

УДК 533.6.011.72—1

**АНАЛИЗ ВЫХОДА ОДНОМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО
ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА НА АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ**

ДЕМЬЯНОВ Ю. А., ИГОШИН А. И.

В работе представлены асимптотические решения, описывающие формирование одномерных течений вязкого теплопроводного газа при малых и больших временах. Из их сравнения с приведенными в работе численными расчетами системы уравнений Навье — Стокса, а также путем оценки отношения последующего члена асимптотического разложения к предыдущему найдены критериальные зависимости, определяющие границы применимости полученных решений.

Использование асимптотического решения при малых временах (больших величинах числа Струхала) позволяет, в частности, проанализировать особенности в задачах с разрывными начальными данными с целью дальнейшего численного решения уравнений Навье — Стокса. С некоторого момента численное интегрирование этой системы становится невозможным из-за роста области течения (числа расчетных точек). Приводимые в работе рекомендации по времени выхода на предельное решение, соответствующее большим числам Рейнольдса $Re \rightarrow \infty$, позволяют продолжить расчет на основе упрощенных схем. Ниже в качестве характерных примеров рассмотрены: 1) задача о приложении к газу постоянного теплового потока q_w , 2) задача о распаде произвольного разрыва (течение в ударной трубе при мгновенном разрыве диафрагмы).

1. Анализ течений газа проводится на основе исследования системы уравнений Навье — Стокса, имеющей в безразмерной форме вид

$$Sh \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

(1.1)

$$Sh \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho v \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x} \right) +$$

$$+ \frac{\gamma - 1}{\gamma} Sh \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} v \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\gamma - 1}{Re} M^2 \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2$$

$$Sh \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$Sh = x_x / (v_x t_x), \quad Pr = \gamma R \mu / [(\gamma - 1) \lambda]$$

$$M = v_x / a_x, \quad Re = \rho_x v_x^2 t_x / \mu_x$$

Газ считается совершенным и подчиняющимся уравнению состояния $p = \rho RT$, параметры газа отнесены к характерным значениям, помеченным индексом x , ρ — плотность газа, v — его скорость, p — давление, T — температура, a — скорость звука, x — эйлера координата, t — время, μ — суммарный коэффициент вязкости, λ — коэффициент теплопроводности, γ — показатель адиабаты, $R = R' / R_x$ — безразмерная газовая постоянная (штрихом помечаются размерные величины), Pr — число Прандтля, M — число Маха, Sh — число Струхала.

Используется численный алгоритм решения (1), приведенный в [1] и основанный на «полууявной» разностной схеме решения уравнений

Навье — Стокса в координатах

$$\theta = \sqrt{t}, \quad z = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{x_w(t)}^x \rho dx$$

где $x_w(t)$ — линия отмеченных частиц (в задаче 1 — координата поверхности приложения теплового потока, в задаче 2 — линия контактного разрыва). Для дальнейшего анализа в рамках постановки [1] проведены расчеты задач 1 и 2 в широком диапазоне определяющих параметров. В задаче 1 безразмерный тепловой поток q_w менялся вплоть до 100, число Pr — от 0,5 до 2; в задаче 2 газ имел как одинаковую, так и разные величины показателя адиабаты по обе стороны от контактного разрыва, использовались различные степенные зависимости μ и λ от T .

2. При численном изучении течений газа с разрывными начальными данными необходимо предварительное исследование движения газа в окрестности $t=0$. Такой анализ проведен в [2], где параметры течения представлялись в виде степенного ряда по положительным степеням t с коэффициентами, зависящими от переменной z и находившимися путем последовательного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений пятого порядка. В [3] показано, что, когда число Маха мало (как в задачах 1 и 2), при $t \ll 1$ решение системы уравнений, описывающих течение, значительно упрощается.

Найдем решение задач 1 и 2 при $t \ll 1$, что соответствует большим величинам текущего числа Струхала

$$\text{Sh}_i = p_x / (\mu_x t') \approx t^{-1} \quad (t_x = p_x / \mu_x)$$

Как показано в [3], при $\text{Sh} \rightarrow \infty$ задачи движения вязкого теплопроводного газа относятся к задачам регулярных возмущений [4] и их решение находится в виде степенного ряда от Sh^{-1} , где показатели степеней определяются совместным анализом уравнений (1.1) и граничных условий. В частном случае задач 1 и 2 решение имеет вид

$$(2.1) \quad f(x, t, \text{Sh}) = f_0(x, t) + \text{Sh}^{-1} f_1(x, t) + \text{Sh}^{-2} f_2(x, t) + \dots$$

При этом, так как $M \ll 1$, уравнения для ρ_k, T_k, v_k ($k=0, 1, 2, \dots$) удается разрешить последовательно в порядке записи уравнений (1.1).

В результате в задаче 1 при приложении теплового потока к неподвижной границе газа решение имеет вид

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \rho &= \rho^0 + \text{Sh}^{-2} \rho_2(x, t) + \dots, \quad T = T^0 + \text{Sh}^{-1} T_1(x, t) + \dots \\ v &= \text{Sh}^{-1} v_1(x, t) + \dots \\ \rho_2(x, t) &= \frac{\rho^0}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\theta \int_0^\infty d\xi \int_0^\theta \frac{\beta_2}{[\beta_1^2(\theta-\tau)]^{3/2}} \times \\ &\times \left\{ (x+\xi) \exp \left[-\frac{(x+\xi)^2}{4\beta_1^2(\theta-\tau)} \right] - (x-\xi) \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\beta_1^2(\theta-\tau)} \right] \right\} \times \\ &\times \text{erfc} \left(\frac{\xi}{2\alpha_1 \sqrt{\tau}} \right) d\tau \end{aligned}$$

$$T_1(x, t) = \frac{2\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \left[-x \int_{x/(2\alpha_1\sqrt{t})}^{\infty} \exp(-y^2) dy + \alpha_1 \sqrt{t} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha_1^2 t}\right) \right]$$

$$v_1(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^x \int_0^t \frac{\beta_2}{\sqrt{\beta_1^2(t-\tau)}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\beta_1^2(t-\tau)}\right] - \right. \\ \left. - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4\beta_1^2(t-\tau)}\right] \right\} \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\alpha_1\sqrt{\tau}}\right) d\xi d\tau$$

$$\alpha_1 = \left(\frac{\gamma \mu^\circ}{\rho^\circ \operatorname{Pr} \operatorname{Sh} \operatorname{Re}} \right)^{1/2}, \quad \alpha_2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\operatorname{Pr} \operatorname{Sh} \operatorname{Re}}{\lambda^\circ} q_w$$

$$\beta_1 = \left(\frac{\mu^\circ}{\rho^\circ \operatorname{Sh} \operatorname{Re}} \right)^{1/2}, \quad \beta_2 = \frac{\alpha_2}{\gamma M^2 \operatorname{Sh}}$$

Индексом ноль сверху обозначены начальные значения параметров. Коэффициенты α_1 , α_2 , β_1 , β_2 — конечны, так как из условия невырожденности решаемой задачи следует [3], что $\operatorname{Re} \sim \operatorname{Sh}^{-1}$, $M \sim \operatorname{Sh}^{-1/2}$.

В задаче 2 решение имеет вид

$$(2.3) \quad \rho = \rho^\circ + \operatorname{Sh}^{-1} \rho_1(x, t) + \dots, \quad T = T^\circ + \operatorname{Sh}^{-1} T_1(x, t) + \dots \\ v = v_0(x, t) + \dots$$

При $\gamma_i = \gamma$, $i=1, 2$ (индекс 1 обозначает параметры при $x < 0$, 2 — при $x > 0$):

$$\rho_{1i}(x, t) = \rho_i^\circ C_i \int_0^{\infty} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\alpha_i\sqrt{\tau}}\right) d\tau$$

$$T_{1i}(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^x \int_0^t \frac{1}{\sqrt{b_i(t-\tau)}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4b_i(t-\tau)}\right] - \right. \\ \left. - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4b_i(t-\tau)}\right] \right\} \left\{ \beta_{1i} \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\alpha_i\sqrt{\tau}}\right) + \right. \\ \left. + \beta_{2i} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\alpha_i\sqrt{\tau}}\right) \right]^2 \right\} d\xi d\tau + \sqrt{\frac{b_i}{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi_i(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left(-\frac{x^2}{4b_i(t-\tau)}\right) d\tau$$

$$v_{0i}(x, t) = C_i \int_x^{(-1)^i \infty} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\alpha_i\sqrt{t}}\right) dz$$

$$\varphi_2 = \sqrt{\frac{b_1}{b_2}} \varphi_1 = (f_2 - f_1) \left(\sqrt{\frac{b_2}{b_1}} - 1 \right)^{-1}$$

$$f_i = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^t \frac{\xi}{[b_i(t-\tau)]^{3/2}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4b_i(t-\tau)}\right) \times$$

$$\times \left\{ \beta_{1i} \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\alpha_i\sqrt{\tau}}\right) + \beta_{2i} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\alpha_i\sqrt{\tau}}\right) \right]^2 \right\} d\xi d\tau$$

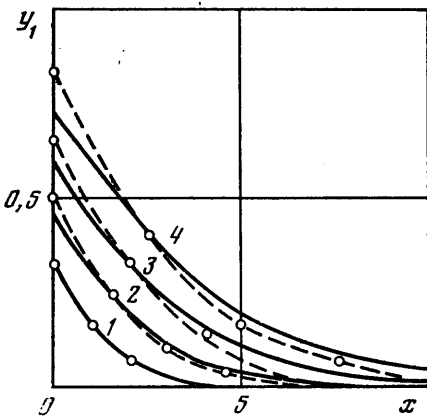
$$\mu = \mu^\circ T^n, \quad C_2 = (p_1^\circ - p_2^\circ) / [\mu_2^\circ (1 + \alpha_2/\alpha_1)], \quad C_1 = -C_2 \alpha_2 / \alpha_1$$

$$\alpha_i = \frac{\mu_i^\circ}{\rho_i^\circ \operatorname{Sh} \operatorname{Re}}, \quad b_i = \frac{\gamma \mu_i^\circ}{\rho_i^\circ \operatorname{Pr} \operatorname{Sh} \operatorname{Re}}$$

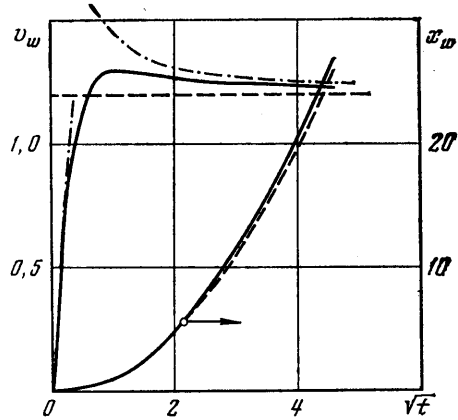
$$\beta_{2i} = \frac{(\gamma-1) M^2 \mu_i^\circ C_i^2}{\rho_i^\circ \operatorname{Re} (T^\circ)^{n-1}}, \quad \beta_{1i} = (\gamma-1) T^\circ C_i$$

Аналогично можно найти и следующие члены разложений (2.2) и (2.3).

Границы применимости полученных решений определяются как непосредственным сравнением с численным решением (1.1), так и с по-



Фиг. 1



Фиг. 2

мощью оценки $f_i/f_0 < \varepsilon$, где f_0 — главная часть разложения, f_i — добавка к нему, а ε — задаваемая точность. Такая оценка предполагает хорошую сходимость асимптотического разложения, ее достаточно проводить в наиболее характерных точках течения.

Например, наибольшее изменение параметров газа в задаче 1 происходит при $x=0$, поэтому из (2.2) следует, что решение для ρ с точностью ε применимо при

$$(2.4) \quad \operatorname{Sh}_i \leq \left[\frac{3\varepsilon\sqrt{\pi}(1+\sqrt{\gamma/\operatorname{Pr}})\sqrt{\gamma/\operatorname{Pr}}}{8(\gamma-1)q_w} \right]^{3/2}$$

При этом справедливы и соответствующие решения для T и v . Непосредственное сравнение (2.2) с численным решением уравнений Навье — Стокса подтверждает оценку (2.4), что видно, например, из фиг. 1, где приведено распределение величины $Y_1 = (T(x, t) - T^\circ) / q_w$ в различные

моменты времени (второй член в (2.2) обозначен штриховыми линиями и точками, численное решение — сплошными линиями, кривой 1 соответствует $t=1,0$; 2 — $t=2,25$; 3 — $t=4,0$; 4 — $t=6,25$).

В приведенном здесь случае, когда $q_w=0,56$, $Pr=1$, $\gamma=1,4$, $n=1$, точность $\epsilon=0,1$ совпадения численного решения с (2.2) достигается в соответствии с (2.4) при $t \approx 0,83$.

В задаче 2 сравнение второго и первого членов разложения (2.3) для ρ на линии контактного разрыва, где возникают наибольшие градиенты параметров, показывает, что полученное асимптотическое решение справедливо с точностью ϵ при

$$(2.5) \quad Sh_t \leq \frac{4}{3} \epsilon \frac{\sqrt{p_1^{\circ}/p_2^{\circ}+1}}{\sqrt{p_1^{\circ}/p_2^{\circ}-1}}$$

Эта оценка подтверждается непосредственным сравнением (2.3) с численным решением системы (1.1). На фиг. 2 приведены графики скорости v_w и траектории контактного разрыва x_w в зависимости от \sqrt{t} для типичного случая $p_1^{\circ}/p_2^{\circ}=17$, $\gamma=1,4$, $Pr=1$, $n=1$. Здесь сплошными линиями обозначен численный расчет, штрихпунктирная прямая, выходящая из точки 0, обозначает скорость контактного разрыва, определяемую решением (2.3).

3. При достаточно больших временах (больших величинах текущего числа Рейнольдса) диссипативные процессы локализуются в узких зонах типа ударных волн и пограничных слоев и течения описываются методами особых возмущений [4].

Обозначим k -е члены разложений по величине Re^{-1} ($k=0, 1, \dots$), определяющие внутренний теплопроводный и внешний, идеальный в первых приближениях, потоки газа соответственно: $f^{(k)}(x, t)$ и $f_e^{(k)}(x, t)$.

Как показано в [3], анализ задачи 1 при $Re \rightarrow \infty$ подразделяется на два случая. В первом температура и давление в пристеночном, теплопроводном слое ограничены, а его ширина, тепловой поток в нем и индуцированная им скорость имеют порядок $O(Re^{-1/2})$. Во втором случае «сильного» взаимодействия при ширине внутренней, пристеночной зоны порядка $O(1)$ давление, тепловой поток и индуцированная скорость будут порядка $O(1)$, температура в этой зоне порядка $Re^{1/(n+1)}$ и внутреннее разложение имеет вид

$$(3.1) \quad \begin{aligned} p &= p_{\infty}^{(0)} + Re^{-1/(n+1)} p^{(1)} + \dots \\ v &= v_{\infty}^{(0)} + (v_{\infty}^{(0)} - v_w) Pr^{-1/2} f^{n-1} \frac{df}{d\xi} + Re^{-1/(n+1)} v^{(1)} + \dots \\ T &= Re^{1/(n+1)} t^{1/(n+1)} T_{\infty}^{(0)} f + T^{(1)} + \dots \\ \xi &= Re^{(1-n)/2(n+1)} t^{-n/(n+1)} \frac{\mu_{\infty}^{(0)}}{\rho_{\infty}^{(0)} Pr} \int_{x_w}^x \frac{\rho}{\rho_{\infty}^{(0)}} dx \end{aligned}$$

Здесь индекс ∞ обозначает параметры на внешней границе пограничного слоя. Влияние этого слоя на внешнее течение эквивалентно в нулевом приближении движению фиктивного поршня $x=x_{\infty}^{(0)}(t)$ с постоянной скоростью $v_{\infty}^{(0)}$, определяемой соотношением $v_{\infty}^{(0)} p_{\infty}^{(0)} = (\gamma-1)/\gamma q_w$.

Функция f удовлетворяет уравнению и граничным условиям

$$\frac{1}{n+1} \left(f - n \zeta \frac{df}{d\zeta} \right) = \frac{d}{d\zeta} \left(f^{n-1} \frac{df}{d\zeta} \right)$$

$$\left(f^{n-1} \frac{df}{d\zeta} \right)_{\zeta=0} = -\sqrt{\text{Pr}}, \quad f(\infty) = 0$$

Здесь и в (3.1) в качестве характерных величин использовались $\rho_x = \rho_\infty^{(0)}$, $v_x = v_\infty^{(0)} - v_w$, $T_x = T_\infty^{(0)}$, $\mu_x = \mu_\infty^{(0)}$.

Первые члены разложений (3.1) удовлетворяют уравнениям

$$(3.2) \quad t \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} - \frac{n}{n+1} \zeta \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \zeta} = - \frac{2}{f} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(f^{n-1} \frac{df}{d\zeta} \right) \rho^{(1)} -$$

$$- \frac{\rho_\infty^{(0)} \sqrt{\text{Pr}}}{f^2 (v_\infty^{(0)} - v_w)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \zeta}$$

$$t \frac{\partial T^{(1)}}{\partial t} - \frac{n}{n+1} \zeta \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \zeta} = \frac{\gamma-1}{\gamma p_\infty^{(0)}} t^{1/(n+1)} \left(t \frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} - \frac{n}{n+1} \zeta \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \zeta} \right) f +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} (T^{(1)} f^{n-1}) + \frac{1}{n p_\infty^{(0)}} t^{1/(n+1)} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \zeta} \frac{df^n}{d\zeta} +$$

$$+ \frac{(\gamma-1)(v_\infty^{(0)} - v_w) f^{n-1}}{\gamma T_\infty^{(0)}} \left(\frac{d^2 f^n}{d\zeta^2} \right)^2$$

$$t^{1/(n+1)} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \zeta} = - \frac{\rho_\infty^{(0)} (v_\infty^{(0)} - v_w)^2 n \zeta (f - n \zeta df/d\zeta)}{(n+1)^2} \left(1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right)$$

Так как в нулевом приближении внешний поток однороден, то первые члены внешнего разложения удовлетворяют волновому уравнению. Его решение легко определяется с учетом соотношений на возникающей во внешнем потоке ударной волне, а также связи $p_e^{(1)}(0)$ и $v_e^{(1)}(0)$, следующей из непрерывности параметров течения на внешней границе теплопроводной зоны и получающейся интегрированием от 0 до ∞ по ζ второго уравнения (3.2), в котором предварительно исключен член с $\partial p^{(1)}/\partial t$ с помощью первого и третьего уравнений (3.2). Так, например, добавка к главной части давления на стенке имеет вид

$$(3.3) \quad p_w^{(1)} = \frac{\rho_\infty^{(0)} (\gamma-1) q_w \sqrt{\text{Pr}} \mu_\infty^{(0)}}{\gamma p_\infty^{(0)} \sqrt{\pi} \rho_\infty^{(0)} t} \cdot \times$$

$$\times \left\{ \frac{M_\infty [\sqrt{2}(\gamma-1) + \alpha \gamma (1-\text{Pr})/\text{Pr}]}{2[(K\beta^{-1/2}-1)/(K\beta^{-1/2}+1) + M_\infty (\gamma-1/2)]} - \frac{1-\text{Pr}}{\text{Pr}} \right\}$$

$$\alpha = \sqrt{2} (1 + 1/\gamma - \sqrt{2}/\gamma)$$

$$K = \frac{NM_0 + 1}{NM_0 - 1} \quad N = \frac{2(\gamma - 1)M^{\circ 2}}{(\gamma + 1)(M^{\circ 2} + 1)}, \quad \beta = \frac{M_0 - M_v + 1}{M_v - M_0 + 1}$$

$$M^{\circ} = U_0/a^{\circ}, \quad M_0 = U_0/a_e^{(0)},$$

$$M_v = v_e^{(0)}/a_e^{(0)}$$

Здесь U_0 — скорость ударной волны в нулевом приближении, полагаем, что $n=1$.

В задаче 2 при $Re \rightarrow \infty$ [5, 6] температура во внешних зонах справа и слева от $x = x_w(t)$ по физическому смыслу ограничена. Поэтому выполняется

$$(3.4) \quad \begin{aligned} x_w - x_{\infty 2} &\sim O(Re^{-1/2}), & x_w - x_{\infty 1} &\sim O(Re^{-1/2}) \\ x_{\infty 2} - x_{\infty 1} &\sim O(Re^{-1/2}), & \dot{x}_{\infty 1}^{(0)} = \dot{x}_{\infty 2}^{(0)} &= v. \quad (f = df/dt) \end{aligned}$$

Для внешних потоков в нулевом приближении получается известная задача о распаде произвольного разрыва в покоящемся идеальном газе с параметрами за ударной волной p_* , v_* , T_{*1} , T_{*2} [7, 8]. При этом поля температуры во внутренних зонах у контактного разрыва в нулевом приближении оказываются автомодельными и тепловой поток на нем $q_w \sim t^{-1/2} \sim Re^{-1/2}$ [9, 10].

Из (3.4) с учетом связи скоростей фиктивных поршней и контактного разрыва [5], а также непрерывности полного напряжения на линии $x = x_w(t)$ из уравнения количества движения следует отсутствие перепада давления во внутренних зонах с точностью $o(Re^{-1/2})$ и выполняется

$$(3.5) \quad \dot{x}_{\infty 1}^{(1)} - \dot{x}_{\infty 2}^{(1)} = \frac{q_w}{p_*} \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2} Re^{1/2}$$

$$(3.6) \quad \begin{aligned} q_w &= \kappa_0 t^{-1/2}, \quad \kappa_0 = \frac{2\gamma_2(T_{*1} - T_{*2})}{\gamma_2 - 1} \times \\ &\times \left[1 + \frac{\gamma_1(\gamma_2 - 1)}{\gamma_2(\gamma_1 - 1)} \right]^{-1} \left(\frac{p_*}{3\pi Pr} \right)^{1/2} \quad (n=1) \end{aligned}$$

Решение во внешних зонах в первом приближении по-прежнему описывается линеаризованными уравнениями Эйлера. При $\gamma_1 = \gamma_2$ оно нулевое, при $\gamma_1 \neq \gamma_2$ внутренние зоны вызывают во внешнем потоке возмущения порядка $O(Re^{-1/2})$. Причем при $\gamma_2 > \gamma_1$ $\dot{x}_{\infty 2}^{(1)} > 0$ ($q_w < 0$), т. е. увеличивается скорость и давление толкаемого газа при уменьшении скорости и увеличении давления толкающего газа, при $\gamma_2 < \gamma_1$ уменьшается скорость и давление толкаемого газа с увеличением скорости толкающего газа.

Функции $p_e^{(1)}$, $v_e^{(1)}$ определяются аналогично [5]. Так, для приращения давления на линии контактного разрыва при $n=1$ получается

$$(3.7) \quad \begin{aligned} p_{ew}^{(1)} &= Lt^{-1/2}, \quad L = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{a_{*2}} \frac{q_w}{\kappa_1} \left(\frac{T_{*2}}{\gamma_1 \gamma_2 T_{*1}} \right)^{1/2} \\ \kappa &= \frac{K\beta^{1/2} + 1}{K\beta^{1/2}} \left[1 + \left(\frac{\gamma_1 T_{*2}}{\gamma_2 T_{*1}} \right)^{1/2} + 1 - \left(\frac{\gamma_1 T_{*2}}{\gamma_2 T_{*1}} \right)^{1/2} \right]^{-1} \end{aligned}$$

$$M_v = v_*/a_{*2}, \quad M_0 = U_0/a_{*2}$$

Здесь U_0 — скорость ударной волны в нулевом приближении, вид K , β , N тот же, что и в (3.3).

При анализе полученных предельных решений при больших числах Рейнольдса последние можно вводить, например, как $Re_v = \rho_\infty v_\infty^2 t / \mu_\infty$ или $Re_a = \rho_\infty a_\infty^2 t / \mu_\infty$, где параметры берутся на внешней границе диссипативной зоны.

В задаче 1 выход численного решения на асимптотическое решение (3.1) осуществляется при величинах Re_v и Re_a порядка 100 (фиг. 3, Re_a нанесено штриховой линией), при этом с точностью до 1% выполняются асимптотические зависимости

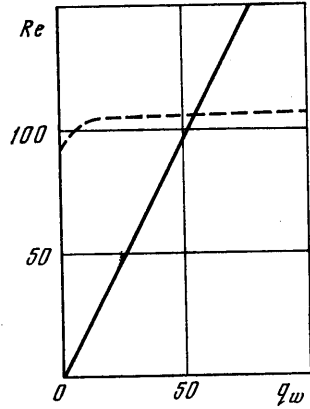
$$q_w = \frac{\gamma \sqrt{2} p_\infty (p_\infty - 1)}{\gamma - 1 [\gamma - 1 + (\gamma + 1) p_\infty]},$$

$$T_w = T_\infty + A \sqrt{t} \quad (A = \text{const})$$

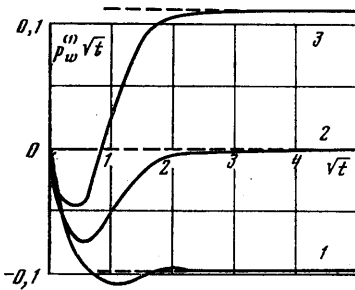
В исследованном диапазоне значений q_w число Re_a , построенное по численным данным, изменяется не более чем на 20%, что делает Re_a удобным критерием выхода на режим $Re \rightarrow \infty$.

Структурная зависимость времени и числа Рейнольдса выхода течения на асимптотический режим от γ , Pr , q_w вытекает из соотношения $p_w^{(1)}(t) / p_w^{(0)} = \varepsilon$, где ε — задаваемая точность, а $p_w^{(1)}(t)$ определяется формулой (3.3).

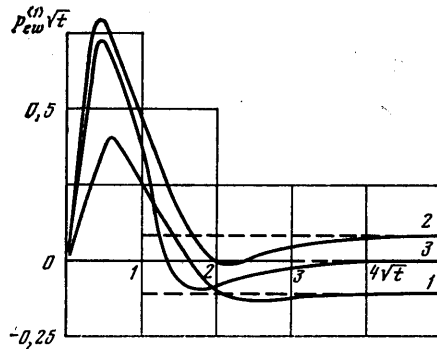
На фиг. 4 показан выход численно найденной величины давления у поверхности приложения теплового потока $q_w = 1$ ($n = 1$) на предельное зна-



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

чение. Здесь штрихами обозначены добавки к давлению, найденные по формуле (3.3), кривые 1, 2, 3 обозначают соответственно случаи $Pr = 0,5; 1; 2$.

В задаче 2 сравнение результатов численного расчета с главной частью асимптотического решения показало, что Re_a , соответствующее выходу на предельный режим, имеет значение ≤ 300 , а $Re_v \leq 800$. При этом выполняется эмпирическая зависимость

$$(3.8) \quad Re_v = 4 \frac{p_1^\circ}{p_2^\circ} \lg \frac{p_1^\circ}{p_2^\circ}$$

Стремление главной части асимптотического решения для скорости контактного разрыва к численному решению продемонстрировано на фиг. 2, где значения $v_w^{(0)}$ показаны штрихпунктиром. Здесь штриховыми линиями нанесены $v_w(t)$ и $x_w(t)$, получаемые из решения для идеального газа. Поведение давления газа на линии $x=x_w(t)$ показано на фиг. 5, где штриховая линия соответствует асимптотическому решению, кривые 1 — случаю $\gamma_2=1,4$, $\gamma_1=1,67$; 2 — $\gamma_2=1,67$, $\gamma_1=1,4$, 3 — $\gamma_2=\gamma_1=1,4$.

Использование выражения (3.7) приводит к более общей по сравнению с (3.8) формуле

$$\text{Re}_v = \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)^2 M_v^2}{\gamma_1 T^*} \left(\frac{\kappa_0 \kappa_1}{\varepsilon} \right)^2$$

справедливой для произвольных p_1°/p_2° , γ_1 , γ_2 .

В проведенных расчетах при выходе течений газа на режимы, соответствующие $\text{Re} \rightarrow \infty$ число Кнудсена, характеризующее разреженность среды, в среднем равно 0,02, при этом реализуется течение со скольжением [11, 12], которое, как известно, успешно описывается системой уравнений Навье — Стокса (1.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Игошин А. И. Формирование одномерных течений теплопроводного вязкого газа. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 4, с. 143.
2. Демьянов Ю. А., Куреев В. Т. К анализу одномерных нестационарных течений газа с учетом теплопроводности и вязкости. — Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 2, с. 3.
3. Демьянов Ю. А. К исследованию одномерных нестационарных течений реального газа (с учетом вязкости и теплопроводности). — В кн.: Газовая и волновая динамика. Вып. 3. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979, с. 42.
4. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967, 310 с.
5. Демьянов Ю. А. О влиянии теплопроводности на формирование течений газа. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 2, с. 21.
6. Goldsworthy F. A. The structure of a contact region. with application to the reflection of a shock from a heat-conducting wall. — J. Fluid Mech., 1959, v. 5, № 1, p. 164.
7. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. 4-е изд. переработ. и доп. М.: Физматгиз, 1963, 727 с.
8. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978, 736 с.
9. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966, 724 с.
10. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967, 599 с.
11. Гэйн Х. Ш. Аэродинамика разреженных газов. — В кн.: Газовая динамика. М.: Изд-во иностр. лит., 1950, с. 310.
12. Основы газовой динамики. М.: Изд-во иностр. лит., 1963, 702 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.I.1980