

УДК 532.23

**ЧИСЛЕННОЕ НАХОЖДЕНИЕ РАВНОВЕСНОЙ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА  
ЖИДКОСТЕЙ В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ СОСУДЕ**

ПОПОВА Л. Н.

Рассматривается задача численного определения двусвязных осесимметричных равновесных форм поверхностей раздела двух несмешивающихся жидкостей, помещенных в произвольный осесимметричный сосуд, в условиях пониженной гравитации. Такого рода задачи представляют практический интерес в связи с изучением поведения топлива в баках космических аппаратов [1].

Предполагается, что жидкости однородные, несжимаемые и имеют постоянную по всему объему температуру. При исследовании равновесия границы раздела жидкостей в условиях полной или частичной невесомости необходимо учитывать силы поверхностного натяжения, которые играют здесь определяющую роль.

Равновесие жидкостей в сосуде с учетом поверхностного натяжения описывается известной системой нелинейных уравнений [2]. В данной статье для решения задачи применяется итерационный метод Канторовича — Ньютона [3], который позволяет свести нелинейную задачу к последовательности линейных задач, решаемых методом конечных разностей.

1. Рассмотрим сосуд, ограниченный твердыми стенками  $S$  и  $\Sigma$ , заполненный двумя несмешивающимися жидкостями в поле сил тяжести массовой плотности  $g$  (фиг. 1). Обозначим через  $\Gamma$  поверхность раздела жидкостей,  $\Omega_1$  ( $\Omega_2$ ) — область, занимаемую первой (второй) жидкостью,  $L$  ( $l$ ) — линии пересечения  $\Gamma$  со стенками  $S$  ( $\Sigma$ ). Декартову систему координат  $(x, y, z)$  введем так, чтобы ось  $z$  была параллельна вектору  $g$ , а начало координат (точка  $O$ ) находилось внутри поверхности  $S$ .

Уравнение равновесия границы раздела жидкостей в безразмерных переменных имеют вид [2]

$$(1.1) \quad 2H - Bz + Q = 0, \quad (x, y, z) \in \Gamma, \quad \alpha = \alpha_0(x, y, z) \in L \cup l$$

$$\int_{\Omega_2} d\Omega = V, \quad B = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\sigma} g r^2$$

Здесь  $2H$  — средняя кривизна поверхности  $\Gamma$ ,  $B$  — число Бонда, характеризующее отношение гравитационных сил к силам поверхностного натяжения,  $\rho_1, \rho_2$  — плотности первой и второй жидкости соответственно,  $Q$  — постоянная, которая должна быть найдена в процессе решения задачи,  $\alpha_0$  — угол смачивания второй жидкостью стенок сосуда ( $0^\circ < \alpha_0 < 180^\circ$ ), заданная величина,  $r$  — характерный размер задачи,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения ( $\sigma = \text{const}$ ),  $V$  — заданная постоянная, равная объему второй жидкости.

Введем в пространстве криволинейную систему координат  $(u, \theta, \varphi)$  так, чтобы стенки сосуда  $S$  и  $\Sigma$  совпадали с координатными поверхностями:  $u=0$ ,  $u=1$ . В случае, когда области, заключенные внутри  $S$  и  $\Sigma$ , являются звездными относительно начала координат, такие координаты можно определить следующим образом:

$$x = \rho(u, \theta) \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho(u, \theta) \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho(u, \theta) \cos \theta$$

$$\rho(u, \theta) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R_0(\theta) + [R_1(\theta) - R_0(\theta)] u$$

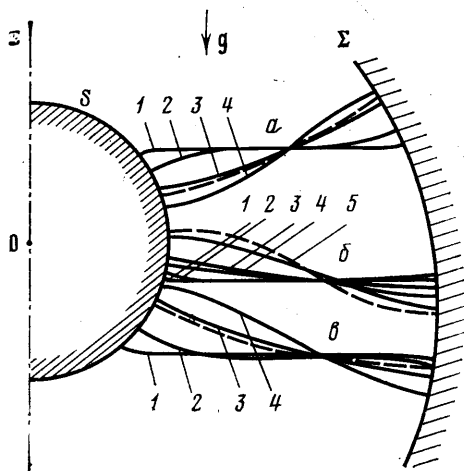
Здесь  $\rho = R_0(\theta)$  — уравнение поверхности  $S$ ,  $\rho = R_1(\theta)$  — уравнение поверхности  $\Sigma$ ,  $\rho, \theta$  и  $\varphi$  — сферические координаты ( $\rho > 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ), а координата  $u$  линейно связана с  $\rho$  вдоль каждого луча  $\theta = \text{const}$ .

В качестве криволинейной координатной сетки на поверхности выберем линии пересечения  $\Gamma$  с поверхностями  $u = \text{const}$ ,  $\varphi = \text{const}$ , а координаты произвольной точки на  $\Gamma$  будем определять значениями переменных  $u, \varphi$ . Пусть поверхность  $\Gamma$  задается уравнением  $\theta = \theta(u)$  ( $0 \leq u \leq 1$ ). Тогда задача (1.1) приводится к виду

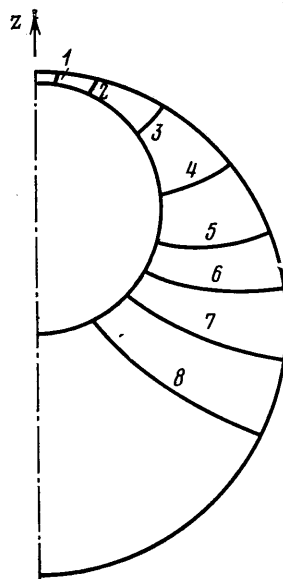
$$(1.2) \quad \theta'' + F_1(\theta', \theta, u)Q + F_2(\theta', \theta, u) = 0, \quad 0 < u < 1$$

$$(1.3) \quad \theta' + f(\theta) = 0 \quad (u=0, u=1)$$

$$(1.4) \quad G_1(\theta(0), \theta(1)) + \int_0^1 G_2(\theta', \theta, u) du = V$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$F_1(\theta', \theta, u) = -\frac{1}{\rho_u \rho} [\rho_u^2 + 2\rho_u \rho_\theta \theta' + (\rho^2 + \rho_\theta^2) (\theta')^2]^{1/2}$$

$$F_2(\theta', \theta, u) = -B\rho \cos \theta F_1(\theta', \theta, u) + \frac{1}{\rho^2 \rho_u} \{-\rho_u^3 \operatorname{ctg} \theta + 3\rho_u^2 (\rho - \rho_\theta \operatorname{ctg} \theta) \theta' + [2\rho (3\rho_u \rho_\theta - \rho \rho_u \theta) - \rho_u (3\rho_\theta^2 + \rho^2) \operatorname{ctg} \theta] (\theta')^2 + [\rho (2\rho^2 + 3\rho_\theta^2 - \rho \rho_\theta \theta) - \rho_\theta (\rho^2 + \rho_\theta^2) \operatorname{ctg} \theta] (\theta')^3\}$$

$$G_1(\theta(0), \theta(1)) = \pi \left[ \frac{R_1^3(\theta(1))}{3} \sin^2 \theta(1) \cos \theta(1) - \frac{R_0^3(\theta(0))}{3} \sin^2 \theta(0) \cos \theta(0) + \frac{2}{3} \int_{\theta(1)}^{\pi} R_1^3(\theta) \sin \theta \, d\theta - \frac{2}{3} \int_{\theta(0)}^{\pi} R_0^3(\theta) \sin \theta \, d\theta \right]$$

$$G_2(\theta', \theta, u) = \pi \rho^2 \sin^2 \theta [(\rho \sin \theta - \rho_\theta \cos \theta) \theta' - \rho_u \cos \theta]$$

$$f(\theta) = \rho_u \frac{\rho_\theta \mp \rho \operatorname{ctg} \theta}{\rho^2 + \rho_\theta^2}$$

причем в последнем соотношении при  $u=0$  берется верхний знак, при  $u=1$  — нижний знак,  $\rho_u, \rho_\theta$  — частные производные от  $\rho$  по  $u$  и  $\theta$  соответственно.

2. Применяя метод Канторовича — Ньютона к краевой задаче (1.2) — (1.4), после несложных преобразований придем к последовательности задач:

$$(2.1) \quad \theta_{n+1}''(u) + p(u) \theta_{n+1}'(u) + q(u) \theta_{n+1}(u) + s(u) Q_{n+1} = t(u), \quad 0 < u < 1$$

$$\theta_{n+1}' + \mu \theta_{n+1} = v \quad (u=0, u=1), \quad \int_0^1 v(u) \theta_{n+1}(u) \, du = \gamma$$

$$p(u) = \frac{\partial F_2}{\partial \theta_n'} (\theta_n', \theta_n, u) + Q_n \frac{\partial F_1}{\partial \theta_n'} (\theta_n', \theta_n, u)$$

$$q(u) = \frac{\partial F_2}{\partial \theta_n} (\theta_n', \theta_n, u) + Q_n \frac{\partial F_1}{\partial \theta_n} (\theta_n', \theta_n, u)$$

$$s(u) = F_1(\theta_n', \theta_n, u)$$

$$t(u) = -F_2(\theta_n', \theta_n, u) + p(u)\theta_n'(u) + q(u)\theta_n(u)$$

$$v(u) = -2\pi\rho^2(u, \theta_n(u))\rho_u(u, \theta_n(u)) \sin \theta_n(u)$$

$$\mu = \frac{\partial f}{\partial \theta_n} (\theta_n), \quad \nu = \theta_n \frac{\partial f}{\partial \theta_n} (\theta_n) - f(\theta_n)$$

$$\gamma = V - G_1(\theta_n(0), \theta_n(1)) - \int_0^1 G_2(\theta_n'(u), \theta_n(u), u) du + \int_0^1 v(u)\theta_n(u) du$$

В качестве начального приближения для итерационного процесса задаем поверхность  $\Gamma_0$  ( $\theta = \theta_0(u)$ ), удовлетворяющую крайевым условиям (1.3) и ограничивающую заданный объем жидкости  $V$ , и постоянную  $Q_0$ . Последующие приближения  $\Gamma_{n+1}$  ( $\theta = \theta_{n+1}(u)$ ),  $Q_{n+1}$  ( $n=0; 1 \dots$ ) можно найти, применяя к задаче (2.1) метод конечных разностей.

3. Расчеты выполнялись на ЭВМ для сосуда с эксцентрично расположенными сферическими стенками  $S$  и  $\Sigma$ . Начало координат выбиралось в центре меньшей сферы. В этом случае  $R_0(\theta) = r$ ,  $R_1(\theta) = (R^2 - d^2 \sin^2 \theta)^{1/2} - d \cos \theta$ , где  $r(R)$  — радиус  $S$  ( $\Sigma$ ),  $d$  — расстояние между центрами сфер.

На отрезке  $[0; 1]$  вводилась равномерная сетка  $u_i$  ( $i=0, 1 \dots N$ ). Аппроксимация последнего уравнения системы (2.1) получалась заменой интеграла механическими квадратурами по формуле Симпсона. Разностная схема, с помощью которой определялись последовательные приближения, имела второй порядок аппроксимации [4]. Итерирование прекращалось при выполнении условия

$$(3.1) \quad \max_{0 \leq i \leq N} \left[ \frac{|\theta_{n+1}(u_i) - \theta_n(u_i)|}{\theta_{n+1}(u_i)} \right] < 0,01.$$

На фиг. 1 показаны равновесные поверхности  $\Gamma$  при фиксированном объеме  $V=84,46$  (а), 56,49 (б) и 46,62 (в) для разных чисел Бонда  $10^4$ ;  $10^2$ ; 0; -1; -2 (кривые 1-5 соответственно). Остальные параметры задачи принимали следующие значения:  $d=0,5$ ,  $R=3,0$ ,  $\alpha=90^\circ$ ,  $N=20$ . В качестве начального приближения задавалась поверхность  $\Gamma_0$ , соответствующая штрихованной кривой на фиг. 1, и  $Q_0=0$ . Для достижения неравенства (3.1) потребовалось две итерации при  $B=0$ , три итерации при  $B=100$  и -1 и четыре итерации при  $B=10^4$  и -2.

При больших числах Бонда равновесная граница раздела жидкостей горизонтальна почти всюду, за исключением участков, примыкающих к поверхностям  $S$  и  $\Sigma$ , где она сильно изгибается, образуя со стенками сосуда равновесный крайевой угол. Поэтому с увеличением числа Бонда сходимость итерационного процесса ухудшается. Если  $B$  меньше некоторого отрицательного числа, приблизительно равного -1,2 (в случаях а и в) и -2,2 (в случае б), наблюдается расходимость итерационного процесса, что может быть связано с неустойчивостью равновесия.

На фиг. 2 построены равновесные формы границы раздела жидкостей в условиях невесомости ( $B=0$ ) при  $d=0,9$ ,  $R=2,0$  и значениях  $V=29,3$ ; 29,2; 28,7; 26,6; 23,1; 19,3; 14,7; 9,1 (кривые 1-8).

В заключение следует отметить, что изложенная методика предназначена для определения формы двусвязной осесимметричной границы раздела жидкостей, тогда как известные методы, пригодные для исследования односвязных свободных поверхностей жидкости [2], оказываются практически неприменимыми, поскольку приводят к большим затратам машинного времени.

Автор выражает благодарность И. Е. Тарапову и И. И. Иевлеву за постоянное внимание к работе и полезные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Saad Michel A., Oliver David A. Linearized time dependent free surface flow in rectangular and cylindrical tanks. Proc. 1964. Heat Transfer and Fluid Mech. Inst. Berkeley, Calif. Stanford, Calif., Univ. Press, 1964.

2. Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976.  
 3. Канторович Л. В., Акимов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.  
 4. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.

Харьков

Поступила в редакцию  
24.I.1980

УДК 532.517.3

## СОПРОТИВЛЕНИЕ ТРЕНИЯ ПРИ УСКОРЕННОМ ТЕЧЕНИИ В ТРУБЕ

БАЙБИКОВ Б. С., ОРЕШКИН О. Ф., ПРУДОВСКИЙ А. М.

Рассматривается ускоренное (разгонное) течение несжимаемой жидкости под действием скачкообразно изменяющегося градиента давления в прямой цилиндрической трубе:

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, & u &= 0 & (t=0) \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= \text{const} < 0, & u &> 0 & (t>0). \end{aligned}$$

Здесь  $p$  — давление в трубе;  $x$  — координата вдоль оси трубы, совпадающая с направлением потока;  $t$  — время;  $u$  — среднерасходная скорость.

Расчет течения в одномерной постановке не может быть выполнен с достаточной степенью точности из-за отсутствия надежных значений коэффициента гидравлического трения  $\lambda$ . Известные экспериментальные данные о величине  $\lambda$  при ускоренном течении [1–3] значительно различаются между собой. Представлены результаты экспериментального исследования коэффициента гидравлического трения. Получено существенное отличие мгновенных значений  $\lambda$  в процессе разгона от значений коэффициента гидравлического трения  $\lambda_v$ , вычисленных по мгновенному значению числа Рейнольдса по зависимостям для стационарного течения. В начальные моменты времени  $\lambda > \lambda_v$ , а в последующие  $\lambda < \lambda_v$ . На основании выполненного исследования предложены зависимости для расчета коэффициента гидравлического трения при разгонном течении.

Из анализа решения И. С. Громеки [4] для случая ламинарного разгонного течения получено, что относительная величина коэффициента гидравлического трения  $\lambda/\lambda_v$  однозначно связана с отношением мгновенного значения числа Рейнольдса ( $Re$ ) к значению числа Рейнольдса в конце процесса разгона ( $Re_\infty$ ). Параметрическая форма этой связи имеет вид

$$(2) \quad \frac{\lambda}{\lambda_v} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \exp(-\mu_n^2 4vt/d^2)}{\mu_n^2} \frac{Re_\infty}{Re}$$

$$\frac{Re}{Re_\infty} = 32 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \exp(-\mu_n^2 4vt/d^2)}{\mu_n^4}$$

где  $\mu_n$  — корни функции Бесселя нулевого порядка;  $d$  — внутренний диаметр трубы;  $v$  — кинематическая вязкость жидкости;  $Re = ud/v$  — мгновенное значение числа Рейнольдса;  $Re_\infty = u_\infty d/v$  — значение числа Рейнольдса в конце процесса разгона.

Для отыскания зависимости

$$\lambda = \lambda(Re_\infty, Re, \Delta/d)$$

(здесь  $\Delta$  — высота выступа шероховатости внутренней поверхности трубы) при переходе потока в процессе разгона в турбулентный режим выполнены систематические эксперименты. Экспериментальные значения  $\lambda$  определялись из уравнения движения

$$(3) \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} - \lambda \frac{1}{d} \frac{\rho u^2}{2}$$

В экспериментах при вариациях  $Re_\infty$  и  $\Delta/d$ , фиксировалось изменение скорости в процессе разгона. Градиент давления определялся по показаниям датчиков давления, установленных в четырех точках по длине трубы. Ускорение определялось дифференцированием по времени данных о скорости. Изменение величины  $Re_\infty$  в диапазоне от  $1 \cdot 10^3$  до  $4 \cdot 10^5$  обеспечивалось заданием различных значений перепадов давления на рабочем участке (изменением  $u_\infty$ ), а также применением жидкости с