

Переход в турбулентный режим в процессе разгона жидкости происходит при мгновенных значениях чисел Рейнольдса, больших, чем при стационарном движении. Это объясняет тот факт, что в случаях, когда разгонное движение заканчивается в турбулентной области, значения коэффициента λ в течение всего периода разгона (кроме его начала) меньше таковых, соответствующих стационарному течению.

Представление данных о коэффициенте гидравлического трения в координатах $(\lambda/\lambda_y, Re/Re_\infty)$ дает возможность удобного обобщения. На фиг. 2 экспериментальные данные 1-7 получены при Re_∞ , равном $1 \cdot 10^3$; $4 \cdot 10^3$; $6 \cdot 10^3$; $8 \cdot 10^3$; $2,5 \cdot 10^4$; $8 \cdot 10^4$; $1,3 \cdot 10^5$ и $\Delta/d=0,018$; 8-11 — при Re_∞ , равном $4 \cdot 10^4$; $8 \cdot 10^4$; $1,5 \cdot 10^5$; $4 \cdot 10^5$ и $\Delta/d=0,0004$; 12-15 — при Re_∞ , равном $4 \cdot 10^4$; $8 \cdot 10^4$; $1,5 \cdot 10^5$; $4 \cdot 10^5$ и $\Delta/d=0,00005$. Кривые III-VIII соответствуют данным расчета ламинарного течения при градиентах давления, имеющих место в экспериментах 1-7, 10. Фигура 2 свидетельствует о том, что при турбулентном течении значения коэффициента гидравлического трения в этих координатах ложатся на общую кривую IX, которая описывается эмпирическим соотношением

$$(4) \quad \frac{\lambda}{\lambda_y} = 1 - 1,6 \frac{1 - Re/Re_\infty}{1 + (1 - Re/Re_\infty)^2}$$

Таким образом, коэффициент гидравлического трения при разгонном из состоянии покоя движении жидкости в исследованном диапазоне определяющих величин описывается соотношением (2) при $Re < Re_k$ и соотношением (4) при $Re \geq Re_k$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коппель Т. А., Лийв У. Р. Экспериментальное исследование возникновения движения жидкости в трубопроводах. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 6, с. 79-85.
2. Виленский В. Д., Коченов И. С., Кузнецов Ю. Н. К вопросу о гидравлических сопротивлениях при нестационарных режимах. — В кн.: Пневмо- и гидроавтоматика. М.: Наука, 1964, с. 240-247.
3. Марков С. Б. Экспериментальное исследование скоростной структуры и гидравлических сопротивлений в неустановившихся напорных турбулентных потоках. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 2, с. 65-74.
4. Громека И. С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубках. — Уч. зап. Казанск. ун-та, 1882, № 1-2.

Москва

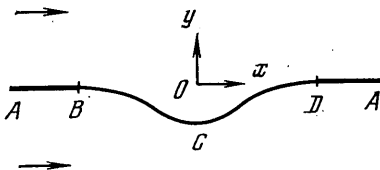
Поступила в редакцию
3.1.1980

УДК 532.525.6:5031+539.3

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ С ПЛОСКИМИ ПОТОКАМИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

РАПОПОРТ Э. Ф.

В работах [1, 2] исследовались задачи о струйном обтекании упругой пластины и оболочки. Ниже в точной нелинейной постановке исследуется задача о двустороннем обтекании упругой оболочки. При достаточно большой жесткости и малой кривизне оболочки в недеформированном состоянии доказывается однозначная разре-



Фиг. 1

шимость задачи и предлагается метод ее решения. Приводятся некоторые результаты расчетов.

1. В плоскости $z=x+iy$ рассмотрим упругую оболочку BCD , концами подвижно заземленную в твердом экране $ABDA$, вдоль которого направлена ось x (фиг. 1). С обеих сторон оболочка обтекается установившимися потенциальными потоками несжимаемой жидкости. Скорости набегающих потоков $v_{k\infty}$ направлены по оси x ; ρ_k и $p_{k\infty}$ — значения плотности и давления набегающего потока ($k=1; 2$). Индекс 1 будем относить к нижнему течению, 2 — к верхнему.

Ввиду симметрии будем рассматривать течение в правой половине плоскости z . Пусть в ненагруженном состоянии форма оболочки на участке CD задается уравнением

$$(1.1) \quad \theta_0 = F(t), \quad F(0) = F(1) = 0, \quad t = s/L, \quad 0 \leq s \leq L.$$

Здесь θ_0 — угол, составленный касательной к сечению оболочки в недеформированном состоянии с осью x , s — дуговая абсцисса, отсчитываемая от точки C , L — длина кривой CD .

Связь между изгибающим моментом M и кривизной оболочки дается соотношением [3]

$$(1.2) \quad M = D(1/R - 1/R_0) \quad (D = \text{const})$$

Здесь D — жесткость оболочки, R_0 , R — радиусы кривизны поперечного сечения оболочки до изгиба и после него.

Из условий равновесия оболочки в потоке следует [1, 2]:

$$(1.3) \quad M''' + \frac{R'}{R} M'' + \frac{1}{R^2} M' = -(p_2 - p_1)' - (p_2 - p_1) \frac{R'}{R}$$

$$(1.4) \quad Q = -M', \quad T = (M'' + p_2 - p_1)R$$

Здесь p_k ($k=1; 2$) — давление в жидкости, T и Q — продольная и поперечная силы, штрих означает дифференцирование по s .

Подставляя выражение (1.2) в уравнение (1.3), получим

$$(1.5) \quad \theta' = M_* D^{-1} + \dot{F}(t) L^{-1} + \Phi(s)$$

$$\begin{aligned} \Phi(s) = & -\frac{Q_*}{D} \int_L^s ds + \frac{1}{D} \int_L^s ds \int_L^s (p_1 - p_2) ds - \frac{1}{2} \int_L^s ds \int_L^s \theta'^2 ds + \\ & + \frac{1}{2} \theta_*'^2 \int_L^s ds \int_L^s \theta' ds + \frac{1}{L^2} \int_L^s ds \int_L^s \theta' ds \int_L^s \theta' F(t) ds \end{aligned}$$

Здесь θ — угол наклона вектора скорости к оси x , M_* , θ_* , Q_* — значения функций M , θ , Q в точке D , точками обозначено дифференцирование по переменной t . Из условий закрепления оболочки следует

$$(1.6) \quad M_* = -\frac{D}{L} \int_0^L \Phi(s) ds, \quad Q_* = \int_0^L (p_2 - p_1) \cos \theta ds$$

2. Преобразуя уравнение Бернулли, получим

$$(2.1) \quad \begin{aligned} p_2 - p_1 = & \frac{1}{2} \rho_2 v_2 \infty^2 [a + (1 - v_2^2/v_2 \infty^2) - b(1 - v_1^2/v_1 \infty^2)] \\ a = & 2(p_2 \infty - p_1 \infty) (\rho_2 v_2 \infty^2)^{-1}, \quad b = \rho_1 v_1 \infty^2 (\rho_2 v_2 \infty^2)^{-1} \end{aligned}$$

Положим $v_k = v_{k\infty} e^{-\lambda_k}$ ($k=1; 2$), тогда с учетом (2.1), (1.6) уравнение (1.5) примет следующий вид:

$$(2.2) \quad \dot{\theta} = \alpha + \dot{F} + \beta(1-t) + J(t)$$

$$\begin{aligned} J(t) = & - \int_1^t \left\{ \int_1^t \varepsilon [a + (1 - e^{-2\lambda_2}) - b(1 - e^{-2\lambda_1})] + \frac{1}{2} \dot{\theta} (\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_*^2) - \dot{\theta} \int_1^t \dot{\theta} F dt \right\} dt \\ \varepsilon = & \frac{\rho_2 v_2^2 L^3}{2D} \end{aligned}$$

$$(2.3) \quad \alpha = \frac{M_* L}{D} = \int_0^1 [\beta(t-1) - J(t)] dt$$

$$\beta = \frac{Q_* L^2}{D} = \varepsilon \int_0^1 [a + (1 - e^{-2\lambda_2}) - b(1 - e^{-2\lambda_1})] dt$$

Выразим теперь $\lambda_k(t)$ ($k=1, 2$) через $\dot{\theta}(t)$. Для этого отображим полуплоскости $\psi_1 \leq 0$ и $\psi_2 \geq 0$ соответственно на полуплоскости $\text{Im } \zeta_1 \leq 0$ и $\text{Im } \zeta_2 \geq 0$ функциями

$$(2.4) \quad W_k = \Phi_{*k} \zeta_k$$

где $W_k = \Phi_k + i\psi_k$ — комплексный потенциал k -го течения, Φ_{*k} — значение Φ_k в точке D , $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$ ($k=1, 2$).

Функции Жуковского $\omega_k(\zeta_k) = \lambda_k + i\theta_k$ — аналитические соответственно в нижней и верхней полуплоскостях, причем

$$(2.5) \quad \lambda_k = \ln(v_{k\infty} dz / dW_k), \quad \theta_1(\xi_1) = \theta_2(\xi_2) = \theta(t) \quad \text{при } |\xi_k| \leq 1$$

$$\omega_k(\infty) = 0, \quad \theta_k(\xi_k) = 0, \quad \eta_k(\xi_k) = 0 \quad \text{при } |\xi_k| \geq 1 \quad (k=1; 2)$$

Здесь ξ_1 и ξ_2 соответствуют одному и тому же значению t .

Используя краевое условие (2.4) и применяя оператор Дини для полуплоскости, получим

$$(2.6) \quad \lambda_k(\xi_k) = \frac{2(-1)^k}{\pi} \int_0^1 \frac{d\theta_k(\xi_k')}{d\xi_k'} \ln |\xi_k'^2 - \xi_k^2| d\xi_k' \quad (k=1; 2)$$

Согласно (2.4) и соотношениям $v_k = v_{k\infty} e^{-\lambda_k}$, $d\Phi_k/dt = v_k L$ ($k=1; 2$), будем иметь

$$(2.7) \quad \gamma_k \frac{d\xi_k}{dt} = e^{-\lambda_k}, \quad \gamma_k = \frac{\Phi_{*k}}{v_{k\infty} L} = \int_0^1 e^{-\lambda_k} dt$$

Используя (2.7), можно переписать (2.6) в следующем виде:

$$(2.8) \quad \lambda_k(t) = \frac{2(-1)^k}{\pi} \int_0^1 \dot{\theta}(t') \ln \left\{ \gamma_k^{-2} \left| \left(\int_t^{t'} e^{-\lambda_k} d\tau \right) \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \left(\int_0^{t'} e^{-\lambda_k} d\tau + \int_0^t e^{-\lambda_k} d\tau \right) \right| \right\} dt \quad (k=1; 2)$$

Таким образом, для неизвестных функций $\omega_k(\zeta_k)$ ($k=1; 2$) имеем краевые задачи, определенные условиями (2.2), (2.8), которые с учетом соотношений (2.3), (2.7) представляют собой замкнутую систему уравнений относительно трех функций: $\dot{\theta}(t)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ на интервале $[0, 1]$.

Запишем уравнение (2.2) с учетом (2.3) в операторной форме

$$(2.9) \quad \dot{\theta}(t) = T_0[\theta, \lambda_1, \lambda_2]$$

а уравнения (2.8) с учетом (2.7) и (2.9) — в виде

$$(2.10) \quad \lambda_k(t) = T_k[T_0(\dot{\theta}, \lambda_1, \lambda_2), \lambda_k] \quad (k=1; 2)$$

Введем C — пространство функций, непрерывных на $[0; 1]$, и пространство Банаха $H = C \times C \times C$ с нормой

$$\|x\|_H = \|x_0\|_C + \|x_1\|_C + \|x_2\|_C, \quad x = \{x_0, x_1, x_2\},$$

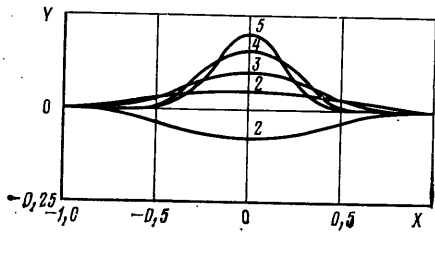
$$\|x_k\|_C = \sup |x_k(t)| \quad (k=0; 1; 2)$$

На основе принципа сжатых отображений, подобно тому как это сделано в [1, 2], доказывается однозначная разрешимость системы (2.9), (2.10) и краевых задач (2.2), (2.8) при достаточно малых ε и $\|F\|$. Решение зависит от $\|F\|$, a , b и может быть найдено методом последовательных приближений по схеме

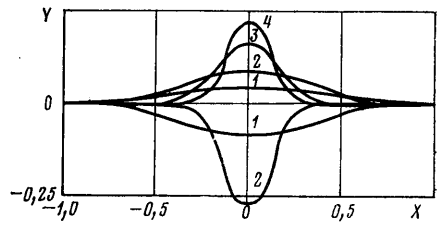
$$\dot{\theta}^{(n)} = T_0[\dot{\theta}^{(n-1)}, \lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}]$$

$$\lambda_k^{(n)} = T_k[T_0(\dot{\theta}^{(n-1)}, \lambda_1^{(n-1)}, \lambda_2^{(n-1)}), \lambda_k^{(n-1)}] \quad (k=1; 2)$$

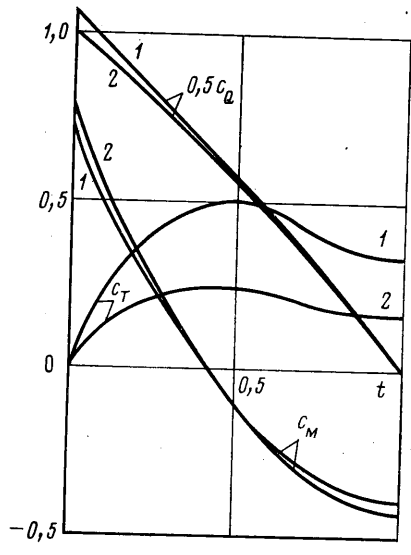
при любом начальном приближении $\dot{\theta}^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}$, принадлежащем некоторому шару $S(q_0)$ ($\|x_k\|_C < q_0$, $k=0; 1; 2$).



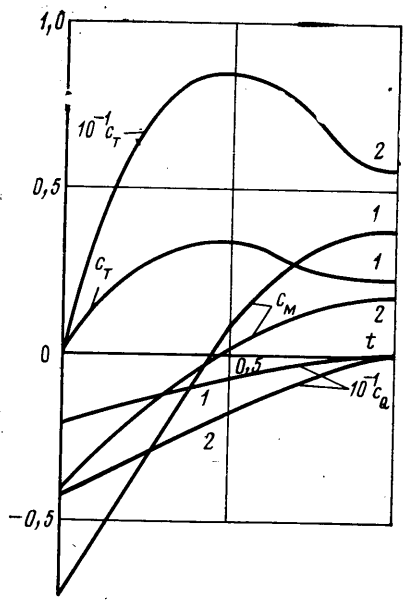
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

3. Зная $\omega_k(\zeta_k)$ и $dW_k/d\zeta_k$ ($k=1; 2$), можно определить любые геометрические и динамические характеристики течения. В частности, из (1.3) и (1.4) получаются формулы, характеризующие усилия, возникающие в оболочке:

$$c_M = 2M(\rho_2 v_{2\infty}^2 L^2)^{-1} = \varepsilon^{-1}(\dot{\theta} - F), \quad c_Q = 2Q(\rho_2 v_{2\infty}^2 L)^{-1} = \varepsilon^{-1}(F - Q)$$

$$c_T = 2T(\rho_2 v_{2\infty}^2 L)^{-1} = -\varepsilon^{-1} \left(\dot{\theta} - \int_0^t \dot{\theta} F dt \right)$$

Рассмотрим в качестве примера задачу о двустороннем обтекании упругой пластины, концы которой подвижно защемлены в прямолинейном экране. При этом $\theta_0 = F(t) = 0$. Система (2.2), (2.8) решалась методом итераций. В качестве нулевого приближения принималось $\dot{\theta}^{(0)} = 0, \lambda_1^{(0)} = \lambda_2^{(0)} = 0$.

На фиг. 2, 3 изображена форма упругого равновесия пластины для $a = \pm 1$ и $a = \pm 2$ (знак плюс соответствует верхней половине фигур, минус - нижней) при $b = 0.5$. Кривым 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют значения $\varepsilon = 1, 2, 4, 6, 8$; $X = v/L, Y = y/L$. На фиг. 4, 5 представлены зависимости значений c_M, c_Q, c_T от $t = s/L$ для левой половины пластины при $a = \pm 2, b = 0.5$. Кривым 1, 2 соответствуют значения $\varepsilon = 1; 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киселев О. М., Рапопорт Э. Ф. О струйном обтекании упругой пластины. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 4, с. 35.
2. Киселев О. М., Рапопорт Э. Ф. О струйном обтекании упругой оболочки. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 2, с. 24.
3. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963, 635 с.

Казань

Поступила в редакцию
11.11.1980

УДК 532.527.013.4

К УСТОЙЧИВОСТИ ВСТРЕЧНЫХ ПОТОКОВ

АРЫШЕВ Ю. А., ГОЛОВИН В. А., ЕРШИН Ш. А.

При взаимодействии встречных потоков область критической точки характеризуется существенным искривлением линий тока. Выпуклость последних обращена в сторону особой точки, в направлении к которой происходит уменьшение модуля вектора скорости. Подобная ситуация типична для тейлор-гертлеровской неустойчивости и поэтому правомерно ожидать проявления ее в зоне встречи потоков. Отметим, что свободные течения жидкости и газа с аналогичным характером искривления линий тока распространены достаточно широко. В частности, это имеет место в некоторых случаях, так называемых антипараллельных движений. В качестве примера на фиг. 1 показаны две возможные схемы встречной формы взаимодействия: встречные (фиг. 1, а) и антипараллельные потоки (фиг. 1, б). Пунктиром показана начальная ориентация «пробного» вихря.

Несмотря на значительное количество работ, посвященных вопросам исследования различных случаев вторичных движений, возбуждаемых в потоках с сильным искривлением линии тока [1-4], задача устойчивости встречных потоков, по-видимому, не рассматривалась. Сложность изучения состоит в существенной неоднородности течения и связана с необходимостью учета по крайней мере двух составляющих вектора скорости основного движения. При этом анализ гидродинамической устойчивости проводится по отношению к возмущениям, зависящим от трех пространственных координат и времени.

В настоящей работе предпринята попытка исследования устойчивости течения в зоне взаимодействия встречных потоков в рамках линейной теории. Чтобы облегчить задачу анализа, авторы ограничились рассмотрением случая идеальной жидкости и условием потенциальности основного течения.

1. Задача гидродинамической устойчивости формулируется следующим образом. На основное потенциальное течение с вектором скорости $\mathbf{V} = \{V_x, V_y, V_z\}$ ($\Omega = \text{rot } \mathbf{V} = 0$) и давлением P_0 накладывается нестационарное пространственное вихревое поле возмущений ($\omega = \text{rot } \mathbf{v} \neq 0$, характеризуемое вектором скорости $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$ и давлением p). Требуется проследить дальнейшую временную эволюцию наложенного возмущения. Математическая модель сформулированной задачи представляет собой следующую систему уравнений возмущенного движения:

$$(1.1) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \omega)$$

$$\nabla \mathbf{v} = 0 \quad \omega = \nabla \times \mathbf{v}$$

Соотношение (1) по аналогии с известным уравнением Гельмгольца может быть названо уравнением динамической возможности возмущающего движения. Если основное течение плоское, то ввиду цикличности переменных z и t и зависимости коэффициентов $V_x, V_y, V_z \equiv 0$ в (1.1) только от x и y оно допускает решения

$$(1.2) \quad \omega_\alpha = \omega_i(x, y) f_i(z) \exp(\sigma t) \quad (\alpha = x, y, z) \quad (i = 1, 2, 3)$$

Здесь ω_i, σ — в общем случае комплексные амплитуды и комплексный параметр. Подставляя (1.2) в (1.1), легко установить, что

$$(1.3) \quad f_1(z) = f_2(z) = \frac{d}{dz} [f_3(z)]$$