

УДК 533.69.01; 533.662.013

СВЕРХЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ТОНКОГО КРЫЛА С ДОЗВУКОВЫМИ КРОМКАМИ

КУЗНЕЦОВ А. В.

Краткое изложение результатов работ по теории обтекания тонкого крыла сверхзвуковым потоком газа, полученных к 1970 г., содержится в [1]. Эффективное решение задачи обтекания крыла со сверхзвуковыми передней и задней кромками и с учетом концевой эффе́кта и вихревой пелены было дано Е. А. Краси́льщиковой. Систематическому изложению метода интегральных уравнений и применению его к стационарным и нестационарным задачам аэродинамики и дифракции посвящены монографии [2, 3].

В настоящее время все большее применение находят крылья, у которых передняя и задняя кромка в широком диапазоне изменения числа M натекающего потока оказываются полностью дозвуковыми. В связи с этим возникла необходимость создания общих и строго обоснованных методов расчета таких крыльев. Точное решение найдено лишь для плоского треугольного крыла методом конических течений [4].

Приближенный численный метод расчета крыльев произвольной формы в плане был предложен в [5]. Принципиальной особенностью метода является замена действительного контура крыла некоторым пилообразным контуром, составленным в плоскости характеристических переменных из отрезков прямых, параллельных координатным осям.

В данной статье дано обобщение метода интегральных уравнений для расчета установившегося обтекания крыльев произвольной формы в плане с дозвуковыми передними и задними кромками. Определение потенциала скорости на передней части крыла, где не сказывается влияние вихревой пелены, сведено к решению двумерного интегрального уравнения второго рода. Задняя часть, подверженная воздействию вихревой пелены, разбивается на ряд подобластей, в которых расчет потенциала ускорения последовательно сводится к решению одномерных уравнений типа уравнений Фредгольма второго рода и к квадратурам. Исследована однозначная разрешимость полученных интегральных уравнений; показано, что они могут быть решены методом последовательных приближений. Для примера дано решение задачи обтекания плоского дельтовидного крыла и сравнение его с точным решением, найденным методом конических течений [4, 6].

1. Постановка задачи. Определение потенциала скорости на передней части крыла. Рассмотрим установившееся движение тонкого слабо изогнутого крыла в неподвижной среде со скоростью $V > a$, где a — скорость звука (фиг. 1). Будем считать, что в системе координат (x_1, y_1, z_1) , связанной с крылом и выбранной так, что крыло мало отклоняется от плоскости $z_1 = 0$, а ось x_1 направлена противоположно вектору скорости V , проекции передней и задней кромок крыла на плоскость $z_1 = 0$ заданы соответственно уравнениями $y_1 = \pm \Psi_1(x_1)$, $y_1 = \pm \chi_1(x_1)$, причем $|d\Psi_1/dx_1| < \tg \alpha$, $|d\chi_1/dx_1| < \tg \alpha$, где $\alpha = \arctg(1/\mu)$, $\mu = \sqrt{M^2 - 1}$, $M = V/a$ (для простоты рассматриваем крыло, симметричное относительно плоскости $y_1 = 0$). За крылом простирается вихревая пелена, представляющая собой полосу, ширина которой равна размаху крыла.

Обозначим проекции крыла и вихревой пелены на плоскость $z_1 = 0$ через S_1 и Σ_1 соответственно, а оставшуюся часть плоскости $z_1 = 0$ — через D_1 .

Потенциал скорости возмущений с точностью до членов первого порядка малости удовлетворяет волновому уравнению и граничным условиям

при $z_1=0$:

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} = \mu^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} = -V \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad (x_1, y_1) \in S_1$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0, \quad (x_1, y_1) \in \Sigma_1$$

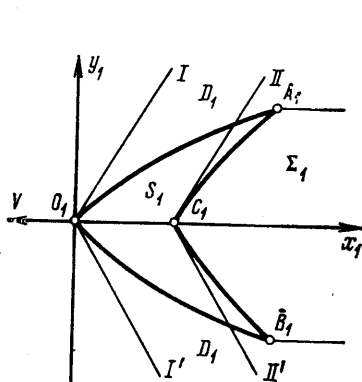
$$(1.4) \quad \varphi = 0, \quad (x_1, y_1) \in D_1$$

Здесь $z_1 = f(x_1, y_1)$ — уравнение поверхности крыла.

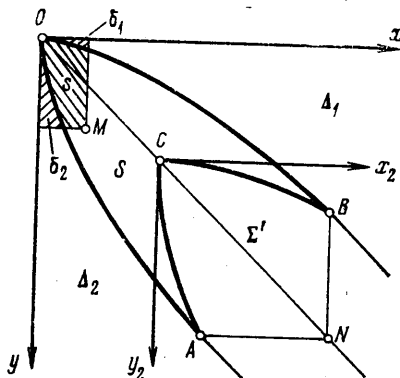
Пользуясь, как и в [2, 3], интегральным представлением

$$(1.5) \quad \varphi(x_1, y_1, z_1) = -\frac{1}{\pi} \int_{\sigma_1} \frac{v_1(\xi_1, \eta_1) d\xi_1 d\eta_1}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 - \mu^2[(y_1 - \eta_1)^2 + z_1^2]}}$$

в котором $v_1 = (\partial \varphi / \partial z_1)_{z_1=0}$, а σ_1 — часть плоскости $z_1=0$, лежащая внутри характеристического конуса с вершиной в точке $M(x_1, y_1, z_1)$, выведем



Фиг. 1



Фиг. 2

сначала интегральное уравнение для определения потенциала скорости на передней части крыла, заключенной между характеристиками I—I' и II—II', где влияние вихревой пелены еще не сказывается.

В характеристических переменных $x = x_1 - \mu y_1$, $y = x_1 + \mu y_1$, $z = \mu z_1$ формула (1.5) при $z_1=0$ принимает вид

$$(1.6) \quad \varphi(x, y, 0) = -\frac{1}{2\pi\mu} \int_{\sigma} \frac{v(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}}$$

Здесь $v(\xi, \eta) = v_1[\xi_1(\xi, \eta), \eta_1(\xi, \eta)]$, $\sigma = s + \delta_1 + \delta_2$, причем $s \in S$, $\delta_1 \in \Delta_1$, $\delta_2 \in \Delta_2$; области S , Δ_1 и область интегрирования σ показаны на фиг. 2.

В дальнейшем будем считать, что кромки крыла OA, OB, CA и CB в характеристических переменных заданы соответственно уравнениями $x = \Psi(y)$, $y = \Psi(x)$, $x = \chi(y)$, $y = \chi(x)$.

Зададим теперь каким-либо образом значения v в Δ_1 и Δ_2 , где они пока неизвестны, и вычисленную по формуле (1.6) функцию обозначим через $\varphi_0(x, y)$. Очевидно, что разность

$$(1.7) \quad \varphi^* = \varphi - \varphi_0$$

которая в силу условия (1.4) известна и равна $-\varphi_0$ в Δ_i , представима оператором типа (1.6) с плотностью

$$v^*(x, y) = \begin{cases} r_i(x, y), & (x, y) \in \Delta_i \\ 0, & (x, y) \in S \end{cases}$$

также неизвестной пока в Δ_i .

Если определить функции $\omega_i(x, y)$ операторами типа (1.6) с плотностями $v_i(x, y)$, заданными в виде

$$v_i(x, y) = \begin{cases} r_i(x, y), & (x, y) \in \Delta_i \\ 0, & (x, y) \notin \Delta_i \end{cases}$$

то вследствие линейности этих операторов функцию $\varphi^*(x, y)$ можно представить суммой $\varphi^* = \omega_1 + \omega_2$.

Обозначим значения ω_1 в Δ_1 через ω_{11} , значения ω_1 вне Δ_1 через ω_{12} , значения ω_2 в Δ_2 через ω_{22} и значения ω_2 вне Δ_2 через ω_{21} . Тогда очевидно, что

$$(1.8) \quad \omega_{11}(x, y) + \omega_{21}(x, y) = -\varphi_0(x, y), \quad (x, y) \in \Delta_1$$

$$\omega_{12}(x, y) + \omega_{22}(x, y) = -\varphi_0(x, y), \quad (x, y) \in \Delta_2$$

$$(1.9) \quad \omega_{12}(x, y) + \omega_{21}(x, y) = \varphi^*(x, y), \quad (x, y) \in S$$

Пользуясь тем, что плотности $v_i = 0$ вне Δ_i , можно установить зависимости

$$(1.10) \quad \omega_{12} = A\omega_{11}, \quad \omega_{21} = B\omega_{22}$$

посредством операторов A и B , к построению которых перейдем ниже.

После подстановки (1.10) в (1.8) получим линейную систему операторных уравнений относительно функций ω_{11} и ω_{22} :

$$\omega_{11} + B\omega_{22} = -\varphi_0, \quad (x, y) \in \Delta_1$$

$$A\omega_{11} + \omega_{22} = -\varphi_0, \quad (x, y) \in \Delta_2$$

из которой находим следующие операторные уравнения относительно ω_{11} и ω_{22} :

$$(1.11) \quad \omega_{11} - BA\omega_{11} = -\varphi_0 + B\varphi_0, \quad (x, y) \in \Delta_1$$

$$(1.12) \quad \omega_{22} - AB\omega_{22} = -\varphi_0 + A\varphi_0, \quad (x, y) \in \Delta_2$$

После получения решения этих уравнений по формулам (1.10), (1.9) и (1.7) можно определить искомые значения потенциала скорости на крыле.

Заметим, что в случае крыла, симметричного относительно плоскости $y_1 = 0$, достаточно решить одно из уравнений (1.11)–(1.12), так как $\omega_{22}(x, y) = \omega_{11}(y, x)$.

Найдем операторы A и B . Запишем интегральное представление $\omega_1(x, y)$ в виде

$$\omega_1(x, y) = -\frac{1}{2\pi\mu} \int_0^\pi \int_0^y \frac{v_1(\xi, \eta) d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}}$$

Рассматривая его как двукратное интегральное уравнение Абеля относительно $v_1(x, y)$, при условии, что $\omega_1(x, 0) = 0$, найдем в результате об-

ращения

$$v_1(x, y) = -\frac{2\mu}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \int_0^y \frac{\omega'_{1\eta}(\xi, \eta) d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}}$$

Отсюда в силу условий (1.10) следует, что при $y \geq \Psi(x)$

$$\int_0^y \frac{\omega_{1\eta}(x, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta = 0$$

или

$$(1.13) \quad \int_{\Psi(x)}^y \frac{\omega'_{12\eta}(x, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta = - \int_0^{\Psi(x)} \frac{\omega'_{11\eta}(x, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta$$

Так как (1.13) представляет собой однократное уравнение Абеля относительно функции $\omega_{12}'(x, y)$ (x в уравнении является параметром), то после его обращения и ряда преобразований получим

$$(1.14) \quad \omega_{12}(x, y) = A\omega_{11} = \frac{\sqrt{y-\Psi(x)}}{\pi} \int_0^{\Psi(x)} \frac{\omega_{11}(x, \eta) d\eta}{(y-\eta)\sqrt{\Psi(x)-\eta}}$$

Таким же способом можно построить и оператор B . Однако в случае симметричного крыла, в силу того что $\omega_{21}(x, y) = \omega_{12}(y, x)$, непосредственно из (1.14) следует

$$(1.15) \quad \omega_{21}(x, y) = B\omega_{22} = \frac{\sqrt{x-\Psi(y)}}{\pi} \int_0^{\Psi(y)} \frac{\omega_{22}(\xi, y) d\xi}{(x-\xi)\sqrt{\Psi(y)-\xi}}$$

Используя в (1.11) найденные значения операторов, получим следующее интегральное уравнение для $\omega_{11}(x, y)$:

$$(1.16) \quad \begin{aligned} \omega_{11}(x, y) - \frac{\sqrt{x-\Psi(y)}}{\pi^2} \int_0^{\Psi(y)} \int_0^{\Psi(\xi)} \sqrt{\frac{y-\Psi(\xi)}{\Psi(y)-\xi}} \frac{\omega_{11}(\xi, \eta) d\eta d\xi}{(x-\xi)(y-\eta)\sqrt{\Psi(\xi)-\eta}} = \\ = -\varphi_0(x, y) + \frac{\sqrt{x-\Psi(y)}}{\pi} \int_0^{\Psi(y)} \frac{\varphi_0(\xi, y) d\xi}{(x-\xi)\sqrt{\Psi(y)-\xi}}, \quad 0 \leq y \leq \Psi(x) \end{aligned}$$

В этом интегральном уравнении переменная область интегрирования ограничена линиями $\eta=0$, $\eta=\Psi(\xi)$ и $\xi=\Psi(y)$. Отличие от обычного двумерного уравнения Вольтерра состоит в том, что внеинтегральные члены — искомая функция и известная правая часть — определяются в точках, лежащих вне области интегрирования. Однако исследование его можно выполнить известными стандартными методами функционального анализа.

Так как для дозвуковой передней кромки $0 \leq \Psi'(y) < 1$, то для любых ограниченных значений аргумента можно указать такое положительное число $k < 1$, что $\Psi(y) < ky$. Поэтому интегральный оператор $U=AB$ уравнения (1.16) есть линейный непрерывный оператор с нормой

$$\|U\|_c = \max_{x, y} \int_0^{\Psi(y)} \int_0^{\Psi(\xi)} |K(x, y, \xi, \eta)| d\eta d\xi \leq q =$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \max_{x,y} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\Psi[\Psi(y)]}{y-\Psi[\Psi(y)]}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\Psi(y)}{x-\Psi(y)}} \leq \\ \leq \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} < 1$$

Здесь $K(x, y, \xi, \eta)$ — ядро уравнения (1.16).

На основании теоремы Банаха [7, стр. 211] оператор $J-U$ имеет непрерывный обратный оператор, и решение уравнения (1.16) можно найти методом последовательных приближений со следующей оценкой: если ω_{11} — точное решение, $\omega_{11}^{(n)}$ — n -е приближение, то

$$\|\omega_{11} - \omega_{11}^{(n)}\| \leq \frac{q^n}{1-q} \|\omega_{11}^{(1)} - \omega_{11}^{(0)}\|, \quad n=1; 2 \dots$$

при любом начальном приближении $\omega_{11}^{(0)}$.

Очевидно, что при решении конкретных задач необходимо привлекать приближенные методы квадратур, так как последние, за редкими исключениями, не могут быть выполнены точно.

К числу таких исключений относится задача о плоском треугольном крыле, которая рассмотрена здесь в качестве примера. Выбор этого примера обусловлен также и тем, что для него известно точное решение, полученное методом конических течений в [4].

Обозначим угол при вершине крыла через 2γ . Тогда уравнения передних кромок в характеристических переменных будут $y=kx$ и $x=ky$, причем $\mu \operatorname{tg} \gamma = (1-k)/(1+k)$, $k < 1$.

Если крыло составляет с направлением движения угол β , то на крыле $\partial\varphi/\partial z_1 = -V\beta$.

Функцию φ_0 определим, полагая $v = -V\beta$ всюду в области, заключенной между линиями Маха. Получим $\varphi_0 = (2V\beta/\pi\mu) \sqrt{xy}$.

Подставляя в уравнение (1.16) $-\varphi_0 + B\varphi_0 = -(2V\beta/\pi\mu) \sqrt{y(x-ky)}$ и полагая $\omega_{11}(x, y) = -(2V\beta/\pi\mu) \sqrt{y(x-ky)} F_{11}(y/x)$, получим для $F_{11}(t=y/x)$ обычное уравнение Фредгольма

$$F_{11}(t) - \frac{t}{\pi^2} \int_0^k \frac{M(t) - M(\tau)}{t - \tau} g(\tau) F_{11}(\tau) d\tau = 1 \\ g(\tau) = \sqrt{\frac{\tau(1-k\tau)}{k-\tau}}, \quad M(t) = \int_0^k \frac{g(\tau) d\tau}{1-t\tau}, \quad 0 \leq t \leq k$$

Приближенное решение этого уравнения можно представить в виде

полинома $F_{11}(t) = \sum_{n=0}^N a_n t^n$ со следующими значениями коэффициентов,

определенных с точностью до членов $O(k^4)$: $a_0=1$, $a_1=3k^3/16$, $a_2=5k^4/32$, $a_3=O(k^5), \dots$

По формуле (1.14)

$$\omega_{12}(x, y) = -\frac{2V\beta}{\pi^2\mu} \sqrt{y-ky} \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{x^n} \int_0^{kx} \frac{\eta^n}{y-\eta} \sqrt{\frac{x-k\eta}{kx-\eta}} d\eta$$

Обозначим

$$\xi(t) = t \sqrt{1-kt} \sum_{n=0}^{\infty} a_n R_n(t)$$

$$R_n(t) = \frac{2k^{n+1}}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2(n+1)} \theta}{1-kt \sin^2 \theta} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta, \quad k < t < \frac{1}{k}$$

тогда $\omega_{12} = -(2V\beta/\pi\mu) \sqrt{xy} \xi(1/t)$ и для точек $M(x, y) \in S$

$$\varphi(x, y) = \varphi_0(x, y) + \omega_{12}(x, y) + \omega_{21}(x, y) = \frac{2V\beta}{\pi\mu} \sqrt{xy} \zeta(t),$$

$$\zeta(t) = 1 - \xi(t) - \xi\left(\frac{1}{t}\right)$$

Коэффициент подъемной силы

$$C_{z1} = \frac{2}{\operatorname{tg} \gamma} \int_{-\operatorname{tg} \gamma}^{\operatorname{tg} \gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \left(\frac{y_1}{x_1} \right) d \left(\frac{y_1}{x_1} \right) = \frac{4}{V\mu \operatorname{tg} \gamma} \int_k^{1/k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t) \frac{dt}{(1+t)^2}$$

Так как $\partial \varphi / \partial x_1 = \partial \varphi / \partial x + \partial \varphi / \partial y$, то

$$C_{z1} = \frac{8\beta}{V\mu \operatorname{tg} \gamma} \left[\frac{1}{2} \int_k^{1/k} \frac{\zeta(t) dt}{(1+t) \sqrt{t}} + \int_k^{1/k} \frac{(1-t) \sqrt{t} d\zeta}{(1+t)^2 dt} \right]$$

Преобразуем второй интеграл. Интегрируя его по частям и учитывая, что $\zeta(k) = \zeta(1/k) = 0$, получим

$$(1.17) \quad C_{z1} = \frac{32\beta}{\pi\mu^2 \operatorname{tg} \gamma} J(k)$$

$$(1.18) \quad J(k) = \int_k^{1/k} \frac{\sqrt{t} \zeta(t)}{(1+t)^3} dt = \int_k^{1/k} \frac{\sqrt{t}}{(1+t)^3} [1 - 2\xi(t)] dt$$

Приближенные значения $J_*(k)$, вычисленные по формуле (1.18) при условии, что в представлении $F_{11}(t)$ в виде полинома удержаны первых три члена, приведены ниже:

k	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
J_*	0,39270	0,28846	0,20695	0,14300	0,09297
J	0,39270	0,28846	0,20736	0,14474	0,09706

Для сравнения во второй строке приведены точные значения, вычисленные по формуле

$$J(k) = \frac{\pi}{4} \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^2 \frac{1}{E(2\sqrt{k}/(1+k))}$$

Здесь $E(k_1)$ — полный эллиптический интеграл второго рода.

Эта формула получена из решения задачи методом конических течений [4, 6].

2. Расчет течения на части крыла, расположенной в зоне влияния вихревой пелены. Для рассматриваемого крыла (фиг. 1) влияние вихревой пелены распространяется на область, ограниченную конусом Маха с вершиной в точке C_1 . Потенциал течения в точках крыла, находящихся внутри этого конуса, нельзя непосредственно вычислить по формулам (1.5) или (1.6), так как области интегрирования будут содержать части областей D и Σ с неизвестными значениями производной $\partial \varphi / \partial z_1$.

Зададим каким-либо образом эту функцию на части вихревой пелены, ограниченной задними кромками и характеристиками AN и BN (фиг. 3). Для определенности будем полагать, что производная $\partial\varphi/\partial z_1$ продолжена из S в Σ непрерывно.

Изложенным выше методом рассчитаем течение, вызванное движением «крыла», составленного из S и Σ' . Обозначим потенциал этого течения через Φ и рассмотрим разность $\Phi^\circ = \Phi - \Phi_0$, где Φ — потенциал действительного течения.

В характеристических переменных функцию Φ° можно представить интегралом типа (1.6) с некоторой плотностью v° . Очевидно, что вне характеристического конуса с вершиной в точке C_1 функция Φ° тождественно равна нулю. Поэтому в системе координат (x_2, y_2) , полученной из (x, y) параллельным переносом начала координат в точку C , найдем

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi^\circ(x_2, y_2) \\ \Phi^\circ(x_2, y_2) \end{array} \right\} = -\frac{1}{2\pi\mu} \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ \begin{array}{l} v^\circ(\xi_2, \eta_2) \\ \tau(\xi_2, \eta_2) \end{array} \right\} \frac{d\eta_2 d\xi_2}{\sqrt{(x_2 - \xi_2)(y_2 - \eta_2)}}$$

$$\Phi^\circ = \partial\Phi^\circ/\partial x_1 = \partial\Phi^\circ/\partial x_2 + \partial\Phi^\circ/\partial y_2, \quad \tau(\xi_2, \eta_2) = v_{\xi_2}^\circ + v_{\eta_2}^\circ$$

Заметим, что при выводе второй формулы (2.1) из первой было использовано условие непрерывности функции $v^\circ(\xi, \eta)$ в задних кромках крыла. В соответствии с принципом Жуковского — Чаплыгина это дополнительное условие обеспечивает единственность задачи обтекания крыла сверхзвуковым потоком, когда сказывается влияние вихревой пелены.

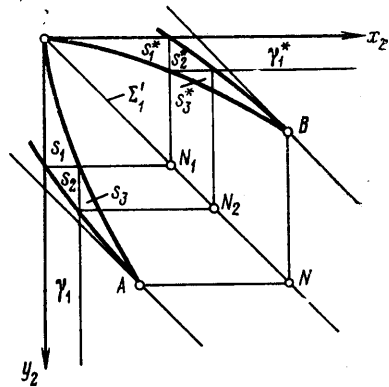
Дальнейшей целью является определение функции $\Phi = \partial\varphi/\partial x_1$ на рассматриваемой части крыла. Многократными отражениями от кромок крыла характеристических линий, исходящих из точки C_1 , разделим рассматриваемую область на ряд под областей и обозначим их в плоскости характеристических переменных (фиг. 3) через s_n и s_n^* , $n=1; 2, \dots$

Будем рассматривать второе уравнение (2.1) как интегральное уравнение относительно $\tau(x, y)$, опустив в дальнейшем, там где это не вызовет недоразумений, индекс у независимых переменных. Решение уравнения получим путем двукратного применения формулы обращения интегрального уравнения Абеля. При условии $\Phi^\circ(x, 0) = 0$, справедливость которого очевидна, найдем

$$(2.2) \quad \tau(x, y) = -\frac{2\mu}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\Phi_{\eta}^{\circ'}(\xi, \eta) d\eta d\xi}{\sqrt{(y-\eta)(x-\xi)}}$$

Так как для точек $M_1(x, y) \in s_1$ по определению $\tau(x, y) = 0$, то из (2.2) следует, что

$$\int_0^y \frac{\Phi_{\eta}^{\circ'}(x, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta = 0, \quad X_H(x) \leq y \leq n_1$$



Фиг. 3

$$\int_{x_H(x)}^y \frac{\Phi_{\eta}^{\circ'}(x, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta = F(x, y) \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} F(x, y) &= - \left(\int_0^{x_b(x)} + \int_{x_b(x)}^{x_H(x)} \right) \frac{\Phi_{\eta}^{\circ'}(x, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta = \\ &= - \int_0^{x_b(x)} \frac{\Phi_{\eta}^{\circ'}(x, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta + \int_{x_b(x)}^{x_H(x)} \frac{\Phi_{\eta}^{\circ'}(x, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta \end{aligned}$$

Здесь и далее n_1 — ордината точки N , $y = \chi_n(x)$, $y = \chi_b(x)$ — уравнения кромок CA и CB , $y = \Psi_n(x)$, $y = \Psi_b(x)$ — кромки OA и OB в системе координат (x_2, y_2) .

Рассматривая теперь (2.3) как уравнение Абеля с известной правой частью, найдем

$$\begin{aligned} \Phi^{\circ}(x, y) &= - \frac{1}{\pi} \int_{x_H(x)}^y \int_0^{x_b(x)} \frac{\Phi_{\xi}^{\circ'}(x, \xi) d\xi d\eta}{\sqrt{(\eta-\xi)(y-\eta)}} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{x_H(x)}^y \int_{x_b(x)}^{x_H(x)} \frac{\Phi_{\xi}^{\circ'}(x, \xi) d\xi d\eta}{\sqrt{(\eta-\xi)(y-\eta)}} - \Phi_0[x, x_H(x)] \quad (x_H(x) \leq y \leq n_1) \end{aligned}$$

Интегралы в правой части преобразуем путем изменения порядка интегрирования и интегрирования по частям. В результате, приняв также во внимание, что вследствие симметрии течения $\Phi^{\circ}(x, y) = \Phi^{\circ}(y, x)$, получим для функции $\Phi(x, y) = \Phi_0(x, y) + \Phi^{\circ}(x, y)$ следующее интегральное уравнение:

$$\Phi(x, y) - \int_0^{x_b(x)} K(y, \eta; x) \Phi(\eta, x) d\eta = R(x, y) \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} R(x, y) &= \Phi_0(x, y) - \int_0^{x_H(x)} K(y, \eta; x) \Phi_0(\eta, x) d\eta \\ K(y, \eta; x) &= \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{y - x_H(x)}}{(y - \eta) \sqrt{x_H(x) - \eta}} \end{aligned}$$

Интегральный оператор уравнения есть линейный непрерывный оператор с нормой

$$\begin{aligned} \|A\|_c &= \max_{x, y} \int_0^{x_b(x)} |K(y, \eta; x)| d\eta = \\ &= \frac{2}{\pi} \max_x \arctg \frac{1 - b^{1/4}(x)}{2b^{1/4}(x)} < 1, \quad b = \frac{x_H(x) - x_b(x)}{x_H(x)} \end{aligned}$$

поэтому однозначная разрешимость уравнения следует из упоминавшейся уже теоремы Банаха, а решение можно найти методом итераций.

При определении $\Phi^\circ(M_2)$ по (2.4), когда $M_2 \in s_2$, область интегрирования будет содержать часть полуполосы $\gamma_1 \subset D$, в которой функция $\tau(x, y)$ неизвестна. Используя, однако, условие $\Phi^\circ(L_1) = 0$, $L_1 \in \gamma_1$, можно, следуя [2, 3], найти $\tau(L_1)$ и после подстановки ее в (2.4) получить

$$(2.5) \quad \Phi(M_2) = -\frac{1}{2\pi\mu} \int_{\Psi_H^{-1}(y)}^x \int_0^y \frac{\tau(\xi, \eta) d\eta d\xi}{V(y-\eta)(x-\xi)}$$

Здесь $\Psi_H^{-1}(y)$ — функция, обратная $y = \Psi_H(x)$.

В этой формуле переменный предел интегрирования по η можно заменить на постоянный n_1 , так как $\tau(\xi, \eta) = 0$ в s_2 . В оставшейся области интегрирования функция $\tau(\xi, \eta)$ определяется формулой (2.2) через значения $\Phi^\circ(M_1)$, $M_1 \in s_1 \cup \Sigma_1' \cup s_1^*$.

Учитывая, что $\Phi^{\circ\prime}_\eta(0, \eta) = 0$, преобразуем (2.2) к виду

$$\tau(\xi, \eta) = -\frac{2\mu}{\pi} \int_0^\xi \int_0^\eta \frac{\Phi_{\eta'\xi'}^{\circ\prime\prime}(\xi', \eta') d\eta' d\xi'}{V(\eta-\eta')(\xi-\xi')}$$

и подставим в (2.5). Тогда

$$\Phi^\circ(M_2) = \frac{1}{\pi^2} \int_{\Psi_H^{-1}(y)}^x \int_0^{n_1} \int_0^\eta \int_0^\xi \frac{\Phi_{\eta'\xi'}^{\circ\prime\prime}(\xi', \eta') d\eta' d\xi' d\eta d\xi}{V(\eta-\eta')(\xi-\xi')(y-\eta)(x-\xi)}$$

Изменим здесь порядок интегрирования по η и η' , выполним квадратуру по η , затем изменим порядок интегрирования по ξ и ξ' и выполним квадратуру по ξ . В результате придем к представлению $\Phi^\circ(M_2)$ в виде двукратного интеграла с подынтегральной функцией, содержащей производную $\Phi_{\eta'\xi'}^{\circ\prime\prime}(\xi', \eta')$. Выполнив интегрирование по η' по частям, получим формулу для вычисления $\Phi^\circ(M_2)$ через значения $\Phi^\circ(M_1)$:

$$(2.6) \quad \Phi^\circ(M_2) = \frac{V\overline{y-n_1}}{\pi} \int_0^{n_1} \frac{1}{(y-\eta)Vn_1-\eta} \times \\ \times \left[\Phi^\circ(x, \eta) - \frac{Vx - \Psi_H^{-1}(y)}{\pi} \int_0^{\Psi_H^{-1}(y)} \frac{\Phi^\circ(\xi, \eta) d\xi}{(x-\xi)V\Psi_H^{-1}(y)-\xi} \right] d\eta$$

Непосредственно из фиг. 3 видно, что для определения $\Phi^\circ(x, y)$ в точках $M_n \in s_n$, $n=3; 4, \dots$, нужно применять описанные алгоритмы вычисления $\Phi^\circ(M_1)$ или $\Phi^\circ(M_2)$.

Автор выражает благодарность Г. Ю. Степанову за обсуждение статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Теория сверхзвуковых течений газа. — В кн.: Механика в СССР за 50 лет, т. 2. М.: Наука, 1970.
2. Красильникова Е. А. Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. М.—Л.: Гостехиздат, 1952.
3. Красильникова Е. А. Тонкое крыло в сжимаемом потоке. М.: Наука, 1978.
4. Гуревич М. И. О подъемной силе стреловидного крыла в сверхзвуковом потоке. — ПММ, 1946, т. 10, вып. 4.
5. Белоцерковский С. М., Кудрявцева Н. А., Федотов Б. Н. Метод расчета аэродинамических характеристик крыльев сложной формы в плане с дозвуковыми передними и задними кромками. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 2.
6. Франкль Ф. И., Карпович Е. А. Газодинамика тонких тел. М.—Л.: Гостехиздат, 1948.
7. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

Казань

Поступила в редакцию
14.1.1980