ЛИТЕРАТУРА

1. *Киселев О. М., Рапопорт Э. Ф.* О струйном обтекании упругой пластины.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 4, с. 35.
2. *Киселев О. М., Рапопорт Э. Ф.* О струйном обтекании упругой оболочки.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 2, с. 24.
3. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963, 635 с.

Казань

Поступила в редакцию
11.II.1980

УДК 532.527.013.4

К УСТОЙЧИВОСТИ ВСТРЕЧНЫХ ПОТОКОВ

АРЫШЕВ Ю. А., ГОЛОВИН В. А., ЕРШИН Ш. А.

При взаимодействии встречных потоков область критической точки характеризуется существенным искривлением линий тока. Выпуклость последних обращена в сторону особой точки, в направлении к которой происходит уменьшение модуля вектора скорости. Подобная ситуация типична для тейлор-гертлеровской неустойчивости и поэтому правомерно ожидать проявление ее в зоне встречи потоков. Отметим, что свободные течения жидкости и газа с аналогичным характером искривления линий тока распространены достаточно широко. В частности, это имеет место в некоторых случаях, так называемых антипараллельных движений. В качестве примера на фиг. 1 показаны две возможные схемы встречной формы взаимодействия: встречные (фиг. 1, *а*) и антипараллельные потоки (фиг. 1, *б*). Пунктиром показана начальная ориентация «пробного» вихря.

Несмотря на значительное количество работ, посвященных вопросам исследования различных случаев вторичных движений, возбуждаемых в потоках с сильным искривлением линии тока [1–4], задача устойчивости встречных потоков, по-видимому, не рассматривалась. Сложность изучения состоит в существенной неодномерности течения и связана с необходимостью учета по крайней мере двух составляющих вектора скорости основного движения. При этом анализ гидродинамической устойчивости проводится по отношению к возмущениям, зависящим от трех пространственных координат и времени.

В настоящей работе предпринята попытка исследования устойчивости течения в зоне взаимодействия встречных потоков в рамках линейной теории. Чтобы облегчить задачу анализа, авторы ограничились рассмотрением случая идеальной жидкости и условием потенциальности основного течения.

1. Задача гидродинамической устойчивости формулируется следующим образом. На основное потенциальное течение с вектором скорости $\mathbf{V}=\{V_x, V_y, V_z\}$ ($\Omega=\operatorname{rot}\mathbf{V}=0$) и давлением P_0 накладывается нестационарное пространственное вихревое поле возмущений ($\omega=\operatorname{rot}\mathbf{v}\neq 0$, характеризуемое вектором скорости $\mathbf{v}=\{v_x, v_y, v_z\}$ и давлением p. Требуется проследить дальнейшую временную эволюцию наложенного возмущения. Математическая модель сформулированной задачи представляет собой следующую систему уравнений возмущенного движения:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\nabla\times(\mathbf{V}\times\omega) \tag{1.1}$$

$$\nabla\mathbf{v}=0\quad \omega=\nabla\times\mathbf{v}$$

Соотношение (1) по аналогии с известным уравнением Гельмгольца может быть названо уравнением динамической возможности возмущающего движения. Если основное течение плоское, то ввиду цикличности переменных z и t и зависимости коэффициентов V_x, V_y, $V_z\equiv 0$ в (1.1) только от x и y оно допускает решения

$$\omega_\alpha=\omega_i(x, y)f_i(z)\exp(\sigma t)\qquad (\alpha=x, y, z)\quad (i=1, 2, 3) \tag{1.2}$$

Здесь ω_i, σ – в общем случае комплексные амплитуды и комплексный параметр. Подставляя (1.2) в (1.1), легко установить, что

$$f_1(z)=f_2(z)=\frac{d}{dz}[f_3(z)] \tag{1.3}$$

Конкретный вид этих функций определяется граничными условиями исследуемой краевой задачи.

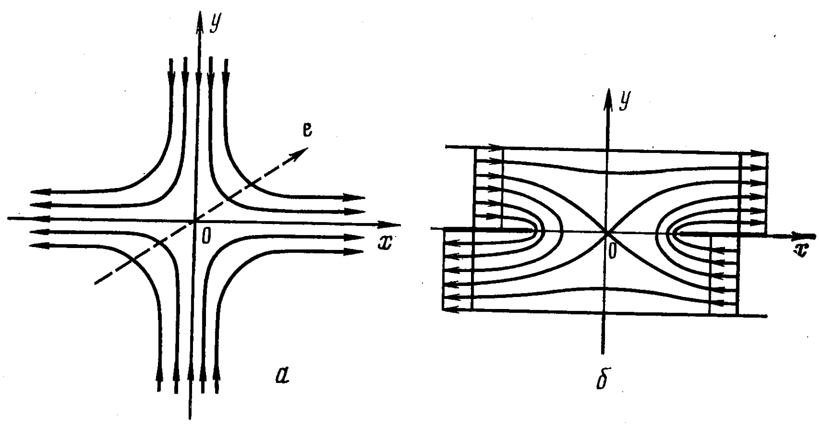
Ниже в качестве основного течения рассматривается кинематика в окрестности критической точки плоских встречных потоков, описываемая соотношениями

$$\psi=axy,\quad V_x=ax,\quad V_y=-ay,\quad a>0 \tag{1.4}$$

Тогда с учетом (1.3) для определения неизвестных функций $\omega_i(x, y)$ $(i=1, 2, 3)$ имеем следующую систему уравнений:

$$y\frac{\partial\omega_1}{\partial y}+x\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial y}+\omega_3\right)=\frac{\sigma-a}{a}\omega_1,\quad x\frac{\partial\omega_2}{\partial x}+y\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+\omega_3\right)=-\frac{\sigma+a}{a}\omega_2$$
$$x\frac{\partial\omega_3}{\partial x}-y\frac{\partial\omega_3}{\partial y}=-\frac{\sigma}{a}\omega_3 \tag{1.5}$$

Тем самым задача об устойчивости течения (1.4) свелась к амплитудной задаче на собственные значения параметра σ системы (1.5) при соответствующих гранич-



Фиг. 1

ных условиях. Интегрирование этой системы методом Фурье приводит к соотношениям

$$\omega_i=A_i x^{\lambda+\frac{1}{2}(2-i)(3-i)} y^{\lambda+\sigma/a+(i-1)(3-i)}$$
$$(\lambda+1)A_1+(\lambda+\sigma/a+1)A_2+A_2=0$$

где A_i $(i=1, 2, 3)$ и λ связаны между собой условием совместности.

Неопределенность в задании граничных условий для ω_x, ω_y, ω_z в области свободного взаимодействия не позволяет провести в полной мере исследование задачи на собственные значения системы (1.5). Случай $\omega_i\equiv 0$, являющийся тривиальным результатом, следует опустить. В данной ситуации представляется целесообразным следующий подход к решению рассматриваемой задачи. Поскольку основной вопрос анализа заключается в исследовании временной эволюции возмущений, провоцирующих возбуждение вторичного движения, то в дальнейшем ограничимся рассмотрением возмущений, которые представляют собой стоячие волны – ячеистые вихревые структуры. С физической точки зрения это означает внесение в основное потенциальное течение элементарных «пробных» вихрей. При этом появляется возможность задания и некоторых граничных условий. Такой подход предопределяет доминирующую роль монотонной моды неустойчивости и вещественность декремента σ. Так как среда идеальная, то речь идет лишь об определении знака коэффициента σ. Если среди всевозможных возмущений найдется хотя бы одно, отвечающее случаю $\sigma>0$, то основное течение неустойчиво. Исходя из этого, исследуем окрестность точки торможения потоков по отношению к некоторым частным видам возмущающего движения.

а) Возмущения в виде стоячих волн (ячеистые вихри) с амплитудными функциями ω_i $(i=1; 2; 3)$, не зависящими от пространственных координат.

Пусть $\cos\beta_i$ $(i=1;\ 2;\ 3)$ – направляющие косинусы произвольного вектора **e**, вдоль которого ориентированы ячеистые вихри (см. фиг. 1), т. е. $\omega_\alpha=\omega_0\cos\beta_i f_i(z)\exp(\sigma t)$ $(\alpha=x, y, z)$ $(i=1;\ 2;\ 3)$, где ω_0 – постоянная достаточно малая величина (в рамках справедливости линейной теории). Для удовлетворения системы уравнений (1.5) следует принять: $\cos\beta_1=1$, $\cos\beta_2=\cos\beta_3=0$, т. е. $\beta_1=0$, $\beta_2=\beta_3=\pi/2$ и $\sigma=a>0$. Это означает, что помещенный под произвольным углом пробный вихрь разворачивается потоками и ориентируется вдоль линии их раздела (ось x). Основное течение (1.4) неустойчиво по отношению к этим вихревым структурам. Функция $f_1(z)$ может быть определена как

$$f_1(z)=\cos\frac{2\pi}{l}z\qquad\left(f_1(z)=\sin\frac{2\pi}{l}z\right)\tag{1.6}$$

Здесь l – длина волны возмущения в направлении оси z. Выражение (1.6) позволяет получить вихри, симметричные относительно оси x с чередующимися вдоль z противоположными направлениями вращения.

б) Возмущающее движение такое, что вектор мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ коллинеарен с вектором скорости $\mathbf{v}$.

На основании предыдущего анализа можно для возмущающих структур задать следующие условия симметрии:

$$\omega_z=0\quad(y=0),\qquad \omega_y=0\quad(z=0)\tag{1.7}$$

Третье уравнение системы (1.5) является независимым. Интегрируя его, получим общее решение

$$F(I_1, I_2)=0,\qquad I_1=xy,\qquad I_2=\omega_3 y^{-\sigma/a}$$

где I_1 и I_2 – два первых независимых интеграла соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений, F – любая дифференцируемая функция. Построим соответствующее решение задачи Коши. Полагая в интегралах I_1 и I_2 $y\to0$, получим $I_1=x\lim\limits_{\xi\to0}(\xi)$, $\omega_3=I_2\lim\limits_{\xi\to0}(\xi)^{\sigma/a}$. Решение задачи Коши с граничными условиями (1.7) запишется в виде

$$\omega_3(x,y)\,y^{-\sigma/a}\lim_{\xi\to0}(\xi)^{\sigma/a}=0$$

Но так как второй сомножитель не равен тождественно нулю и ищется нетривиальное решение, то с необходимостью следует, что $\lim\limits_{\xi\to0}(\xi)^{\sigma/a}=0$. Значит $\sigma>0$. Следовательно, рассматриваемые возмущения с течением времени растут и движение по отношению к ним носит неустойчивый характер.

в) Изучается временная эволюция наложенного на течение (1.4) возмущающего движения ячеистой вихревой структуры, для которого функции $\omega_i(x, y)$ $(i=2;\ 3)$ являются монотонно убывающими вдоль оси x:

$$\omega_i(x,y)>0\quad(<0),\qquad \frac{\partial\omega_i}{\partial x}<0\quad(>0)\tag{1.8}$$

Это означает, что «пробные» вихри, возмущающие основное течение, ориентированы вдоль оси x, причем при возрастании x составляющие вектора угловой скорости ω_y, ω_z монотонно стремятся к нулю. Последнее связано с выравниванием линий тока основного течения вдали от критической точки.

По аналогии с предыдущим общее решение третьего уравнения системы (1.5) можно определить формулой

$$F(J_1, J_2)=0,\qquad J_1=xy,\qquad J_2=\omega_3 x^{\sigma/a}\tag{1.9}$$

где J_1, J_2 – два первых независимых интеграла (якобиан от J_1 и J_2 по переменным x, y не равен тождественно нулю). Разрешая (1.9) относительно J_2, получим решение в явном виде

$$\omega_3(x, y)=x^{-\sigma/a}F_1(J_1)$$

Легко убедиться, что построить функцию $F_1(J_1)$, удовлетворяющую условию (1.8), всегда возможно. Действительно, пусть при $x=x_1$ $\omega_3=S_1(y)$, а при $x=x_2$ $\omega_3=S_2(y)$, причем $x_2>x_1>0$. Тогда, согласно условию (12), должно быть $|S_2(y)|<|S_1(y)|$.

Найдем соответствующее решение задачи Коши для неоднородного линейного уравнения в частных производных. Применяя метод работы [5] получим, что в первом случае искомое решение определяется соотношением

$$\omega_3(x,y)=S_1\left(\frac{x}{x_1}y\right)x^{-\sigma/a}x_1^{\sigma/a}$$

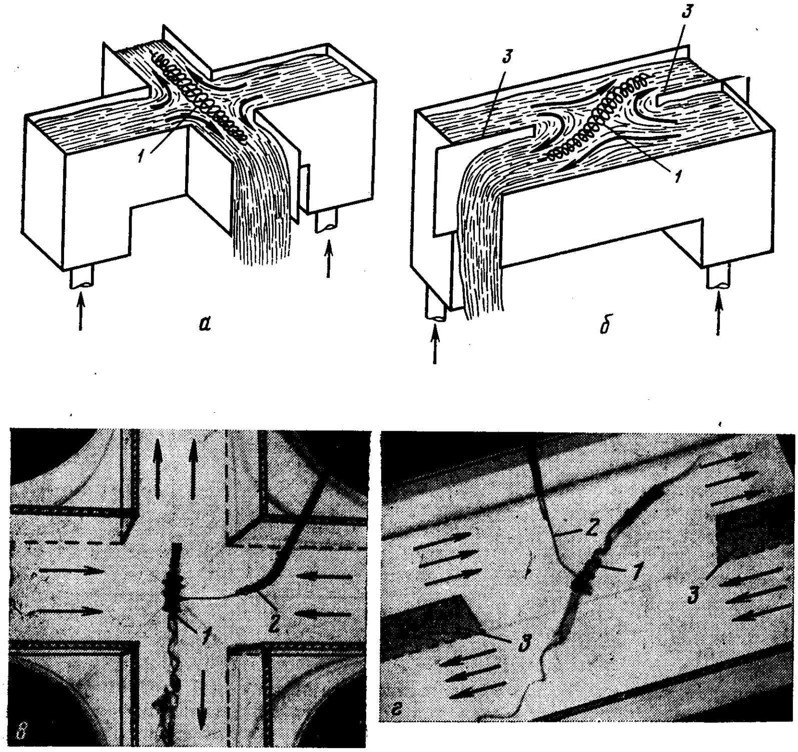
Во втором случае, когда при $x=x_2$ $\omega_3=S_2(y)$, по аналогии с предыдущим имеем

$$\omega_3(x, y)=S_2\left(\frac{x}{x_2}y\right)x^{-\sigma/a}x_2^{\sigma/a}$$

Следовательно, должно иметь место равенство

$$S_2\left(\frac{x}{x_2}y\right)\Big/S_1\left(\frac{x}{x_1}y\right)=\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\sigma/a}$$

В силу того что $\omega_3(x, y)$, а значит, S_1, S_2 – функции монотонные, условие $|S_2|<|S_1|$ позволяет установить $(x_1/x_2)^{\sigma/a}<1$. Поскольку $x_2>x_1$, немедленно следует,



Фиг. 2

что $\sigma>0$. Значит, возмущающие вихревые структуры (1.8) с течением времени нарастают, что приводит к индуцированию вторичных движений.

2. Проведенный анализ гидродинамической устойчивости в окрестности точки торможения встречных потоков идеальной жидкости показал абсолютную их неустойчивость по отношению к возмущениям вида стоячих волн, расположенных в плоскости раздела потоков. Это позволяет думать, что вообще для встречной формы взаимодействия потоков присуще возбуждение вторичного вихревого движения, ось которого совпадает с линией раздела потоков.

Течения, представленные на фиг. 1, нетрудно реализовать. С этой целью были созданы две экспериментальные установки типа гидравлических лотков, принципиальная схема которых изображена на фиг. 2, *а*, *б*, где цифрами обозначено: *1* – вторичные структурные вихреобразования, *2* – трубка, подводящая окрашенную жидкость для визуализации картины течения, *3* – передвижные, разделяющие потоки жидкости, пластины. Опыт показал, что в зоне взаимодействия потоков действительно возникают свободные структурные вихреобразования. Последние располагаются в плоскости раздела взаимодействующих потоков, как это схематически показано на фиг. 2, *а*, *б*. Фотографии визуально наблюдаемых вихрей приведены ниже.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Görtler H.* Dreidimensionales zur Stabilitätstheorie laminarer Grenzschichten.– ZAMM 35, 326–364, 1955, Bd 35, H. 9/10.
2. *Юдович В. И.* Вторичные течения и неустойчивость жидкости между вращающимися цилиндрами.– ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
3. *Степанов Г. Ю.* Гидродинамика решеток турбомашин. М.: Физматгиз, 1962.
4. *Линь Цзяцзяо.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
5. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск: Вишейшая школа, 1974.

Алма-Ата

Поступила в редакцию 29.I.1980

УДК 532.529

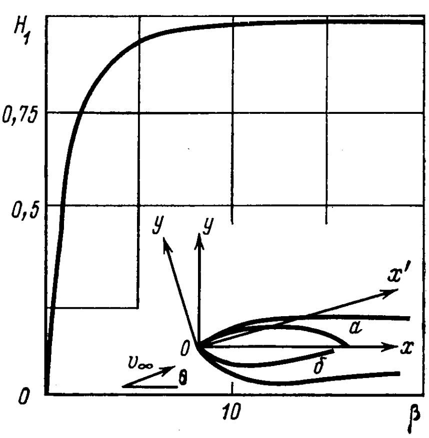
ТОНКИЙ ПРОФИЛЬ В ПОТОКЕ ДИСПЕРСНОЙ СМЕСИ

ОСИПЦОВ А. Н.

В линейной постановке рассматривается плоская задача стационарного обтекания тонкого профиля однородным потоком двухфазной среды типа газ — твердые частицы при малой объемной концентрации твердой фазы. Исследованы режимы обтекания с малой дозвуковой скоростью в пренебрежении сжимаемостью несущей фазы и со сверхзвуковой скоростью. Цель работы — определение в рамках модели взаимопроникающих континуумов [1, 2] аэродинамических характеристик тонких профилей, обтекаемых под малыми углами атаки.

Линейной теории стационарных сверхзвуковых течений посвящены работы [2—4]. Наиболее полное исследование содержится в [4], где на основе линеаризации уравнений типа [2] получено уравнение в частных производных относительно потенциала скоростей возмущенного движения несущей фазы, справедливое при обтекании плоских и осесимметричных тонких тел. С помощью преобразования Лапласа получено общее решение этого уравнения, рассмотрены конкретные примеры, в частности обтекание тонкого клина.

Ниже доказана потенциальность полей скоростей обеих фаз в однородном на бесконечности линеаризованном невязком двухфазном потоке. Получены выражения для сил и моментов, действующих на тонкие плоские тела в двухфазном потоке. Подробно исследована задача обтекания пластины под малым углом атаки. Показано, что существует область изменения безразмерных определяющих параметров задачи, при которых суммарный момент сил, приложенных к пластине, действует в сторону уменьшения угла атаки.



Фиг. 1

1. Постановка задачи. Тонкий профиль обтекается однородным на бесконечности потоком двухфазной среды под углом атаки θ. Несущая фаза — совершенный газ с постоянными теплоемкостями, дисперсная фаза — твердые сферические частицы одинакового радиуса σ. Физическая плотность вещества частиц много больше плотности газа $\rho_s^\circ \gg \rho^\circ$. Броуновское движение частиц и их влияние друг на друга отсутствуют. В качестве силы взаимодействия между фазами принята сила Стокса. Теплопередача между частицами и газом определяется условием равенства числа Нуссельта единице. Эффектами, связанными с наличием пограничного слоя вблизи поверхности обтекаемого тела, пренебрегается.

Направим ось x декартовой системы координат x, y с началом в передней кромке профиля по его средней хорде, а ось x' системы x', y' — параллельно вектору скорости невозмущенного потока. Картина течения изображена на фиг. 1; а — область чистого газа без частиц, б — область частиц, отраженных от поверхности тела. Система уравнений [2], описывающих движение двухфазной среды вне областей а