

УДК 532.529:536.25

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОНВЕКТИВНЫЕ ДВИЖЕНИЯ В ПЛОСКОМ ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ

ВОЗОВОЙ Л. П., НЕИОМНЯЩИЙ А. А.

Известно, что существуют два механизма неустойчивости плоскопараллельного течения в плоском вертикальном слое, на границах которого поддерживается постоянная разность температур: монотонная гидродинамическая неустойчивость, проявляющаяся при умеренных значениях числа Прандтля P [1] и приводящая к установлению стационарных вторичных движений [2, 3], и колебательная неустойчивость, существенно связанная с температурными возмущениями и порождающая при $P > 12$ тепловые волны [4].

В настоящей работе рассматриваются новые типы пространственно-периодических движений, нестационарность которых обусловлена иной причиной — нелинейным взаимодействием мод с кратными волновыми числами, и проявляется при умеренных значениях числа P . Получены решения типа бегущих волн неизменной формы, бегущих волн с периодически меняющейся формой, стоячих колебаний. В некоторой области значений параметров система не имеет устойчивых предельных режимов, но обладает неустойчивыми стационарами («седловыми точками»), связанными между собой двоякоасимптотическими траекториями.

Для расчетов применялись метод сеток и метод Галеркина. Предложена система модельных уравнений, описывающая обнаруженные типы вторичных движений.

1. Рассматривается плоское течение несжимаемой вязкой жидкости в бесконечном вертикальном слое, на границах которого поддерживаются постоянные различные значения температуры. Уравнения конвекции и граничные условия в безразмерных переменных имеют вид [1]

$$(1.1) \quad -\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} + \Delta^2 \Psi - G \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{D(\Psi, \Delta \Psi)}{D(y, x)}$$

$$(1.2) \quad -\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{P} \Delta T = \frac{D(\Psi, T)}{D(y, x)}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \frac{D(f, g)}{D(y, x)} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y}$$

$$(1.3) \quad x = \pm 1, T = \pm 1, \Psi = \partial \Psi / \partial x = 0$$

$$y \rightarrow \pm \infty, |\Psi| < \infty, |T| < \infty$$

Здесь G — число Грасгофа, P — число Прандтля.

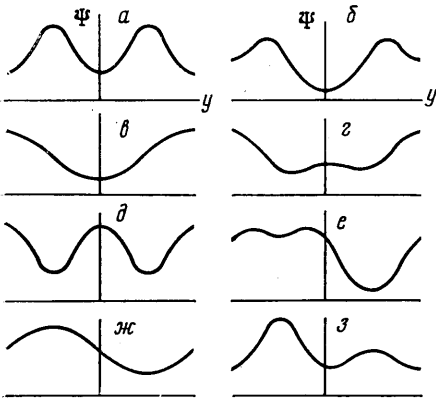
Неустойчивость решения $\Psi = G(1-x^2)^2/24$, $T = x$, описывающего плоскопараллельное течение, при $P < 12$ приводит к развитию стационарных вторичных течений. В работах [2, 3] методом сеток построены стационарные решения задачи (1.1)–(1.3), удовлетворяющие дополнительному условию периодичности по вертикальной координате:

$$(1.4) \quad \Psi(x, y+l, t) = \Psi(x, y, t), T(x, y+l, t) = T(x, y, t)$$

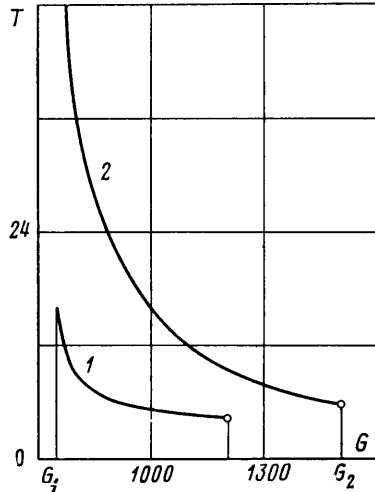
Длина расчетной области в [2, 3] изменялась в пределах $3,2 < l < 6$.

В настоящей работе задача (1.1)–(1.4) решается для больших значений l ($6 < l < 10$), при которых на длине расчетной области помещаются два

периода стационарного вторичного движения. Это позволяет изучить устойчивость стационарного движения по отношению к возмущениям с удвоенным периодом и получить новые типы движений. В п. 2 изложены результаты расчета движений методом сеток. П. 3 посвящен описанию нестационарных движений, получаемых при различных значениях параметров G, l методом Галеркина, изучается также влияние на эти движения случайных и регулярных внешних воздействий. В п. 4 приведены модельные уравне-



Фиг. 1



Фиг. 2

ния, позволяющие описать механизм возникновения нестационарных движений.

2. Согласно идее двухполевого метода [5], уравнение (1.1) заменялось системой

$$(2.1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Delta \varphi + G \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{D(\Psi, \varphi)}{D(y, x)}, \quad \Delta \Psi = -\varphi$$

Система (2.1), (1.2) записывалась в конечно-разностной форме с использованием равномерной пространственной сетки 16×35 . Расчет полей вихря скорости и температуры осуществлялся методом продольно-поперечной прогонки [6], причем вследствие периодических граничных условий (1.4) в вертикальном направлении применялись циклические прогонки [7]. Для аппроксимации вихря скорости на твердых границах использовались формулы, предложенные в [3]. Решение конечно-разностного аналога уравнения Пуассона производилось итерационным методом Либмана с последовательной верхней релаксацией (ПВР) [8]; итерации прекращались после достижения заданной относительной точности ϵ . В некоторых случаях для получения решения разностного уравнения Пуассона применялись также метод Банемана [9] и метод Гаусса.

При описании вторичных движений будем следить за профилем функции тока $\Psi(0, y)$, используя разложение этой функции в ряд Фурье:

$$(2.2) \quad \Psi(0, y, t) = \sum_p [a_p(t) \cos pky + b_p(t) \sin pky]$$

$$k = 2\pi/l$$

Приведем результаты расчетов при $P=1$, $l=8$. При $G < G_1 \approx 750$ устанавливается центрально-симметричное стационарное движение с периодом $l/2$, подобное исследованному в [2, 3]. Для этого движения в разложении (2.2) отличны от нуля только коэффициенты с четными p , причем подходящим выбором начала координат можно обратить все величины b_p в нуль. При этом еще остается произвол в знаке a_2 : если начало координат выбрано в центре вихря, то $a_2 > 0$, если в промежутке между вихрями, то $a_2 < 0$.

При $G > G_1$ жестко возбуждаются колебания с конечной амплитудой, примерно линейно зависящей от G . Происходящие в процессе колебаний изменения профиля функции тока $\Psi(0, y)$ (см. фиг. 1) могут быть интерпретированы следующим образом. Решения, соответствующие стационарным движениям с двумя вихрями, при $G > G_1$ становятся неустойчивыми, причем в окрестности стационарного решения с $a_2 < 0$ возмущение $a_1(t)$ нарастает, а $b_1(t)$ затухает, вблизи стационара с $a_2 > 0$ — наоборот, т. е. стационары становятся «седловыми точками». Вследствие этого на фоне двухвихревого движения с $a_2 < 0$ (фиг. 1, а) развивается возмущение a_1 (фиг. 1, б). При этом $|a_2|$ уменьшается до нуля, что приводит к перестройке движения в одновихревое (фиг. 1, в). Затем a_2 меняет знак, после чего $|a_1|$ начинает затухать и движение вновь становится двухвихревым, но с $a_2 > 0$ (фиг. 1, г, д). На его фоне нарастает величина b_1 , что приводит к повторной перестройке движения в одновихревое (фиг. 1, е, ж), а затем в двухвихревое с $a_2 < 0$ (фиг. 1, з). Отметим, что большую часть времени система проводит в окрестности седловых точек, т. е. течение является двухвихревым.

Численные эксперименты обнаружили сильную зависимость периода колебаний T от способа и погрешности ϵ решения уравнения Пуассона. С повышением точности в интервале $10^{-6} < \epsilon < 10^{-2}$ период возрастает примерно как $|\ln \epsilon|$. Значительное увеличение периода происходит при использовании вместо метода ПВР методов, обеспечивающих центральную симметрию решения: метода Гаусса (при $\epsilon = 10^{-3}$ период возрастает в 6 раз) и метода Банемана [9]. Объяснение зависимости периода колебаний от погрешности вычислительного метода (нарушения симметрии решения при применении процедуры последовательной верхней релаксации, ошибок округления) дается в следующем пункте, в котором изучается влияние шума с контролируемым статистическими характеристиками. На фиг. 2 представлены зависимости периода колебаний T от числа Грасгофа при применении метода ПВР с $\epsilon = 10^{-3}$ (кривая 1) и метода Банемана (кривая 2).

Описанный колебательный режим сохраняет устойчивость при увеличении G до значения G_2 (для случая применения метода Банемана $G_2 \approx 1500$). При $G > G_2$ наблюдается переход на другой режим течения, соответствующий решению в виде бегущей волны:

$$(2.3) \quad \Psi = \Psi_1(x, y+ct), \quad T = x + T_1(x, y+ct).$$

Решение (2.3) описывает волну, которая движется вниз, не меняя своей формы. Вследствие симметрии задачи (1.1)–(1.4) по отношению к преобразованию

$$(2.4) \quad x \rightarrow -x, \quad y \rightarrow -y, \quad T \rightarrow -T$$

одновременно с (2.3) решением является также

$$(2.5) \quad \Psi = \Psi_1(-x, -y+ct), \quad T = x - T_1(-x, -y+ct)$$

что соответствует волне, движущейся вверх. Фазовая скорость распространения волны убывает с ростом G . Области устойчивости колебаний и бегущих волн перекрываются в интервале $G_3 < G < G_2$ ($G_3 \approx 1000$).

3. Рассмотрим более детально вопрос о влиянии внешних воздействий на колебательное движение. Из сказанного выше видно, что существенное значение для описываемых явлений имеет взаимодействие первой и второй гармоник по продольной координате. При этом вблизи «седловой точки» порядок величин a_1, b_1 , соответствующих первой гармонике, оказывается значительно меньше величины a_2 . Между тем в методе сеток, оперирующем полями $\Psi(x, y), \varphi(x, y), T(x, y)$, вклады всех гармоник складываются в каждой точке сетки, вследствие чего невозможно проследить эволюцию первой гармоники в том случае, когда отношение амплитуд первой и второй гармоник становится меньше относительной погрешности округления. С целью разделения амплитуд гармоник для решения задачи (1.1) — (1.4) применен метод Галеркина (см., например, [10]).

Для простоты рассмотрим случай $P=0$ (при этом $T=x$). Чтобы уменьшить число нелинейных членов, в качестве базисных функций для Ψ выбирались линейные комбинации произведений тригонометрических функций, удовлетворяющие граничным условиям (1.3), (1.4) [11]. Применение метода Галеркина приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для коэффициентов разложения, зависящих от времени. При этом различные гармоники по продольной координате описываются независимыми переменными. Это дает возможность проследить за изменением амплитуд гармоник вплоть до машинного нуля (10^{-19} для ЭВМ М-220М). С целью анализа траектории системы в фазовом пространстве полученное решение представлялось в виде ряда Фурье

$$(3.1) \quad \Psi = \sum_n \sum_p [a_{np}^{(1)}(t) \cos n\pi x \cos pky + a_{np}^{(2)}(t) \sin n\pi x \sin pky + a_{np}^{(3)}(t) \cos n\pi x \sin pky + a_{np}^{(4)}(t) \sin n\pi x \cos pky].$$

Основные расчеты производились с 42 базисными функциями (см. [11]). Метод был предварительно опробован на расчете стационарных вторичных течений, изучавшихся в [3], и было установлено согласие результатов с точностью до нескольких процентов.

Опишем сначала результаты численных экспериментов, выполненных при $G=800$, $k_1 < k < k_2$, $k_1=0,78$, $k_2=0,86$. Сначала строилось стационарное решение, соответствующее центрально-симметричному движению, для которого на длине $0 < y < 2\pi/k$ помещаются два вихря; для этого решения

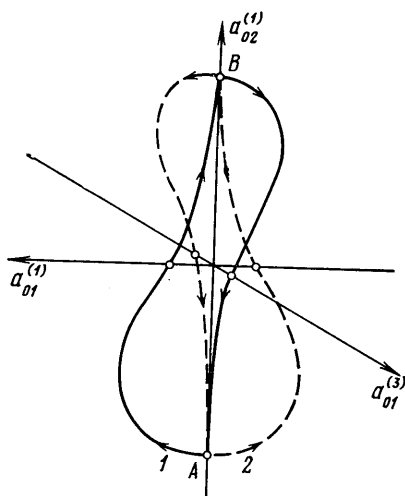
$a_{np}^{(3)} = a_{np}^{(4)} = 0$ при всех p , $a_{np}^{(1)} = a_{np}^{(2)} = 0$ при нечетных p . Как отмечалось в предыдущем пункте, существуют два таких решения, отличающиеся зна-

ком величины $a_{02}^{(1)}$ ($a_{02}^{(1)} = \pm a$), которые получают друг из друга сдвигом вдоль y на $l/4$. На полученный режим течения в некоторый момент времени накладывалось возмущение, содержащее нечетные гармоники.

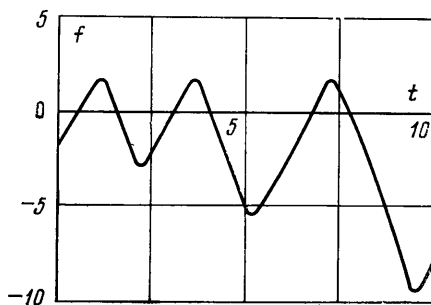
Установлено, что при $k < k_1$ стационарные двухвихревые движения устойчивы: любые малые возмущения затухают. В интервале $k_1 < k < k_2$ в окрестности решения с $a_{02}^{(1)} = a > 0$ для некоторой нормальной моды величина $a_{01}^{(3)}$ нарастает по экспоненциальному закону с инкрементом $\sigma_+ > 0$, а $a_{01}^{(1)}$ затухает ($\sigma_- < 0$); в окрестности решения с $a_{02}^{(1)} = -a < 0$ — наоборот. Если наложить на движение с $a_{02}^{(1)} = a$ малое возмущение $a_{01}^{(3)} \neq 0$, оставив $a_{01}^{(1)} = 0$, то это возмущение будет нарастать с инкрементом σ_+ , пока не до-

стигнет значений порядка 1, после чего вследствие взаимодействия гармоник $a_{02}^{(1)}$ меняет знак и приближается к $-a$, а $a_{01}^{(3)}$ экспоненциально затухает с инкрементом σ_- . В силу свойств симметрии уравнений $a_{01}^{(1)}$ остается равным нулю. Аналогично в случае возмущения $a_{01}^{(1)} \neq 0$, $a_{01}^{(3)} = 0$, наложенного на движение с $a_{02}^{(1)} = -a$, фазовая траектория притягивается к точке $a_{02}^{(1)} = a$, причем на всей траектории $a_{01}^{(3)} = 0$. Таким образом, обе седловые точки связаны между собой двоякоасимптотическими траекториями (см. фиг. 3).

Подчеркнем, что сепаратрисный контур, связывающий седловые точки, существует не при дискретных значениях параметра k , а во всем интервале $k_1 < k < k_2$. Его существование обусловлено инверсионной симметрией (2.4) рассматриваемой задачи, обеспечивающей сохранение инверсионной четности возмущения. Сколь угодно слабое нарушение симметрии системы (напри-



Фиг. 3



Фиг. 4

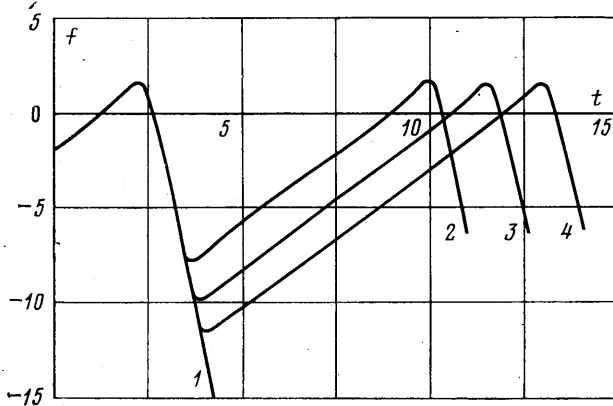
мер, вследствие погрешностей вычислительного метода) приводит к исчезновению сепаратрисного контура и к появлению предельного цикла.

Если в начальном возмущении отличны от нуля как $a_{01}^{(1)}$, так и $a_{01}^{(3)}$, то наблюдаются чередующиеся переходы между окрестностями обеих седловых точек. На фиг. 4 приведен график изменения со временем величины $f(t) = 1/2 \ln [(a_{01}^{(1)})^2 + (a_{01}^{(3)})^2]$ для $k=0,84$. Тангенс угла наклона восходящего участка кривой равен σ_+ , нисходящего — σ_- . Максимумы величины $f(t)$ примерно соответствуют моментам перестройки движения из двухвихревого в одновихревое и смены знака $a_{02}^{(1)}$. Следует отметить, что интервал времени между этими максимумами нарастает вследствие того, что $\sigma_- + \sigma_+ < 0$.

Действительно, пусть в момент перестройки движения $|a_{01}^{(1)}| \sim 1$, $|a_{01}^{(3)}| \sim \varepsilon_1 \ll 1$. После перестройки движения и изменения знака $a_{02}^{(1)}$ величина $|a_{01}^{(3)}|$ начинает нарастать и достигает значения порядка 1 за время $T_1 \sim -(\ln \varepsilon_1)/\sigma_+$. Однако за это время $|a_{01}^{(1)}|$ уменьшается до значения $\varepsilon_2 \sim \exp(\sigma_- T_1)$, поэтому следующая перестройка произойдет по прошествии времени $T_2 \sim -(\ln \varepsilon_2)/\sigma_+ = T_1(-\sigma_-)/\sigma_+ > T_1$. Таким образом, в отсутствие внешних воздействий «период» колебаний неограниченно нарастает, а траектория приближается к сепаратрисному контуру. В численных расчетах колебания продолжают-

ся до тех пор, пока величина убывающей гармоники не достигает машинного нуля, после чего траектория притягивается к стационарной точке.

Пусть теперь система подвержена слабым случайным внешним воздействиям; в этом случае экспоненциальное убывание амплитуды затухающей гармоники продолжается лишь до некоторого уровня, после чего ее значение флуктуирует с некоторым среднеквадратичным отклонением ϵ , определяемым интенсивностью внешнего воздействия, вплоть до момента перестройки движения. После этого амплитуда этой гармоники начинает нарастать и достигает значения порядка 1 за время $T \sim -(\ln \epsilon)/\sigma_+$. Поэтому



Фиг. 5

му при наличии шума (достаточно интенсивного, чтобы величина ϵ была больше машинного нуля) перестройки движения происходят через примерно равные промежутки времени, определяемые уровнем шума. Разброс значений величины T , связанный со случайным характером значения амплитуды, с которого начинается ее экспоненциальное нарастание, мал по сравнению с T вследствие того, что $|\ln \epsilon| \gg 1$. «Период» колебания включает в себя две перестройки и равен $2T$.

Для численного моделирования воздействия шума использовался датчик случайных чисел с нормальным распределением, описанный в [12]. На каждом шаге по времени к правым частям уравнений прибавлялись некоторые случайные числа из генеральной совокупности с нулевым математическим ожиданием и заданной дисперсией δ^2 . На фиг. 5 показано изменение величины $f(t)$ для $G=800$, $k=0,8$ в отсутствие шума (линия 1) и при наличии шума с $\delta=10^{-4}$, 10^{-3} и 10^{-2} (линии 2, 3, 4). Интервал времени между максимумами величин f линейно зависит от $|\ln \delta|$ в соответствии с вышеизложенным. Заметим, что после приближения к седловой точке A (см. фиг. 3) система с равной вероятностью возвращается к точке B по траекториям, близким к траекториям 1 и 2; таким образом, введение слабого шума приводит к полной непредсказуемости поведения системы.

Периодические колебания, как уже отмечалось, развиваются в системе также при наличии неслучайного воздействия, нарушающего инверсионную симметрию задачи. Так, если профиль температуры отклоняется от линейного и имеет четную по x составляющую (например, при наличии внутренних источников тепла), то двухвихревое вторичное движение и его нормальные возмущения содержат компоненты $a_{np}^{(i)}$ со всеми i . Как показывают численные эксперименты, график функции $f(t)$ имеет в этом случае качественно такой же вид, как и при наличии шума; минимум $f(t)$ и

период колебания определяются интенсивностью внутренних источников тепла.

Период колебаний, получаемый при применении метода сеток, определяется сочетанием обоих факторов: неслучайного нарушения симметрии при использовании метода последовательной верхней релаксации и случайного воздействия ошибок округления.

Перейдем теперь к рассмотрению бегущих волн, описанных в предыдущем пункте. При $G=800$ эти волны обнаружены в интервале $k_3 < k < k_4$, где $k_3=0,87$, $k_4=1,0$. Появление этих волн связано с неустойчивостью описанных в [2, 3] центрально-симметричных стационарных одновихревых движений, для которых $a_{np}^{(3)} = a_{np}^{(4)} = 0$ при всех n, p , по отношению к возмущениям, нарушающим инверсионную симметрию течения. Обратим внимание на то, что эта неустойчивость по линейной теории является монотонной [13], однако из-за того, что развивающееся вследствие этой неустойчивости движение не является центрально-симметричным, его частота отлична от нуля (она пропорциональна амплитуде моды), т. е. вместо стационарного движения развивается бегущая волна. При приближении к точке ветвления $k \rightarrow k_4$ амплитуда составляющей, нарушающей симметрию, и вместе с ней фазовая скорость волны c стремятся к нулю. Как уже отмечалось, при каждом G, k существуют два решения с фазовой скоростью $c = \pm |c|$. Для бегущих волн величины $I_{np} = (a_{np}^{(1)})^2 + (a_{np}^{(3)})^2$ при всех n, p не зависят от времени.

В узкой промежуточной области $k_2 < k < k_3$ устойчивым является решение, для которого величины $I_{np}(t)$ испытывают колебания со временем с некоторым периодом T_1 , отличным от периода бегущей волны T и примерно в 4 раза меньшим. При этом максимальное значение $I_{01}(t)$ слабо зависит от k , а минимальное быстро уменьшается с уменьшением k , приближаясь к нулю при $k \rightarrow k_2$; при этом T и T_1 неограниченно нарастают.

Такая же смена типов движения наблюдается при изменении k при $G=700$. Еще два типа движения, отличных от описанных в [2, 3], обнаружены при $G \approx 600$ в области $0,8 < k < 0,85$. Так, при $G=590$, $k=0,82$ реализуется центрально-симметричное стационарное движение с периодом $l=2\pi/k$, у которого на периоде помещается два вихря различной интенсивности. Это движение развивается вследствие неустойчивости обычного двухвихревого стационарного движения с периодом π/k по отношению к возмущениям с длиной волны $2\pi/k$, сохраняющим инверсионную симметрию. При $G=600$, $k=0,82$ обнаружены инверсионно-симметричные стоячие колебания, при которых интенсивности обоих вихрей периодически изменяются во времени в противофазе.

4. Описанные выше типы движений существенно связаны со взаимодействием возмущений с волновыми числами k и $2k$. Особенности ветвления в окрестности точки $k=k_*$, в которой пороговые числа $G_0(k)$ и $G_0(2k)$ равны, для задачи о вторичных движениях между вращающимися цилиндрами изучались в [14]. В [13] были выведены амплитудные уравнения, применимые при $k \approx k_*$, которые имеют вид

$$(4.1) \quad \begin{aligned} da_1/dt &= \sigma_1 a_1 + d_2 a_2 \bar{a}_1 \\ da_2/dt &= \sigma_2 a_2 + d_1 a_1^2 - \kappa |a_2|^2 a_2 \end{aligned}$$

Здесь a_1, a_2 — комплексные амплитуды возмущений с волновыми числами k и $2k$, σ_1, σ_2 — инкременты нарастания возмущений по линейной теории; о константах d_1, d_2, κ известно, что $d_1 d_2 < 0, \kappa > 0$.

Поле $\Psi(x, y)$ приближенно записывается в виде

$$\Psi = 2\text{Re} [a_1\varphi_1(x)e^{ihy} + a_2\varphi_2(x)e^{2ihy}]$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ — собственные функции линеаризованной задачи для возмущений основного течения с волновыми числами k и $2k$, соответствующих неустойчивой моде. Уравнения (4.1) получены в [13] в предположении о малости инкрементов σ_1 , σ_2 и имеют ограниченную область применимости. Тем не менее оказывается, что все описанные в предыдущих пунктах типы стационарных и нестационарных движений могут быть получены в рамках системы (4.1), поскольку области существования решений всех типов смыкаются в точке $k=k_*$, $G=G_0(k_*)$. По этой причине уравнения (4.1) могут рассматриваться как модельные уравнения, описывающие взаимодействие гармоник с волновыми числами k и $2k$.

Опишем типы предельных режимов для системы (4.1). Прежде всего система обладает двумя типами ненулевых стационарных решений:

$$(4.2) \quad a_1 = 0, \quad a_2 = (\sigma_2/\kappa)^{1/2} \exp(i\varphi)$$

$$(4.3) \quad a_1 = \left[\frac{\sigma_1}{d_1 d_2} \left(\sigma_2 - \frac{\kappa \sigma_1^2}{d_2^2} \right) \right]^{1/2} \exp(i\varphi)$$

$$a_2 = -(\sigma_1/d_2) \exp(2i\varphi)$$

Первый тип решений существует при $\sigma_2 > 0$ и соответствует стационарному двухвихревому движению с периодом π/k . Второй тип решений описывает движение с периодом $2\pi/k$. В зависимости от соотношения амплитуд a_1 и a_2 движение на длине $2\pi/k$ является одновихревым либо двухвихревым с различной амплитудой соседних вихрей. Область существования второго типа решений распадается на две части:

$$\sigma_1 > 0, \sigma_2 < \kappa \sigma_1^2 / d_2^2; \quad \sigma_1 < 0, \sigma_2 > \kappa \sigma_1^2 / d_2^2$$

К первой области относятся решения, полученные в [2, 3], ко второй — стационарное решение, описанное в конце предыдущего пункта ($G=590$, $k=0,82$).

Исследование устойчивости стационарных решений также может быть осуществлено на основе уравнения (4.1). Рассмотрим сначала случай $\sigma_1 < 0$. Введем обозначения

$$(4.4) \quad K = -\sigma_1/\sigma_2, \quad r = \kappa \sigma_1^2 / \sigma_2 d_2^2$$

Анализ устойчивости двухвихревого движения (4.2) по отношению к возмущениям a_1 дает выражение для инкрементов

$$(4.5) \quad \sigma_{\pm} = \sigma_1 (1 \pm r^{-1/2})$$

Отсюда видно, что движение (4.2) устойчиво только при $r > 1$. При $r < 1$ развивается движение (4.3), исследование устойчивости которого для центрально-симметричных возмущений дает выражение

$$(4.6) \quad \sigma_{\pm} = \frac{(1-3r) \pm \sqrt{(1-3r)^2 - 8K(1-r)}}{2K}$$

Анализ ветвления показывает, что при $r < 1/3$ мягко возбуждаются центрально-симметричные стоячие периодические колебания, подобные описанным в конце предыдущего пункта ($G=600$, $k=0,82$).

Для расчета конечно-амплитудных нестационарных движений осуществлялось численное интегрирование системы (4.1), которая посредством

введения вещественных переменных по формулам

$$a_1 = [\sigma_1 \delta_2 (1-r) / d_1 d_2]^{1/2} u \exp i\varphi$$

$$a_2 = (-\sigma_1 / d_2) (v + iw) \exp 2i\varphi, \quad \tau = -\sigma_1 t$$

приводилась к виду

$$du/d\tau = u(v-1)$$

$$(4.7) \quad Kdv/d\tau = v[1-r(v^2+w^2)] - u^2(1-r) + 2Kw^2$$

$$Kdw/d\tau = w[1-2Kv-r(v^2+w^2)]$$

(величина φ из уравнений исключается).

Численные эксперименты показывают, что при уменьшении параметра r стоячие колебания становятся неустойчивыми и развиваются описанные в п. 2, 3 нестационарные движения, связанные с переходами между окрестностями седловых точек (4.2) (см. рис. 3); при $k=0,5$ неустойчивость возникает при $r=0,29$.

При $\sigma_1 > 0$ движение (4.2), согласно (4.5), всегда неустойчиво. Решение (4.3) становится неустойчивым при выполнении условия $\sigma_1 + 2\sigma_2 > 0$ (члены высшего порядка по σ_1, σ_2 опускаем) по отношению к возмущениям, нарушающим инверсионную симметрию течения. Анализ ветвления и численное интегрирование уравнений показывает, что в этом случае развиваются бегущие волны с неизменными значениями $|a_1|, |a_2|$ и $\Delta = \arg a_2 - 2 \arg a_1$, описанные в предыдущих пунктах.

Авторы выражают благодарность Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкому и Д. В. Любимову за внимание к работе и полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1972.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Тарунин Е. Л. Вторичные стационарные конвективные движения в плоском вертикальном слое жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 5.
3. Тарунин Е. Л. О вторичных стационарных конвективных течениях в вертикальном слое. — В кн.: Гидродинамика, вып. 4. Пермь, 1972 (Пермск. ун-т, уч. зап., № 293).
4. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Сорокин Л. Е., Тарунин Е. Л. Вторичные колебательные конвективные движения в плоском вертикальном слое жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 1.
5. Том А., Эйпл К. Числовые расчеты полей в технике и физике. М.—Л.: Энергия, 1964.
6. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
7. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
8. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
9. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. М.: Мир, 1975.
10. Должанский Ф. В., Кляукин В. И., Обухов А. М., Чусов М. А. Нелинейные системы гидродинамического типа. М.: Наука, 1974.
11. Непомнящий А. А. О нестационарных вторичных конвективных движениях в вертикальном плоском слое. — В кн.: Конвективные течения, вып. 1. Пермь, 1979.
12. Ляшенко В. Ф. Программирование для цифровых вычислительных машин М-20, БЭСМ-3М, БЭСМ-4, М-220. М.: Сов. радио, 1967.
13. Непомнящий А. А. О типах неустойчивости вторичных конвективных течений в вертикальном слое. — В кн.: Конвективные течения и гидродинамическая устойчивость. Свердловск, 1979.
14. Андрейчиков И. П. Ветвление вторичных режимов движения жидкости между вращающимися цилиндрами. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 1.

Пермь

Поступила в редакцию
7.11.1980