МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1981

УДК 532.51.013.4–2

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКИХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ БАРОТРОПНОЙ ЖИДКОСТИ

ГРИНФЕЛЬД М. А.

В работе [1] установлено, что, воспользовавшись законами сохранения энергии и вихря, можно установить достаточные условия устойчивости плоских криволинейных течений идеальной несжимаемой жидкости в точной нелинейной постановке. Ниже показано, что аналогичным образом могут быть установлены условия устойчивости плоских криволинейных стационарных течений идеальной баротропной жидкости в линейном приближении. Одно из этих условий по своему смыслу близко критерию Рэлея и его обобщению [1], другое есть условие дозвукового течения. Кроме того, устанавливается вариационный принцип и находится выражение для второй вариации соответствующего функционала, которые могут быть использованы для доказательства устойчивости этих течений в точной нелинейной постановке.

1. В отсутствие массовых сил уравнения плоских течений идеальной баротропной жидкости имеют следующий вид:

$$\frac{\partial v^\alpha}{\partial t}+v^\beta\nabla_\beta v^\alpha=-\frac{1}{\rho}\frac{dp(\rho)}{d\rho}\nabla^\alpha\rho \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla_\alpha(\rho v^\alpha)=0 \tag{1.2}$$

Здесь $v^\alpha(\xi^\beta, t)$, $\rho(\xi^\beta, t)$ — функции, задающие две компоненты скорости по базису системы отсчета и плотность в зависимости от эйлеровых координат ξ^α и времени t; $p(\rho)$ — зависимость давления баротропной жидкости от плотности. Греческие индексы пробегают значения 1, 2; символ ∇_α обозначает ковариантное дифференцирование на базе метрического тензора системы отсчета $g_{\alpha\beta}(\xi)$, с помощью которого также определяется операция опускания и поднятия индексов.

Предположим, что на неподвижной границе Γ области Σ, в которой находится жидкость, выполняется условие непротекания

$$v^\alpha|_\Gamma n_\alpha=0 \tag{1.3}$$

Здесь n_α — единичная нормаль к границе Γ. Под областью Σ понимается некоторое криволинейное кольцо либо область периодичности течения при рассмотрении периодических по длине течений в прямолинейном канале.

Из соотношений (1.1)—(1.3) следует закон сохранения энергии E и величины ω/ρ, где $\omega(\xi, t)$ — проекция ротора двумерного поля скорости на ось, перпендикулярную плоскости течения ($\varepsilon^{\alpha\beta}$ — дискриминантный тензор)

$$\frac{dE}{dt}=0, \quad E=\int_{\Sigma} d\Sigma\rho\left[\frac{v^\alpha v_\alpha}{2}+\int_{\rho^*} d\eta\frac{p(\eta)}{\eta^2}\right] \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\omega}{\rho}+v^\alpha\nabla_\alpha\frac{\omega}{\rho}=0, \quad \omega=\varepsilon^{\alpha\beta}\nabla_\beta v_\alpha \tag{1.5}$$

Из соотношений (1.2), (1.3), (1.5) вытекает, что при любой достаточно гладкой функции одной переменной Φ, определенной при всех значениях ω/ρ (в силу (1.5) область значений этой величины не изменяется во времени), выполняется соотношение

$$\frac{d}{dt}\int_{\Sigma} d\Sigma\rho\Phi\left(\frac{\omega}{\rho}\right)=0 \tag{1.6}$$

2. Рассмотрим некоторое стационарное решение системы (1.1)–(1.3) — $v_0^\alpha(\xi)$, $\rho_0(\xi)$. Соотношения (1.1), (1.2), (1.5) в этом случае принимают вид

$$v_0^\beta\nabla_\beta v_0^\alpha=-\frac{1}{\rho}\frac{dP(\rho_0)}{d\rho}\nabla^\alpha\rho_0 \tag{2.1}$$

$$\nabla_\alpha(\rho_0 v_0^\alpha)=0 \tag{2.2}$$

$$v_0^\alpha\nabla_\alpha\frac{\omega_0}{\rho_0}=0, \quad \omega_0=\varepsilon^{\alpha\beta}\nabla_\beta v_{0\alpha} \tag{2.3}$$

Из соотношения (2.2) следует, что для плоского стационарного течения может быть введена функция тока $\psi(\xi^\beta)$ по формуле

$$\psi(\xi)=\int_{\gamma} d\gamma\rho_0 v_0^\alpha\nu_\alpha \tag{2.4}$$

где γ — любая кривая, соединяющая точку ξ^β внутри области Σ с любой точкой одной из компонент границы Γ; ν_α — компоненты единичной нормали к кривой γ (предполагается, что кривая отнесена к естественному параметру — длине дуги). Функция ψ дает расход жидкости через кривую γ в стационарном течении. Воспользовавшись соотношениями $\gamma^\alpha=\varepsilon^{\beta\alpha}\nu_\beta$, $\nu_\beta=\varepsilon_{\beta\alpha}\gamma^\alpha$, где γ^α — единичный касательный вектор к кривой γ, приведем (2.4) к виду

$$\psi(\xi)=\int_{\gamma} d\gamma\gamma^\beta\rho_0 v_0^\alpha\varepsilon_{\alpha\beta}=\int_{\gamma} d\xi^\beta\rho_0 v_0^\alpha\varepsilon_{\alpha\beta} \tag{2.5}$$

По известной формуле анализа из соотношения (2.5) следует

$$\nabla_\beta\psi=\varepsilon_{\alpha\beta}\rho_0 v_0^\alpha, \quad \rho_0 v_0^\alpha=\varepsilon^{\alpha\beta}\nabla_\beta\psi \tag{2.6}$$

Используя (2.6), немедленно получаем

$$v_0^\beta\nabla_\beta\psi=0 \tag{2.7}$$

Свертывая соотношение (2.1) с $v_{0\alpha}$, после небольших преобразований получим

$$v_0^\beta\nabla_\beta\left[\frac{v_0^\alpha v_{0\alpha}}{2}+\int_{\rho^*}^{\rho_0} d\eta\frac{p'(\eta)}{\eta}\right]=0 \tag{2.8}$$

С рассматриваемым стационарным течением $v_0^\alpha(\xi^\beta)$ свяжем естественную систему координат (s, h), так чтобы векторное поле v_0^α касалось координатных линий $h=\mathrm{const}$; обозначим соответствующие функции через $\xi^\alpha=\xi^\alpha(s, h)$, $h=h(\xi^\alpha)$, $s=s(\xi^\alpha)$. Из соотношений (2.3), (2.7), (2.8) следует

$$\psi(\xi(s,h))=\pi(h), \quad \frac{\omega_0}{\rho_0}(\xi(s,h))=\chi(h) \tag{2.9}$$

$$\frac{v_0^\alpha v_{0\alpha}(\xi(s,h))}{2}+\int\limits_{\rho^*}^{\rho_0(\xi(s,h))} d\eta\frac{p'(\eta)}{\eta}=f(h)$$

Функции χ, π, f связаны между собой $f'(h)=\chi(h)\pi'(h)$ (эта связь напоминает использованную в работе [2])

Действительно, с помощью (2.1), (2.6), (2.9) имеем

$$f'(h)=v_0^\alpha\nabla_\beta v_{0\alpha}\frac{\partial\xi^\beta(s,h)}{\partial h}+\frac{p'(\rho_0)}{\rho_0}\nabla_\beta\rho_0\frac{\partial\xi^\beta(s,h)}{\partial h}= \tag{2.10}$$

$$=\frac{\partial\xi^\beta(s,h)}{\partial h}(v_0^\alpha\nabla_\beta v_{0\alpha}-v_0^\alpha\nabla_\alpha v_{0\beta})=\frac{\partial\xi^\beta(s,h)}{\partial h}v_0^\alpha\varepsilon_{\alpha\beta}\omega_0=$$

$$=\frac{\omega_0}{\rho_0}\frac{\partial\xi^\beta(s,h)}{\partial h}\varepsilon^{\alpha\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta}\nabla_\gamma\psi=\chi(h)\pi'(h)$$

3. Рассмотрим функционал φ, определяемый на парах функций (v^α,ρ)

$$\varphi(v^\alpha,\rho)=\int\limits_\Sigma d\Sigma\rho\left[\frac{v^\alpha v_\alpha}{2}+\int\limits_{\rho^*}^{\rho}d\eta\frac{p(\eta)}{\eta^2}+\Phi\left(\frac{\omega}{\rho}\right)\right] \tag{3.1}$$

где Φ — некоторая достаточно гладкая функция одной переменной. В силу соотношений (1.4), (1.6) функционал φ есть интеграл уравнений (1.1)–(1.3).

Под вариацией k-го порядка функционала φ в точке (v_0^α,ρ_0) будет пониматься коэффициент при ε^k в разложении $\varphi(v_0^\alpha+\varepsilon V^\alpha,\rho_0+\varepsilon M)$ в ряд по степеням ε. Первую вариацию этого функционала в любой точке (v_0^α,ρ_0) можно представить в виде

$$\delta\varphi=\int\limits_\Sigma d\Sigma\left\{M\left[\frac{v_0^\alpha v_{0\alpha}}{2}+\int\limits_{\rho^*}^{\rho_0}d\eta\frac{p'(\eta)}{\eta}+\Phi\left(\frac{\omega_0}{\rho_0}\right)-\Phi'\left(\frac{\omega_0}{\rho_0}\right)\frac{\omega_0}{\rho_0}\right]+\right. \tag{3.2}$$

$$\left.+\rho_0v_0^\alpha V_\alpha+\Phi'\left(\frac{\omega_0}{\rho_0}\right)\varepsilon^{\alpha\beta}\nabla_\beta V_\alpha\right\}$$

Интегрируя последний член в соотношении (3.2) по частям, получаем

$$\delta\varphi=\int\limits_\Sigma d\Sigma\left\{M\left[\frac{v_0^\alpha v_{0\alpha}}{2}+\int\limits_{\rho^*}d\eta\frac{p'(\eta)}{\eta}-\Phi'\left(\frac{\omega_0}{\rho_0}\right)\frac{\omega_0}{\rho_0}+\Phi\left(\frac{\omega_0}{\rho_0}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+V_\alpha\left[\rho_0v_0^\alpha-\Phi''\left(\frac{\omega_0}{\rho_0}\right)\varepsilon^{\alpha\beta}\nabla_\beta\frac{\omega_0}{\rho_0}\right]\right\}+\int\limits_\Gamma d\Gamma\Phi'\left(\frac{\omega_0}{\rho_0}\right)\varepsilon^{\alpha\beta}V_\alpha n_\beta \tag{3.3}$$

Будем теперь считать, что функции (v_0^α,ρ_0) суть решения стационарных уравнений гидродинамики идеальной баротропной жидкости. Воспользовавшись (2.6), (2.9), (3.3), выражение для первой вариации функционала φ представим в виде

$$\delta\varphi=\int\limits_\Sigma d\Sigma\left\{M[f(h)-\Phi_\chi'(\chi(h))\chi(h)+\Phi(\chi(h))]+\right. \tag{3.4}$$

$$\left.\left.+V_\alpha\varepsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial h(\xi)}{\partial\xi^\beta}[\pi'(h)-\Phi_{\chi\chi}''(\chi(h))\chi'(h)]\right\}\right|_{h=h(\xi^\alpha)}+$$

$$+\int\limits_\Gamma d\Gamma e^\alpha V_\alpha\Phi_\chi'(\chi(h))|_\Gamma$$

При преобразовании граничного интеграла в соотношении (3.3) было использовано условие, что объект $e^\alpha=\varepsilon^{\alpha\beta}n_\beta$ есть единичный касательный вектор к границе Г, а величина $\Phi_\chi'(\chi(h))$ постоянна на каждой компоненте границы (ясно, что в соотношениях (3.3), (3.4) подразумевается суммирование по всем компонентам границы).

Предположим, что функция $\Phi(\chi)$ удовлетворяет соотношению

$$f(h)-\Phi_\chi'(\chi(h))\chi(h)+\Phi(\chi(h))\equiv 0 \tag{3.5}$$

Тогда в силу связи (2.10), если $\chi(h)$ не имеет точек сгущения нулей, будет выполняться также соотношение

$$\pi'(h)=\Phi_{\chi\chi}''(\chi(h))\chi'(h) \tag{3.6}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно продифференцировать (3.5) по h. Такая функция $\Phi(\chi)$ заведомо существует, если ω_0/ρ_0 монотонна. Легко проверить, что таковой является функция

$$\Phi(\chi)=\int_{\chi_0}^{\chi} d\eta\Pi(\eta)+\chi_0\Pi(\chi_0)-F(\chi_0),\quad F(\chi(h))\equiv f(h),\quad \Pi(\chi(h))\equiv\pi(h) \tag{3.7}$$

Величина χ_0 есть $\chi(h_0)$, где h_0 — координата, соответствующая одной из компонент границы кольца.

Комбинируя (2.10) с условием $\chi'(h)\neq 0$, получаем

$$F'(\chi)=\chi\Pi(\chi),\quad F(\chi)-F(\chi_0)=\chi\Pi(\chi)-\int_{\chi_0}^{\chi} d\eta\,\Pi(\eta)-\chi_0\Pi(\chi_0) \tag{3.8}$$

Комбинируя (3.7), (3.8), убеждаемся, что с помощью единственной функции (3.7) можно удовлетворить двум уравнениям (3.5), (3.6)

$$f(h)-\Phi_\chi'(\chi(h))\chi(h)+\Phi(\chi(h))\equiv F(\chi(h))-\Pi(\chi(h))\chi(h)+$$
$$+\int_{\chi_0}^{\chi} d\eta\,\Pi(\eta)+\chi(h_0)\Pi(\chi(h_0))-F(\chi)\equiv 0$$

$$\pi'(h)-\Phi_{\chi\chi}''(\chi(h))\chi'(h)\equiv\Pi_\chi'(\chi(h))\chi'(h)-\Pi_\chi'(\chi(h))\chi'(h)\equiv 0$$

Прямым вычислением нетрудно найти следующее выражение для второй вариации функционала φ в стационарной точке:

$$\delta^2\varphi=\int_\Sigma d\Sigma\rho_0\left[\left(\frac{v_0^\alpha}{\rho_0}M+V^\alpha\right)\left(\frac{v_{0\alpha}}{\rho_0}M+V_\alpha\right)+\frac{p'(\rho_0)-v_0^\alpha v_{0\alpha}}{\rho_0^2}M^2+\right.$$
$$\left.+\Phi''\left(\frac{\omega_0}{\rho_0}\right)\left(\frac{1}{\rho_0}\varepsilon^{\alpha\beta}\nabla_\beta V_\alpha-\frac{\omega_0}{\rho_0^2}M\right)^2\right] \tag{3.9}$$

Согласно работе [1], при наличии вариационного принципа формулой для второй вариации можно воспользоваться при доказательстве устойчивости по Ляпунову стационарного течения идеальной жидкости в точной нелинейной постановке.

4. Ограничимся исследованием устойчивости стационарных течений по линейному приближению. В дальнейшем $V^\alpha(\xi, t)$, $M(\xi, t)$ — малые отклонения полей скорости и плотности от значений $v_0^\alpha(\xi)$, $\rho_0(\xi)$, удовлетворяющих нелинейным уравнениям стационарного течения (2.1), (2.2).

Линеаризуем соотношения (1.1)–(1.3), (1.5) в окрестности стационарного течения

$$\frac{\partial V^\alpha}{\partial t}+v_0^\beta\nabla_\beta V^\alpha+V^\beta\nabla_\beta v_0^\alpha=-\nabla^\alpha\frac{p'(\rho_0)}{\rho_0}M, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial M}{\partial t}+\nabla_\alpha(\rho_0V^\alpha+Mv_0^\alpha)=0,\quad V^\alpha|_\Gamma n_\alpha=0 \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_0\Omega-\omega_0M}{\rho_0^2}\right)+v_0^\alpha\nabla_\alpha\left(\frac{\rho_0\Omega-\omega_0M}{\rho_0^2}\right)+V^\alpha\nabla_\alpha\frac{\omega_0}{\rho_0}=0 \tag{4.3}$$

Пусть течение v_0^α, ρ_0 таково, что существует функция $\Phi(\chi)$, удовлетворяющая условиям (3.5)–(3.6). В этом случае уравнения (4.1)–(4.2) имеют интеграл (ср. с соотношением (3.9))

$$I=\int_\Sigma d\Sigma\rho_0\left[\left(\frac{v_0^\alpha}{\rho_0}M+V^\alpha\right)\left(\frac{v_{0\alpha}}{\rho_0}M+V_\alpha\right)+\frac{p'(\rho_0)-v_0^\alpha v_{0\alpha}}{\rho_0^2}M^2+\right. \tag{4.4}$$
$$\left.+\Phi''\left(\frac{\omega_0}{\rho_0}\right)\left(\frac{\rho_0\Omega-\omega_0M}{\rho_0^2}\right)^2\right],\quad \Omega=\varepsilon^{\alpha\beta}\nabla_\beta V_\alpha$$

Действительно, воспользовавшись соотношениями (2.6), (4.1)–(4.3), последовательно получаем

$$\frac{dI}{dt}=2\int_\Sigma d\Sigma\,\rho_0\left[\left(\frac{v_0^\alpha}{\rho_0}M+V^\alpha\right)\left(\frac{v_{0\alpha}}{\tilde\rho_0}\frac{\partial M}{\partial t}+\frac{\partial V_\alpha}{\partial t}\right)+\right. \tag{4.5}$$
$$\left.+\frac{1}{\rho_0^2}(p'(\rho_0)-v_0^\alpha v_{0\alpha})M\frac{\partial M}{\partial t}+\Phi''\left(\frac{\omega_0}{\rho_0}\right)\frac{\rho_0\Omega-\omega_0M}{\rho_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\beta_0\Omega-\omega_0M}{\rho_0^2}\right]=$$
$$=-2\int_\Sigma d\Sigma\,\rho_0\left\{\left(\frac{v_0^\alpha}{\rho_0}M+V^\alpha\right)\left[\frac{v_{0\alpha}}{\rho_0}\nabla_\beta(\rho_0V^\beta+Mv_0^\beta)+v_0^\beta\nabla_\beta V_\alpha+\right.\right.$$
$$\left.+V^\beta\nabla_\beta v_{0\alpha}+\nabla_\alpha\frac{p'(\rho_0)}{\rho_0}M\right]+\frac{p'(\rho_0)-v_0^\alpha v_{0\alpha}}{\rho_0^2}M\nabla_\beta(\rho_0V^\beta+Mv_0^\beta)+$$
$$\left.+\psi'\left(\frac{\omega_0}{\rho_0}\right)\frac{\rho_0\Omega-\omega_0M}{\rho_0^2}\left(v_0^\alpha\nabla_\alpha\frac{\rho_0\Omega-\omega_0M}{\rho_0^2}+V^\alpha\nabla_\alpha\frac{\omega_0}{\rho_0}\right)\right\}=$$
$$=-2\int_\Sigma d\Sigma\,\rho_0\left[\left(\frac{v_0^\alpha}{\rho_0}M+V^\alpha\right)(v_0^\beta\nabla_\beta V_\alpha+V^\beta\nabla_\beta v_{0\alpha})+\right.$$
$$\left.+V^\alpha\frac{v_{0\alpha}}{\rho_0}\nabla_\beta(\rho_0V^\beta+Mv_0^\beta)+\frac{\rho_0\Omega-\omega_0M}{\rho_0^2}V^\alpha\varepsilon_{\beta\alpha}\rho_0v_0^\beta\right]$$

Последний член в соотношении (4.5) преобразуем следующим образом:

$$\frac{\rho_0\Omega-\omega_0M}{\rho_0}V^\alpha v_0^\beta\varepsilon_{\beta\alpha}=V^\alpha v_0^\beta\left(\nabla^\omega V^\pi-\frac{M}{\rho_0}\nabla^\omega v_0^\pi\right)\varepsilon_{\pi\omega}\varepsilon_{\beta\alpha}=$$
$$=V^\alpha v_0^\beta\left(\nabla^\omega V^\pi-\frac{M}{\rho_0}\nabla^\omega v_0^\pi\right)(g_{\beta\pi}g_{\alpha\omega}-g_{\beta\omega}g_{\alpha\pi})= \tag{4.6}$$
$$=V^\alpha v_0^\beta\left[\nabla_\alpha V_\beta-\nabla_\beta V_\alpha-\frac{M}{\rho_0}(\nabla_\alpha v_{0\beta}-\nabla_\beta v_{0\alpha})\right]$$

При получении соотношения (4.6) было использовано тождество $\varepsilon_{\pi\omega}\varepsilon_{\beta\alpha}=g_{\pi\beta}g_{\omega\alpha}-g_{\omega\beta}g_{\pi\alpha}$.

Подставляя (4.6) в (4.5), интегрируя по частям и приводя подобные члены, приходим к требуемому соотношению $dI/dt=0$.

Предположим, что функции ρ_0, v_0^α непрерывны в замкнутой области $\Sigma\cup\Gamma$, величина ω_0/ρ_0 монотонно меняется поперек линий тока и выполняется соотношение $\rho_0\geqslant a>0$. Пусть, кроме того, выполняются условия

$$(4.7)\qquad 0<b_1\leqslant\Phi''\left(\frac{\omega_0}{\rho_0}\right)\leqslant b_2<\infty,\quad 0<c_1\leqslant p'(\rho_0)-v_0^\alpha v_{0\alpha}\leqslant c_2<\infty$$

где b_1, b_2, c_1, c_2 — некоторые константы.

Тогда в каждой точке ξ^α подынтегральное выражение функционала I есть положительно определенная квадратичная форма переменных V^α, M, Ω, а собственные значения соответствующей матрицы коэффициентов суть положительные числа. Учитывая непрерывность коэффициентов формы на замкнутом множестве $\Sigma\cup\Gamma$, нетрудно получить оценку

$$(4.8)\qquad d_1\int\limits_\Sigma d\Sigma(g_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta+M^2+\Omega^2)\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_\Sigma d\Sigma\rho_0\left[\left(\frac{v_0^\alpha}{\rho_0}M+V^\alpha\right)\left(\frac{v_{0\alpha}}{\rho}M+V_\alpha\right)+\frac{p'(\rho_0)-v_0^\alpha v_{0\alpha}}{\rho^2}M^2+\right.$$

$$\left.+\Phi''\left(\frac{\omega_0}{\rho_0}\right)\left(\frac{\rho_0\Omega-\omega_0M}{\rho_0^2}\right)^2\right]\leqslant d_2\int\limits_\Sigma d\Sigma(g_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta+M^2+\Omega^2)$$

где d_1, d_2 — некоторые положительные константы. Для получения оценки (4.10) следует воспользоваться оценкой квадратичной формы

$$\lambda_1\sum_i^N x_i^2\leqslant\sum_{i,j}^N A^{ij}x_ix_j\leqslant\lambda_N\sum_i^N x_i^2$$

через минимальное λ_1 и максимальное λ_N собственные значения матрицы A^{ij}.

В силу соотношений (4.8) интеграл I удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к функции Ляпунова, для доказательства устойчивости нулевого решения линеаризованной системы (4.1), (4.2) по норме

$$(4.9)\qquad \|(V^\alpha,M)\|^2=\int\limits_\Sigma d\Sigma[g_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta+M^2+(\varepsilon^{\alpha\beta}\nabla_\beta V_\alpha)^2]$$

Первое из условий (4.7) обобщает условие Рэлея и В. И. Арнольда на случай плоских криволинейных течений идеальной баротропной жидкости; второе из условий (4.7) есть условие, что поле (v_0^α,ρ_0) — дозвуковое.

5. Рассмотрим плоскопараллельное стационарное течение идеальной баротропной жидкости в бесконечном канале с прямолинейными стенками $z=0$ и $z=l$:

$$(5.1)\qquad v_{0x}=u(z),\quad v_{0z}=0,\quad \rho_0=\mathrm{const}$$

Ось x направлена вдоль оси канала, ось z — перпендикулярно оси. Легко видеть, что так выбранные функции удовлетворяют уравнениям стационарного течения баротропной жидкости при любой зависимости давления от плотности. Пусть рассматриваемые течения имеют период L.

В рассматриваемом случае координату h (см. п. 2) можно отождествить с координатой z. Согласно (2.6), (2.9), (5.1), имеем

$$u(z)=\frac{1}{\rho_0}\pi'(z),\qquad \chi(z)=\frac{1}{\rho_0}u'(z) \tag{5.2}$$

Сопоставляя соотношения (3.6), (5.2), в отсутствие точки перегиба ($u''(z)\neq 0$) получим

$$\Phi''\left(\frac{\omega_0}{\rho_0}(z)\right)=\rho_0^2\frac{u(z)}{u''(z)} \tag{5.3}$$

Используя (5.1), (5.3), интеграл (4.5) в рассматриваемом случае можно представить в виде

$$I=\int_0^l\int_0^L dx\,dz\,\rho_0\left[\left(\frac{u}{\rho_0}M+V^1\right)^2+(V^2)^2+\frac{p'(\rho_0)-u^2}{\rho_0^2}M^2+\right. \tag{5.4}$$

$$\left.+\frac{1}{\rho_0^2}\frac{u(z)}{u''(z)}(\rho_0\Omega-u'(z)M)^2\right]$$

Используя интеграл (5.4), заключаем, что течение без точки перегиба вида (5.1) будет устойчивым в линейном приближении по норме (4.9), если найдется инерциальная система координат, в которой знак скорости совпадает со знаком второй производной скорости по вертикали, а само течение всюду дозвуковое (в смысле выполнения в этой системе координат второго условия (4.9)).

Автор выражает искреннюю признательность В. Л. Бердичевскому и А. Г. Куликовскому за конструктивные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В. И.* Об условиях нелинейной устойчивости плоских стационарных криволинейных течений идеальной жидкости.– Докл. АН СССР, 1965, т. 162, № 5.
2. *Дикий Л. А.* К нелинейной теории гидродинамической устойчивости.– ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.

Москва

Поступила в редакцию 15.I.1980