H_k(x, t)$ определяются с учетом динамики влажности в зоне неполного насыщения. Предполагается, что при движении водного зеркала вверх или вниз форма профиля влажности в ненасыщенной зоне не меняется. В качестве такого квазистационарного профиля влажности принимается профиль, найденный из решения задачи

$$(3.5) \quad -k(\theta) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) = W$$

$$(3.6) \quad \psi = 0, \quad z = y(x, t)$$

где y — глубина залегания зеркала грунтовых вод (фиг. 1, а).

В случае задачи дренажа насыщенной толщ грунта ($W=0$) из (3.5) — (3.6) имеем

$$\psi = z - y$$

При известных кривых связи $\theta(\psi)$ и $k(\theta)$ находится распределение влажности в каждой точке x междреннего пространства в момент t .

Величина $\mu(x, t)$ представляет собой изменение объема воды V в элементе пласта единичной площади ($0 \leq z \leq d$, фиг. 1, в) при гравитационном осушении или насыщении, отнесенное к изменению зеркала грунтовых вод

$$(3.7) \quad \mu = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V / \Delta t}{\Delta H / \Delta t}, \quad V = \int_0^d \theta(x, z, t) dz$$

Так как форма профиля во времени не меняется, площади, заштрихованные на фиг. 1, в косыми и вертикальными линиями, будут равны.

Тогда из (3.7) получаем

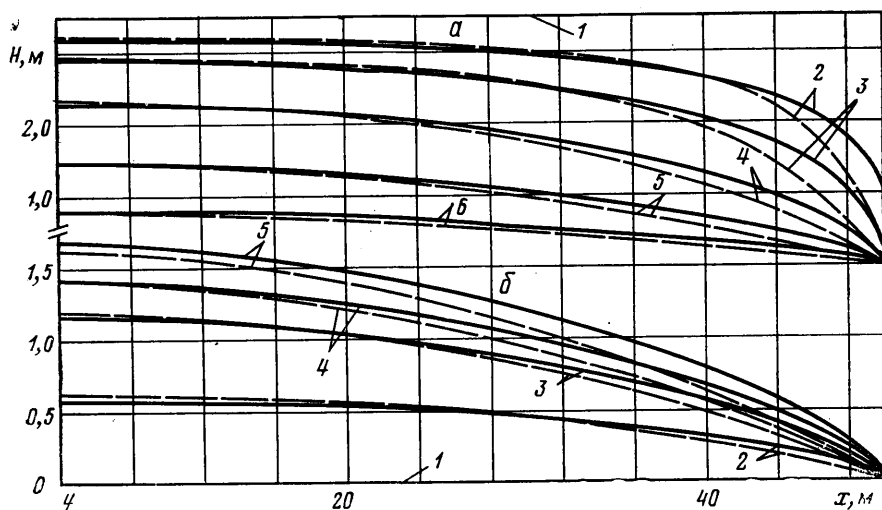
$$(3.8) \quad \mu = \theta_s - \theta(x, 0, t)$$

т. е. коэффициент μ при сделанных выше предположениях равен содержанию воздуха на поверхности почвы [3].

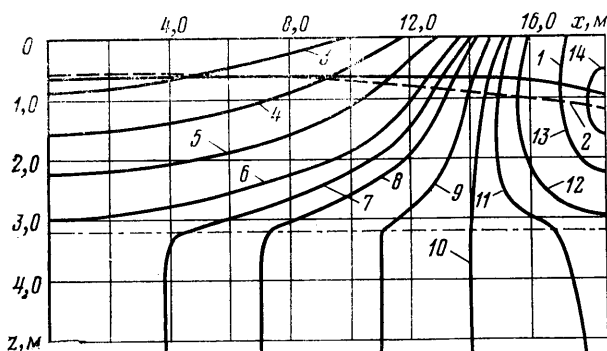
Горизонтальный поток в зоне неполного насыщения приближенно учитывается путем увеличения водонасыщенной мощности пласта на величину H_k . В работах [1, 4] H_k находится из условия, чтобы произведение коэффициента фильтрации пласта на H_k было равно проводимости ненасыщенной зоны.

Здесь H_k определяется следующим образом:

$$(3.9) \quad (k_s - k_0) H_k = \int_0^y k(\theta(x, z, t)) dz - k_0 y, \quad k_0 = k(\theta(x, 0, t))$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Решение задачи (3.1)–(3.4) отыскивается с использованием численных методов. Отрезок $[0, l]$ покрывается равномерной сеткой. Методом Рунге – Кутты находится решение задачи (3.5)–(3.6), а по формулам (3.8), (3.9) – значения μ и H_k в каждом узле. Для решения задачи (3.1)–(3.4) применяется неявная консервативная конечно-разностная схема и метод прогонки с итерационным процессом, поскольку коэффициенты уравнения (3.1) зависят от искомой функции.

4. Примеры расчета дренажа. Сравнение численных решений гидродинамической и гидравлической моделей было выполнено для различных задач. В расчетах по гидродинамической модели круглая дрена заменялась квадратной с равновеликим периметром. Ниже рассматриваются примеры с закрытой дренай, полностью заполненной водой ($b_1=b$).

Рассчитывался процесс осушения первоначально полностью насыщенной однородной толщи грунта типа суглинка со следующими параметрами в зависимостях (1.10), (1.11): $k_s=0,1$ м/сут, $\theta_s=0,45$; $\theta_r=0,25$; $n=3,5$; $\theta_0=0$; $a=3,35$ м; $m=2$; $d=10$ м. В начальный момент $y(x, 0)=0$. На поверхности почвы ($z=0$) $R=W=0$. Осушение производится закрытыми дренами с радиусом $r=0,8$ м, расстоянием между дренами $L=100$ м; $b=3,5$ м; $\Phi=2$ м.

На фиг. 2, *a* приведены кривые $H(x, t)$, соответствующие моментам времени 0, 1, 5, 25, 100, 250 сут. (соответствующие линии 1—6). Здесь и далее сплошные линии соответствуют гидродинамической, а штриховые — гидравлической модели. С уменьшением отношения L/T возрастает погрешность гидравлической модели в окрестности дрены.

Исследовалось поведение зеркала грунтовых вод для случая равномерной инфильтрации на поверхности почвы с интенсивностью $R=W=0,001$ м/сут. В этом примере $y(x, 0)=3,5$ м. Остальные параметры те же, что и ранее. Начальное распределение влажности в обеих моделях принималось одинаковым и находилось из решения задачи (3.5) — (3.6). Результаты расчетов приведены на фиг. 2, *b*. Линии 1—5 соответствуют $t=0, 100, 250, 365, \infty$ сут.

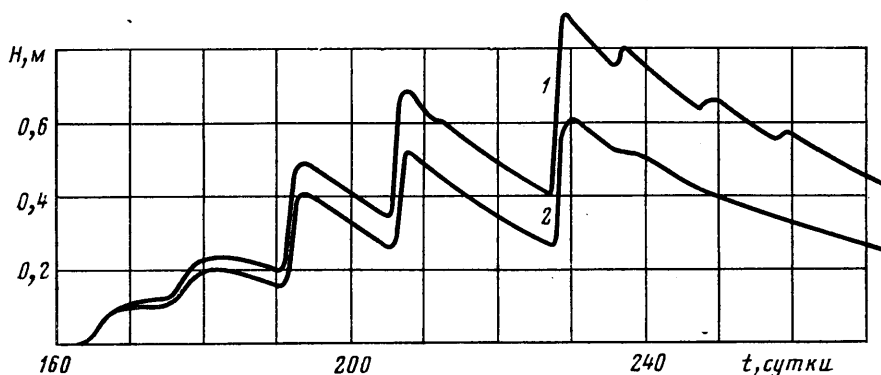
Аналогичная задача решена для двухслойного грунта. Интенсивность инфильтрации $R=W=0,003$ м/сут. Дрены с радиусом $r=0,025$ м, расстоянием $L=37$ м, $b=1,2$ м заложены в покровном слое. Параметры верхнего слоя: $k_s=0,2$ м/сут; $\theta_s=0,45$; $\theta_r=0,25$; $n=3,5$; $\theta_0=0$, $a=2,57$ м, $m=2$, мощность 3,2 м. Нижний слой с коэффициентом фильтрации 5 м/сут и мощностью 2 м находится в насыщенной зоне. Фильтрационное сопротивление $\Phi=75$ м. Для стационарного режима на фиг. 3 приводятся изолинии давления $\psi=0$ (линия 1; 2 — гидравлическая модель) и изолинии напора $\varphi=\psi-z$. Линии 3—14 соответствуют значениям $\varphi=-0,64$; $-0,65$; $-0,66$; $-0,67$; $-0,675$; $-0,68$; $-0,69$; $-0,7$; $-0,71$; $-0,73$; $-0,8$; $-0,9$ м.

Анализ результатов расчета дренажа в однородных и слоистых грунтах для случаев осушения или равномерной инфильтрации показывает хорошее согласование численных решений гидродинамической и гидравлической моделей. Поэтому для задач, рассмотренных выше, более целесообразным является использование гидравлической модели, поскольку численный алгоритм для нее является более простым и требует меньших затрат машинного времени.

В реальных условиях поступление воды на поверхность почвы, как правило, является неравномерным по времени. Величина оттока (притока) из зоны аэрации в грунтовые воды зависит от объема водоподачи, начальной влажности и водно-физических свойств грунтов ненасыщенной зоны, вида сельскохозяйственных культур, метеорологических условий. Учет этих факторов в гидравлической модели не представляется возможным. Ниже приводится пример расчета, основанный на решении задачи (1.1) — (1.9).

Требуется рассчитать динамику влажности и поведение уровня грунтовых вод при неравномерной подаче воды на поверхность почвы с учетом отбора влаги корнями растений. Распределение интенсивности осадков и поливов ($R(t)$) в вегетационный период задавалось следующим образом. Начало отсчета времени совпадает с началом года. Продолжительность осадков составляет 0,5 сут, поливов — 1 сут. Осадки приходятся на 155, 165, 180, 185, 195, 200, 211, 216, 221, 236, 247, 257-е сутки года с интенсивностями соответственно 0,022; 0,022; 0,020; 0,0340 и 0,020 м/сут во все остальные дни. Поливы проводились на 162, 175, 190, 205, 227-е сутки с интенсивностями соответственно 0,0405; 0,0540; 0,07425; 0,07425; 0,07425 м/сут. Во все остальные интервалы времени года $R(t)=0$. Распределение интенсивности потенциальной транспирации $\varepsilon(t)$ дано ниже:

Интервал времени, сут	0—140	140—162	162—175	175—190	190—205	205—227	227—273	273—365
ε , м/сут	0	0,0005	0,0031	0,0044	0,0050	0,0040	0,0019	0



Фиг. 4

Суммарные за сезон величины транспирации и водопадачи составляют соответственно 365 и 447,25 мм. Осуществляется промывной режим почво-грунтов на фоне дренажа. Грунт является однородным со следующими параметрами: $k_s=0,1$ м/сут; $\theta_s=0,41$; $\theta_r=0,25$; $n=3$; $\theta_0=0$; $a=2,6$ м; $m=3$. Общая мощность пласта $d=13$ м. Мощность корневой зоны z_k принята постоянной и равной 0,5 м. В формулах (1.13) $c=1,125$; $\theta^*=0,15$; $\theta_k=0,21$.

Радиус дрен $r=0,25$ м, расстояние между дренами $L=100$ м, $b=2,5$ м. Начальное распределение давления задается следующим образом:

$$\psi=\psi_r, \quad z \leq 2,5+\psi_r; \quad \psi=z-2,5, \quad z > 2,5+\psi_r$$

где ψ_r — давление при влажности θ_r .

На фиг. 4 показаны графики $H(x, t)$ для середины междренного пространства и в окрестности дрены (линия 1 — $x=0$, линия 2 — $x=39$ м). Часть поливной воды уходит в грунтовые воды, пик подъема которых наблюдается спустя несколько суток от начала полива. В промежутках между поливами происходит сработка инфильтрационного бугра за счет капиллярной подпитки зоны аэрации и бокового оттока в дренах. На 273-и сутки значения H равны соответственно 0,43 и 0,25 м, а к 140-м суткам второго года орошения 0,14 и 0,08 м, т. е. полного растекания инфильтрационного бугра не происходит.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аверьянов С. Ф. Приближенная оценка роли фильтрации в зоне капиллярной каймы. — Докл. АН СССР, 1949, т. 69, № 3.
2. Аверьянов С. Ф. Зависимость водопроницаемости почво-грунтов от содержания в них воздуха. — Докл. АН СССР, 1949, т. 69, № 2.
3. Dos Santos Junior A. G., Youngs E. G. A study of the specific yield in land-drainage situations. — J. Hydrology, 1969, v. 8, No. 1.
4. Mc Whorter D. B., Duke H. R. Transient drainage with nonlinearity and capillarity. — Irrigation and Drainage Division, Proc. ASCE, 1976, v. 12, No. 2.
5. Gardner W. R. Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table. — Soil Sci., 1958, vol. 85, No. 4.
6. Рыбакова С. Т., Сабинин В. И. Исследование взаимосвязи почвенных и грунтовых вод при орошении. — ПМТФ, 1978, № 2.
7. Олейник А. Я., Насиковский В. П. Методы расчета мелиоративного дренажа в неоднородно-слоистых грунтах (Пособие для расчета). Киев: Урожай, 1970.
8. Гинкин В. П. Метод h -факторизации для решения двумерных уравнений эллиптического типа. — В кн.: Вычисл. методы линейной алгебры. Новосибирск, 1977.
9. Булеев Н. И. Новый вариант метода неполной факторизации для решения двумерных разностных уравнений диффузии. — В кн.: Численные методы механики сплошной среды, т. 9, № 1. Новосибирск, 1978.
10. Сабинин В. И. Некоторые вопросы численного моделирования фильтрации при неполном насыщении. Рук. деп. в ВИНТИ 21 нояб. 1977, № 4321-77 Деп.
11. Moody W. T. Nonlinear differential equation of drain spacing. — J. Irrigat. and Drain. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, 1966, v. 92, No. 2.

Новосибирск

Поступила в редакцию
2.I.1980