

УДК 532.526

## ОБ АСИМПТОТИКЕ НЕЙТРАЛЬНЫХ КРИВЫХ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

МИХАЙЛОВ В. В.

Построены асимптотические схемы течения, соответствующие двум ветвям решения для кривой нейтральной устойчивости ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости. Получены двучленные асимптотические решения при числе Рейнольдса, стремящемся к бесконечности. Используется линейная постановка задачи, течение предполагается двумерным.

1. Рассмотрим двумерное ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости около плоской поверхности. Будем считать, что на основное стационарное течение наложены малые двумерные нестационарные возмущения. Предположим также, что характерный поперечный размер основного течения  $\delta$  много меньше продольного  $L$ , а малые нестационарные возмущения имеют характерную длину волны  $\lambda \ll L$ .

В этом случае на масштабе длины порядка  $\lambda$  основное течение можно считать плоскопараллельным с относительной погрешностью порядка  $\lambda/L$ . Линеаризованные относительно малых возмущений уравнения Навье — Стокса при сделанном допущении можно записать в следующем безразмерном виде:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{1}{\alpha \text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + V \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{1}{\alpha \text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Здесь  $V(y)$  — продольная скорость основного течения, отнесенная к  $V_0 = \lim_{y \rightarrow \infty} V$ ;  $u, v$  — малые добавки к продольной и поперечной скорости, отнесенные к  $V_0$  и  $V_0 \alpha$ ,  $p$  — возмущение давления, отнесенное к  $\rho V_0^2$  ( $\rho$  — плотность); значения продольной и поперечной координат  $x, y$  отнесены соответственно к  $\lambda$  и  $\delta$ ;  $\alpha = \delta/\lambda$ ;  $\text{Re} = \delta V_0/\nu$ ;  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости.

Будем считать, что основное течение соответствует течению в пограничном слое и поэтому  $\text{Re} \delta/L = O(1)$ . Отсюда получим

$$(\alpha \text{Re})^{-1} = O(\lambda/L) \ll 1$$

Таким образом, с той же относительной погрешностью, с которой основное течение считается плоскопараллельным, в случае  $\lambda \ll O(1)$  правыми частями (1.1) можно пренебречь в основной части течения и вязкость необходимо учитывать лишь в некоторых достаточно тонких слоях  $\Delta y < O(1)$ .

Уравнения (1.1) нетрудно привести к известному уравнению Орра — Зоммерфельда, если считать возмущения гармоническими. Однако заметим, что в тех слоях  $\Delta y$ , где вязкость газа существенна, правые части уравнений (1.1) допускают некоторые упрощения: в этих слоях с относительной погрешностью  $\alpha^2 \Delta y^2$  отбросим член  $\alpha^2 \partial^2 u / \partial x^2$  в первом уравнении и правую часть второго. Введем, кроме того, фазовую скорость распространения возмущений  $c$  и сделаем следующие замены:

$$\xi = x - ct, \quad W = V - c, \quad u = q(y) \exp(i\xi) \\ v = W(y) \tau(y) \exp(i\xi), \quad p = iR(y) \exp(i\xi)$$

Тогда из (1.1) будем иметь

$$(1.2) \quad W^2 \tau' + R = -i\epsilon^3 (W\tau)''' \\ \alpha^2 W^2 \tau + R' = 0$$

Здесь  $\epsilon^3 = (\alpha \text{Re})^{-1}$ , а штрихами обозначены производные по  $y$ .

Приняв, что  $p, u, v \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow \infty$  и  $u = v = 0$  при  $y = 0$ , для системы (1.2) получим следующие краевые условия:

$$\tau, R \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty; \quad \tau = \tau' = 0, \quad y = 0$$

2. Поскольку в большей части пограничного слоя влиянием вязкости можно пренебречь, из теоремы Рэлея, следует, что для профилей  $V(y)$  без точки перегиба критический слой, на котором  $W = 0$ , должен находиться на асимптотически малом расстоянии  $y_*$  от поверхности тела. При этом оценки порядков величин с помощью (1.2) дают  $\alpha = O(y_*) = o(1)$  и можно предположить существование двух асимптотических схем течения: а) схемы с тремя характерными зонами течения, б) схемы с пятью зонами. В дальнейшем соответствующие зоны, в которых влияние вязкости существенно или несущественно, будем для краткости называть «вязкими» или «невязкими». Рассмотрим структуру асимптотических схем а) и б), обозначив соответствующие зоны течения цифрами.

#### Схема а)

- 1 — невязкая зона с размером  $\Delta y_1 = O(1/\alpha)$  и  $W \approx 1 - c = \text{const}$
- 2 — основная невязкая часть пограничного слоя,  $\Delta y_2 = O(1)$ ,  $W = V - c$
- 3 — вязкая зона, примыкающая к поверхности тела,  $\Delta y_3 = O(\epsilon) = O(\alpha)$ ,  $W = O(\epsilon)$

#### Схема б)

- 1, 2 — зоны, аналогичные зонам 1, 2 в схеме а)
- 3 — вязкая зона вблизи критического слоя, отошедшего от поверхности тела,  $\Delta y_3 = O(\epsilon)$ ,  $W = O(\epsilon)$ ,  $\epsilon = o(\alpha)$
- 4 — невязкая зона между телом и зоной 3,  $\Delta y_4 = O(\alpha)$ ,  $W = O(\alpha)$
- 5 — вязкий пристеночный слой  $\Delta y_5 = o(\alpha)$ ,  $W = O(\alpha)$

Решение (1.2) в зоне 1 после соответствующей нормировки имеет вид

$$(2.1) \quad \tau = \exp(-\alpha y); \quad R = \alpha(1 - c)^2 \tau$$

В зоне 2 решение ищем в виде асимптотических рядов по малому параметру  $\alpha$

$$(2.2) \quad \tau = \tau_0 + \alpha \tau_1 + \alpha^2 \tau_2 + \dots; \quad R = \alpha R_1 + \alpha^2 R_2 + \dots$$

Краевые условия при  $y \rightarrow \infty$  для этого решения следуют из разложения по степеням  $\alpha$  соотношений (2.1).

Предположим, что в зоне 2 при  $y \rightarrow 0$  значение  $V$  разлагается в асимптотический ряд вида

$$(2.3) \quad V = a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 = O(\alpha^5), \quad y = O(\alpha)$$

Здесь  $a_3 = 0$ , если  $V$  соответствует течению в пограничном слое [1]. Тогда для  $y_*$  и  $c$  можем записать

$$(2.4) \quad y_* = \alpha y_1 + \dots, \quad c = a_1 y_1 \alpha + \dots$$

Из (1.2) с помощью (2.2) получим

$$(2.5) \quad \tau_0 = 1; \quad \tau_1 = \int_y^\infty (F^2 - 1) dy - y$$

$$R_1 = (1-c)^2; \quad R_2 = (1-c)^2 \left[ \int_y^\infty (F^2 - 1) dy - y \right]$$

$$F = W / (1-c)$$

Входящие в (2.5) интегралы сходятся при  $y \rightarrow \infty$ , если толщина вытеснения и толщина потери импульса конечны. Однако интеграл в соотношении для  $\tau_1$  расходится при  $y \rightarrow y_*$ .

Поэтому, выделяя эту особенность в явном виде, будем иметь

$$(2.6) \quad \tau^* = 1 + \frac{1}{a_1^2 \eta} + \frac{2a_2}{a_1^3} \alpha \ln \alpha + \alpha \left( B + \frac{2a_2}{a_1^3} \ln \eta + \frac{R_2^* - 4a_2 y_1 a_1^{-1}}{a_1^2 \eta} \right) + \dots$$

$$(2.7) \quad \tau^* = 1 + \frac{1}{a_1^2 \eta} + \alpha \left( B + \frac{R_2^*}{a_1^2 \eta} \right) + \alpha^2 \ln \alpha \frac{12y_1^2 a_4}{a_1^3} + \dots \quad \text{при } a_2 = 0$$

$$(2.8) \quad R^* = \alpha + \alpha^2 R_2^* + \dots; \quad R_2^* = D - 2a_1 y_1$$

$$B = \int_0^\infty \left( V^2 - \frac{1}{a_1^2 y^2} + \frac{2a_2}{a_1^3 y(1+y)} - 1 \right) dy; \quad D = \int_0^\infty (V^2 - 1) dy$$

Здесь  $\eta = (y - y_*) / \alpha$ ,  $y_1$  определяется из (2.4);

Из (2.6), (2.7) следует, что при  $y = O(\alpha)$  решение можно представить в виде

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \tau^* &= \tau_1^* + \alpha \ln \alpha \tau_2^* + \alpha \tau_3^* + \alpha^2 \ln \alpha \tau_4^* + \alpha^2 \tau_5^* + \\ &+ \alpha^3 \ln \alpha \tau_6^* + \alpha^3 \tau_7^* + \alpha^4 \ln \alpha \tau_8^* + \dots \\ R^* &= \alpha + \alpha^2 R_2^* + \alpha^3 R_3^* + \alpha^4 R_4^* + \dots \\ y_* &= \alpha y_1 + \alpha^2 \ln \alpha y_4 + \alpha^2 y_3 + \dots \end{aligned}$$

Из (1.2) с помощью разложений (2.3), (2.9), учитывая, что  $R_2^*$ ,  $R_3^*$ ,  $R_4^*$  можно считать в области 2 при  $y = O(\alpha)$  постоянными, получим

$$(2.10) \quad \tau_4^* = S_4(\eta); \quad \tau_5^* = S_5(\eta) + 2a_2 a_1^{-3} R_2^* - 6y_1 a_2 a_1^{-1} \ln \eta$$

В случае  $a_2 = 0$  следующие три члена разложения  $\tau^*$  имеют вид

$$(2.11) \quad \tau_6^* = \text{const}; \quad \tau_7^* = S_7(\eta) + 12y_1^2 a_4 a_1^{-3} \ln \eta; \quad \tau_8^* = \text{const}$$

Здесь  $S_i(\eta)$  — некоторые многочлены по целым степеням  $\eta$ , начиная со степени  $-1$  и выше.

3. Найдем решение в зоне 3 для случая а).

Введем разложения

$$(3.1) \quad \varepsilon^3 = \alpha^3 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \alpha \ln \alpha + \varepsilon_3 \alpha + \dots)$$

$$d\tau/d\eta = \varphi_1 + a_1^{-2} \eta^{-2} + \varphi_2 \alpha \ln \alpha + [\varphi_3 - a_1^{-2} \eta^{-2} (R_2^* - 4a_2 a_1^{-1} y_1)] \alpha + \dots$$

При  $a_2=0$  будем полагать  $\varepsilon_2 = \varphi_2 = 0$ , как это следует из условий (2.6) во внешней зоне 2.

Двучленное разложение  $W$  в зоне 3 имеет вид

$$W = \alpha \eta a_1 + \alpha^2 \eta a_2 (\eta + 2y_1) + \dots$$

Подставляя это соотношение вместе с разложением  $R^*$  в (1.2) найдем

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \eta^2 a_1 \varphi_1 &= -i \varepsilon_1 (\eta \varphi_1'' + 3\varphi_1') \\ \eta^2 a_1 \varphi_k &= -i \varepsilon_k (\eta \varphi_1'' + 3\varphi_1') - i \varepsilon_1 (\eta \varphi_k'' - 3\varphi_k') \end{aligned}$$

Здесь  $k=2$  при  $a_2 \neq 0$  и  $k=3$  при  $a_2=0$ . После замены переменных (3.2) преобразуются к виду

$$(3.3) \quad \begin{aligned} r^2 \sigma_1 &= -i (r \sigma_1'' + 3\sigma_1'), & r^2 (\sigma_k - \sigma_1 \varepsilon_k^\circ) &= -i (r \sigma_k'' + 3\sigma_k') \\ r &= a_1^{1/2} \varepsilon_1^{-1/2} \eta; & \varphi_i &= \bar{a}_1^{4/3} \varepsilon_1^{-7/3} \sigma_i \quad (i=1, 2, 3); & \varepsilon_k^\circ &= \varepsilon_k \varepsilon_1^{-1} \end{aligned}$$

Краевые условия, соответствующие сращиванию с решением в зоне 2, следуют из (3.1) и (2.6)

$$(3.4) \quad \sigma_1 \rightarrow 0, \quad \sigma_k \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty$$

Условия на поверхности тела вытекают из (1.3)

$$(3.5) \quad d\tau/d\eta = 0, \quad \eta = \eta_w = -y_*/\alpha$$

Учитывая разложение для  $y_*$  (2.8), получим

$$r_w = r_1 + r_2 \alpha \ln \alpha + r_3 \alpha + \dots$$

(В случае  $a_2=0$  значение  $r_2=0$ .)

Тогда из краевого условия (3.5), переходя к переменным  $r, \sigma$ , раскладывая решение  $\sigma(r_w)$  в ряд в точке  $r=r_1$ , будем иметь

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \sigma_1 &= r_1^{-2}; & \sigma_2 &= -r_2 (\sigma_1' + 2r_1^{-3}) & \text{при } a_2 \neq 0 \\ \sigma_1 &= r_1^{-2}; & \sigma_3 &= -r_3 (\sigma_1' + 2r_1^{-3} + R_2^* r_1^{-2}) & \text{при } a_2 = 0 \end{aligned}$$

Отметим, что значение  $\tau$  в зоне 2 действительно, откуда следует условие

$$\operatorname{Im} \int_{r_w}^{\infty} (\sigma_1 + \sigma_2 \alpha \ln \alpha + \sigma_3 \alpha + \dots) dr = 0$$

Нижний предел интегрирования (с необходимой для случая трехчленного разложения  $\sigma$  точностью) может быть заменен на  $r_1$ , так как  $\operatorname{Im} \sigma_1(r_1) = 0$ , что приводит к соотношению

$$(3.7) \quad \operatorname{Im} \int_{r_1}^{\infty} \sigma_1 dr = 0, \quad \operatorname{Im} \int_{r_1}^{\infty} \sigma_k dr = 0$$

При решении первого из уравнений (3.3) дополнительное условие (3.7) выполняется соответствующим подбором  $r_1$ , что и определяет значение этого параметра.

Решение второго уравнения системы (3.3) связано с решением первого соотношением

$$(3.8) \quad \sigma_k = C\sigma_1 - \varepsilon_k^\circ \sigma_1' r / 3$$

Здесь  $C$  — произвольная действительная постоянная, что вытекает из условий (3.7).

При этом соотношения (3.4) выполняются.

Для определения  $C$  и  $\varepsilon_k^\circ$  используем краевые условия (3.6). Решение для  $\sigma_1$  показывает, что при  $r=r_1$  значение  $\text{Im } \sigma_1' \neq 0$ . Поэтому, приравнивая вещественные и мнимые части  $\sigma_k$  из (3.6) и (3.8), получим

$$(3.9) \quad r_k = \varepsilon_k^\circ r_1 / 3; \quad C = -2\varepsilon_2^\circ / 3 \quad \text{при } a_2 \neq 0 \\ C = -2\varepsilon_3^\circ / 3 + R_2^* \quad \text{при } a_2 = 0$$

Значения  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_k^\circ$  найдем из условий сращивания с решением (2.6) в области 2. Для первого члена разложения (2.6), используя (3.1), имеем

$$\int_{\eta_1}^{\infty} \varphi_1 d\eta - a_1^{-2} \eta_1^{-1} = 1$$

Отсюда, переходя к  $\sigma$  и  $r$

$$(3.10) \quad \varepsilon_1^{1/3} = a_1^{-5/3} N, \quad N = \int_{r_1}^{\infty} \sigma_1 dr - r_1^{-1}$$

Для второго члена разложений (3.1) и (2.6)

$$\int_{\eta_1}^{\infty} \varphi_2 d\eta = 2a_2 a_1^{-3}$$

Переходя к  $\sigma$  и  $r$  и учитывая, что, согласно (3.8), (3.9), значение  $\sigma_2 = -\varepsilon_2^\circ [\sigma_1 + (r\sigma_1)'] / 3$ , получим

$$(3.11) \quad \int_{r_1}^{\infty} \sigma_2 dr = -\varepsilon_2^\circ N / 3, \quad \varepsilon_2^\circ = -6a_2 a_1^{-3}$$

Рассматривая аналогичным образом случай  $a_2 = 0$ , когда  $\varphi_2 = r_2 = 0$ , для  $\varepsilon_3^\circ$  будем иметь

$$(3.12) \quad \varepsilon_3^\circ = 3(R_2^* - B)$$

Согласно численным расчетам,  $N = 0,9993$ ,  $r_1 = -2,2972$ . Окончательно, вспоминая, что  $\varepsilon^3 = (\alpha \text{Re})^{-1}$ , и подставляя  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_k^\circ$  в (3.1), получим

$$(3.13) \quad \text{Re}^{-1} = 0,9979 a_1^{-5} \alpha^4 [1 - 6a_2 a_1^{-3} \alpha \ln \alpha + O(\alpha)], \quad a_2 \neq 0 \\ \text{Re}^{-1} = 0,9979 a_1^{-5} \alpha^4 [1 + 3(R_2^* - B)\alpha + O(\alpha^2 \ln \alpha)], \quad a_2 = 0$$

Значения  $R_2^*$  и  $B$  вычисляются из соотношений (2.8), при этом для  $R_2^*$  будем иметь

$$(3.14) \quad R_2^* = D + 2r_1 N a_1^{-1}$$

4. Найдем связь между  $\varepsilon$  и  $\alpha$  для схемы течения б) с отошедшим от поверхности тела критическим слоем.

В этом случае для удовлетворения условия на поверхности тела (1.3) необходимо знать решение в зоне 4, в которой вязкостью газа с погрешностью порядка  $(\varepsilon/\alpha)^3$  можно пренебречь.

Соотношения (2.6), (2.7), (2.10), (2.11) удовлетворяют уравнениям движения без учета вязкости, но входящие в эти выражения постоянные при переходе через критический слой к отрицательным значениям могут измениться. Если предположить, что случай нейтральных колебаний является предельным для затухающих ( $\text{Im } c = \text{Im } W < 0$ ) или возрастающих ( $\text{Im } c > 0$ ) колебаний, то при переходе через критический слой  $\ln |\eta|$  должен измениться соответственно на  $\pi i$  или  $-\pi i$ . Согласно работе [2], при предельном переходе необходимо использовать возрастающие колебания, т. е. в зоне 4 в соотношения (3.4), (3.5), (3.11), (3.12) войдет вместо  $\ln \eta$  выражение  $\ln |\eta| - \pi i$ , если  $a_1 > 0$ .

Учитывая, что на поверхности тела ( $y=0$ ) значение  $\eta_w = -y_*/\alpha$ , из разложения (3.10) получим

$$(4.1) \quad \eta_w = \eta_1 + \eta_2 \alpha \ln \alpha + \eta_3 \alpha + \dots$$

Значения  $\eta_i$  в (4.1) — действительные числа. Поэтому удовлетворить условию  $\tau_w = 0$  в каждом приближении можно, выбирая соответствующим образом значения  $\eta_i$  до тех пор, пока в разложениях для  $\tau$  не появятся мнимые величины.

Так, например

$$(4.2) \quad \eta_1 = -a_1^{-2}, \quad \eta_2 = 2a_2 a_1^{-5}$$

Выполнение указанного условия для комплексных значений коэффициентов разложения и обеспечение условия  $\tau' = 0$  при  $\eta = \eta_w$  требуют решения системы (1.2) в пристеночном пограничном слое. С помощью соотношений (2.6), (2.7), (2.10), (2.11) условие  $\tau_w = 0$  удовлетворяется при  $a_2 \neq 0$  до члена порядка  $\alpha$  и при  $a_2 = 0$  до члена порядка  $\alpha^3$ .

Учитывая этот факт, введем в пристеночном пограничном слое новые переменные, равные по порядку величины единице

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \gamma &= \tau/\alpha; & n &= (\eta - \eta_w)/\alpha; & \kappa &= \varepsilon^3/\alpha^5 & \text{при } a_2 \neq 0 \\ \gamma_0 &= \tau/\alpha^3; & n_0 &= (\eta - \eta_w)/\alpha^3; & \kappa_0 &= \varepsilon^3/\alpha^9 & \text{при } a_2 = 0 \end{aligned}$$

Тогда в пограничном слое

$$W = a_1(\eta_1 + \eta_2 \alpha \ln \alpha) \alpha + O(\alpha^2) \quad \text{при } a_2 \neq 0$$

$$W = a_1(\eta_1 + \eta_3 \alpha) \alpha + O(\alpha^3 \ln \alpha) \quad \text{при } a_2 = 0$$

Таким образом, если ограничиться двумя членами разложения, то значение  $W$  в пристеночном пограничном слое можно считать постоянным.

Так как значение  $R$  с необходимой точностью для двух членов разложения также постоянно, то для течения в пограничном слое получим

$$(4.4) \quad W_b^2 \gamma_b' + R_b = -i \kappa_b W_b \gamma_b''''$$

Здесь штрихами обозначены производные по  $n$  и  $n_0$ :

$$W_b = a_1(\eta_1 + \eta_2 \alpha \ln \alpha); \quad \gamma_b = \gamma_1 + \gamma_2 \alpha \ln \alpha$$

$$R_b = 1; \quad \kappa_b = \kappa_1 + \kappa_2 \alpha \ln \alpha \quad \text{при } a_2 \neq 0$$

Аналогично

$$W_b = a_1(\eta_1 + \eta_3 \alpha); \quad \gamma_b = \gamma_{10} + \gamma_3 \alpha$$

$$R_b = 1 + R_2^* \alpha; \quad \kappa_b = \kappa_{10} + \kappa_3 \alpha \quad \text{при } a_2 = 0$$

Решение (4.4), удовлетворяющее условиям  $\gamma_b = \gamma_b' = 0$  при  $n=0$  ( $n_0=0$ ) и  $\gamma_b''' \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , имеет вид

$$(4.5) \quad W_b^2 \gamma_b = -n + (1+i) \{ \exp [Qn(i-1)] - 1 \} (2Q)^{-1}$$

$$Q = W_b^{1/2} (2\kappa_b)^{-1/2}$$

Из (4.5) следует, что при  $n \rightarrow \infty$

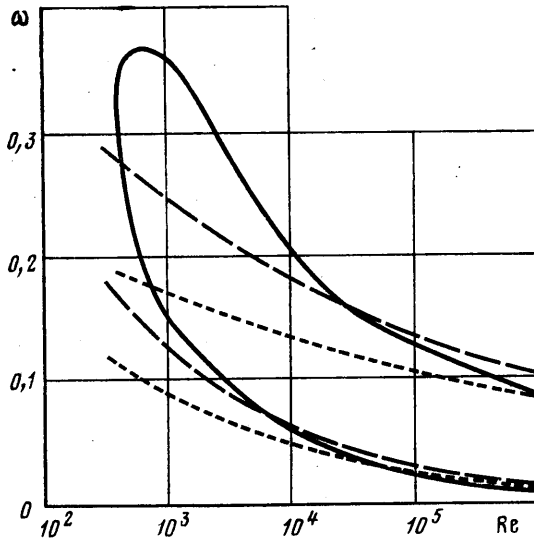
$$\text{Im } \gamma_b \rightarrow \sqrt{-\kappa_b / (2W_b^5)}$$

Ограничиваясь двухчленными разложениями, получим

$$\text{Im } \gamma_b \rightarrow \sqrt{-\frac{\kappa_1}{2a_1^5 \eta_1^5}} \left[ 1 + \left( \frac{\kappa_2}{\kappa_1} - 5 \frac{\eta_2}{\eta_1} \right) \frac{\alpha \ln \alpha}{2} \right] \text{ при } a_2 \neq 0$$

$$\text{Im } \gamma_b \rightarrow \sqrt{-\frac{\kappa_{10}}{2a_1^5 \eta_1^5}} \left[ 1 + \left( \frac{\kappa_3}{\kappa_{10}} - 5 \frac{\eta_3}{\eta_1} \right) \frac{\alpha}{2} \right] \text{ при } a_2 = 0$$

Для определения  $\kappa_1, \kappa_{10}, \kappa_2, \kappa_3$  используем условия сращивания с внешним решением в области 4, т. е. соотношения (2.6), (2.7), (2.10),



(2.11), в которых  $\ln \eta$  заменен на  $\ln |\eta| - i\pi$ . В случаях  $a_2 < 0$  или соответственно  $a_4 < 0$ , используя (4.2) и двухчленные разложения  $\kappa$  и  $\kappa_0$ , окончательно будем иметь

$$(4.6) \quad \text{Re}^{-1} = 8\pi^2 a_2^2 a_1^{-11} \alpha^6 [1 + 10a_2 a_1^{-3} \alpha \ln \alpha + O(\alpha)] \text{ при } a_2 \neq 0$$

$$\text{Re}^{-1} = 288\pi^2 a_4^2 a_1^{-19} \alpha^{10} [1 + (11R_2^* - 9B)\alpha + O(\alpha^2 \ln \alpha)] \text{ при } a_2 = 0$$

Значения  $R_2^*$  и  $B$  вычисляются с помощью (2.8), учитывая, что  $y_1 = -\eta_1 = a_1^{-2}$ .

5. Соотношения (3.13) и (4.6) определяют асимптотическое поведение кривых нейтральной устойчивости при числе  $\text{Re} \rightarrow \infty$ . Решения (3.13) соответствуют «нижней» ветви кривой нейтральной устойчивости, а решения (4.6) — «верхней». Отметим, что первые члены полученных выше асимптотических разложений, найденные ранее в работе [3] из уравне-

ний Орра — Зоммерфельда, полностью совпадают для соотношений (4.6) и отличаются менее чем на 1% от (3.13).

На фигуре приведен пример расчета асимптотики нейтральных кривых для профиля Блазиуса ( $\delta = \delta^*$ ,  $a_1 = 0,5714$ ;  $a_2 = 0$ ,  $a_4 = -0,12014$ ). В этом случае интегрирование (3.7) дало  $B = -3,006$ . Значение  $D$  было определено по известным значениям толщины вытеснения  $\delta^* = \delta$  и толщины потери импульса  $\delta^{**}$

$$D = -(1 + \delta^{**}/\delta^*)$$

Для нижней и верхней ветвей кривой нейтральной устойчивости в этом случае имеем соответственно

$$\alpha = 0,497 \text{Re}^{-1/4} (1 + 2,39 \text{Re}^{-1/4} + \dots)$$

$$\alpha = 0,340 \text{Re}^{-1/10} (1 + 0,91 \text{Re}^{-1/10} + \dots)$$

На фигуре штриховыми линиями показано двучленное решение, пунктирными — одночленное. Сплошной линией нанесено решение Толмина [1].

В заключение автор благодарит О. В. Денисенко за проведение численных расчетов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974, 711 с.
2. Линь Цзяцзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 194 с.
3. Lin C. C. On the stability of two-Dimensional parallel flows. Pt 3. Stability in a viscous fluid.— Quart. Appl. Math., 1946, v. 3, № 4, p. 277.

Москва

Поступила в редакцию  
3.I 1980