

УДК 532.5.011+536.252

СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫЕ СКОРОСТИ КОНВЕКЦИИ БЕНАРА И ТЕПЛОПЕРЕДАЧА

ГОЛИЦЫН Г. С., ГРАЧЕВ А. А.

В [1] для безразмерной кинетической энергии K конвекции в горизонтальном слое жидкости была предложена приближенная формула $K \approx a^{-2} R(N-1)$, где a — константа, близкая к 9, R и N — числа Рэлея и Нуссельта. В данной работе показано, что это выражение является точным в линейной и слабонелинейной теории конвекции, когда поля скорости и температуры представляются аналитически [2–4]. Значение a при этом найдено равным 8,76, когда верхняя и нижняя границы слоя — твердые стенки. Далее представлены результаты численных расчетов кинетической энергии конвекции и теплопередачи в широком интервале изменений чисел Рэлея (до 44 000) и Прандтля ($0,025 \leq P \leq 15$). Их анализ показывает, что величина a на самом деле является слабой функцией обоих критериев подобия R и P . Если такое свойство сохраняется и при больших значениях R , то это указывает на некоторую неавтономность средних характеристик конвекции при достаточно больших значениях числа Рэлея. Вместе с тем это обстоятельство помогает понять, почему лабораторные эксперименты дают в зависимости $N \sim R^n$ значения n , обычно слегка меньшие теоретического значения $n = 1/3$.

1. Введение. При лабораторном или численном исследовании конвекции обычно ограничиваются изучением усиления теплопередачи, т. е. зависимости числа Нуссельта N от внешних критериев подобия — чисел Рэлея R и Прандтля P :

$$(1.1) \quad N = \frac{fd}{\rho c_p \chi \Delta T}, \quad R = \frac{\alpha g \Delta T d^3}{\chi \nu}, \quad P = \frac{\nu}{\chi}$$

Здесь f — полный поток тепла, передаваемый жидкости от единицы площади нагретой поверхности, d — толщина слоя жидкости, ρ — плотность, c_p — теплоемкость, χ — температуропроводность, ν — кинематическая вязкость, α — коэффициент теплового расширения, $\Delta T = T_1 - T_2 > 0$ — разность температур на нижней и верхней границах слоя, g — ускорение силы тяжести.

Однако в ряде геофизических и других задач необходимо уметь оценивать скорости конвективных движений. Для этого в [5] были использованы соображения подобия и размерности, которые были уточнены в [1, 6] анализом энергетики конвекции. Существенной частью этого анализа является вывод выражения для эффективности (к.п.д.) конвекции γ в преобразовании подводимой тепловой мощности — потока тепла f — в скорость генерации кинетической энергии

$$(1.2) \quad G = \int_0^d \langle \rho \alpha g w T' \rangle dz$$

Здесь w — вертикальная компонента вектора скорости $\mathbf{u}$, T' — отклонение температуры от равновесной, угловые скобки означают осреднение по горизонтали. В [1, 6] с привлечением уравнения теплопроводности

показано, что

$$(1.3) \quad \gamma = \frac{G}{f} = \frac{\alpha g d}{c_r} \cdot \frac{N-1}{N} = \frac{d}{H} (1-N^{-1}), \quad H = \frac{c_p}{\alpha g}$$

Если конвекция в среднем стационарна, то генерация G равна диссипации $D = \epsilon \rho d$, где ϵ — средняя скорость диссипации кинетической энергии на единицу массы. По определению

$$(1.4) \quad \epsilon = \frac{1}{d} \int_0^d \left\langle v \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right\rangle dz$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Считая все производные одного порядка, из (1.4) можно оценить масштаб скорости $u \approx (\epsilon d^2 / a^2 \nu)^{1/2}$, где $a \approx 8$ или 12 для двух- или трехмерного случаев [5, 6]. С другой стороны, из (1.3) следует, что $\epsilon = \gamma f / \rho d$, поэтому в итоге

$$(1.5) \quad u \approx a^{-1} \left(\frac{\alpha g f}{\rho c_p \nu} \right)^{1/2} (1-N^{-1})^{1/2} d$$

Эта формула решает задачу оценки конвективных скоростей, если поток тепла задан на границе. При задании разности температур надо еще определить зависимость $N = N(R, P)$. Для $R \geq 2R_{cr}$ эта зависимость теоретически найдена в [1], при меньших R она вычислена в [3] и, конечно, она известна из измерений в широком интервале значений R (см., например, обзор [7]).

В теории конвекции скорости обычно определяют в единицах χ/d . Тогда для безразмерной кинетической энергии в единичном столбе жидкости из (1.5) с учетом (1.1) и (1.2) можно получить следующее простое приближенное выражение:

$$(1.6) \quad K \approx a^{-2} R (N-1)$$

Проверка этого соотношения по данным единичных численных [8, 9] и реальных экспериментов показала [1], что она выполняется с удовлетворительной точностью при $P \sim 1$ и $R \leq 10^7$.

Данная работа преследует две основные цели. Во-первых, будет показано, что в линейном и слабонелинейном приближениях [3, 4] формула (1.6) является точной. Поскольку в этих приближениях поля скорости и температуры вычисляются аналитически [2–4], то можно точно рассчитать коэффициент a и раскрыть его физический смысл. Во-вторых, будут приведены результаты обработки данных массовых численных экспериментов по моделированию конвекции, любезно предоставленные авторам Н. Ф. Вельтищевым. Их анализ позволит конкретизировать слабую зависимость $a = a(R, P)$, на возможность существования которой указывалось в [1]. Использование подобных зависимостей позволит объяснить причины слабой неуниверсальности закономерностей теплопередачи, выражаемой соотношениями типа $N \sim R^n$, когда эксперименты при достаточно больших R дают значения n , обычно слегка меньшие теоретического $n = 1/3$.

2. Линейная теория. Линейная задача теории конвекции в горизонтальном слое жидкости подобно описана в [2]. Она решается методом разделения переменных при различных типах граничных условий на скорость. Приведем основные необходимые здесь результаты. Выражения для компонент скорости в единицах χ/d имеют следующий вид:

$$(2.1) \quad w = AW(z)f(x, y)$$

$$(2.2) \quad u = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \frac{A}{k^2} \frac{dW}{dz} \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$(2.3) \quad v = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = \frac{A}{k^2} \frac{dW}{dz} \frac{\partial f}{\partial y}$$

Здесь u , v — горизонтальные компоненты скорости, k — безразмерное волновое число, зависящее от типа граничных условий, x , y , z и k нормированы на высоту слоя d . Вид функции $W(z)$ также определяется граничными условиями. Для амплитуды A из уравнения баланса энергии получено общее выражение

$$(2.4) \quad A^2 = k^2 (R - R_{cr}) \int W F dz \left[\int W^2 F^2 dz - \left(\int W F dz \right)^2 \right]^{-1}$$

$$F = \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right)^2 W$$

Вид функции $f(x, y)$ в (2.1) — (2.3) зависит от формы ячейки, но она должна удовлетворять следующим условиям нормировки:

$$(2.5) \quad \langle f^2(x, y) \rangle = 1$$

$$(2.6) \quad f_{xx} + f_{yy} = -k^2 f, \quad \langle f_x^2 \rangle + \langle f_y^2 \rangle = k^2$$

Для валиковой конвекции, прямоугольных и гексагональных ячеек соответственно имеем

$$f = \sqrt{2} \cos \frac{2\pi x}{L}, \quad L = \frac{2\pi}{k}$$

$$f = 2 \cos \frac{2\pi x}{L_x} \cos \frac{2\pi y}{L_y}, \quad k^2 = 4\pi^2 (L_x^{-2} + L_y^{-2})$$

$$f = 0,84 \left[2 \cos \frac{2\pi x}{L\sqrt{3}} \cos \frac{2\pi y}{3L} + \cos \frac{4\pi y}{3L} \right], \quad k = \frac{4\pi}{3L}$$

В последнем случае L — сторона шестиугольника. Поле температуры $T = T_0(z) + \theta$ определяется следующим образом:

$$\theta = A \Theta(z) f(x, y), \quad \Theta(z) = \left(\frac{\chi v}{g \alpha k^2 d^3} \right) F(z)$$

Выведем результаты для трех типов граничных условий.

I. Обе горизонтальные границы — твердые стенки, $-1/2 \leq z \leq 1/2$

$$(2.7) \quad A^2 = 80,23 (R - R_{cr}) / R_{cr} = b (R - R_{cr}), \quad R_{cr} = 1707,8, \quad b = 0,04698, \quad k = 3,117$$

$$W(z) = \cos q_0 z - 0,061517 \operatorname{ch} q_1 z \cos q_2 z + 0,103887 \operatorname{sh} q_1 z \sin q_2 z$$

$$q_0 = 3,973639; \quad q_1 = 5,195215; \quad q_2 = 2,126096$$

Значение $k = 3,117$ соответствует наименее устойчивым возмущениям с длиной волны $\lambda = 2,016$.

II. Нижняя граница твердая, верхняя — свободная, $0 \leq z \leq 1/2$

$$(2.8) \quad A^2 = 69,11 (R - R_{cr}) / R_{cr}; \quad R_{cr} = 1100,65; \quad b = 0,06279; \quad k = 2,682$$

$$W(z) = \sin q_0 z - 0,017074 \operatorname{sh} q_1 z \cos q_2 z + 0,003456 \operatorname{ch} q_1 z \sin q_2 z$$

$$q_0 = 7,137877; \quad q_1 = 9,110819; \quad q_2 = 3,789330$$

III. Обе границы свободные, $-1/2 \leq z \leq 1/2$

$$(2.9) \quad A^2 = 59,22 (R - R_{cr}) / R_{cr}, \quad R_{cr} = \frac{27\pi^4}{4} = 657,5$$

$$b = 0,09067, \quad k = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = 2,2214$$

$$W(z) = \sin \pi z$$

Согласно [9], безразмерная скорость генерации кинетической энергии конвекции в столбе жидкости в среднем по горизонтали равна $G = PR(N-1)$. С другой стороны, зная поле скоростей, можно вычислить среднюю скорость диссипации в столбе. В безразмерных единицах

$$(2.10) \quad D = P \int \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right\rangle dz = \\ = \frac{PA^2}{k^2} \int \left(\frac{d^2 W}{dz^2} - k^2 W \right)^2 dz = A^2 P I k^{-2} = bP(R - R_{cr}) I k^{-2}$$

где интегрирование ведется по толщине слоя жидкости. Интеграл I может быть вычислен аналитически, хотя с меньшей затратой времени это де-

Таблица 1

Граничные условия	Вид теории	Вид ячейки		
		валы	квадраты	гексагоны
I	Линейная	1,43	1,445	1,12
	Нелинейная		1,28	
II	Линейная	2	1,662	1,45
III	»		2	
	Нелинейная		1,65	

лается численно. Определив его и вспомнив, что в стационарном случае $G=D$, найдем

$$(2.11) \quad R(N-1) = \beta(R - R_{cr}), \quad \beta = b I k^{-2}$$

Формула такой же структуры получается и в слабонелинейной теории [3, 4], хотя там учет нелинейных поправок дает в значениях β зависимость от числа Прандтля в следующих членах разложения по степени нелинейности $(R - R_{cr})^{1/2}$. Из (2.10) и (2.11) следует, что в линейном приближении величина β не зависит от формы ячейки, поскольку в определении I входит лишь функция $W(z)$, а функция $f(x, y)$, ответственная за форму ячейки, при осреднении по горизонтали в (2.10) из-за условий (2.5) и (2.6) явно не входит. Однако в слабонелинейной теории [3, 4] это уже не так. Значения коэффициента β для разных типов граничных условий, ячеек и теорий сведены в табл. 1.

Значения β в линейной теории найдены согласно (2.10) и (2.11), нелинейный вариант для I типа граничных условий рассчитан в [3], а для типа III — в [4]. Отметим, что лабораторные эксперименты [10] для торoidalных валов дают для β вместо 1,43 или 1,445 значение $1,48 \pm 0,04$ вплоть до $R \leq 3R_{cr}$. Для свободных границ результаты численных расчетов [4, 11] позволяют найти β , которое для валов оказывается равным 2 с точностью около 1%.

Вычислим полную кинетическую энергию столба жидкости

$$K = \frac{1}{2} \int \langle u^2 + v^2 + w^2 \rangle dz$$

Из (2.1)–(2.4) следует, что $K \sim A^2 \sim (R - R_{cr})$, т. е. с учетом (2.11) имеем $K = a^{-2} R(N-1)$. Аналогичные формулы получаются и для отдель-

ных компонент скорости:

$$(2.12) \quad \langle u_v^{-2} \rangle = \int \langle w^2 \rangle dz = A^2 \int \langle W^2(z) f^2(x, y) \rangle dz = a_v^{-2} R(N-1)$$

$$(2.13) \quad \langle u_h^{-2} \rangle = \int \langle u^2 + v^2 \rangle dz = a_h^{-2} R(N-1), \quad \frac{1}{a^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_v^2} + \frac{1}{a_h^2} \right)$$

С помощью (2.1)–(2.4) и (2.11) с учетом (2.5) и (2.6) для этих коэффициентов выписываются следующие выражения:

$$a_v^{-2} = \frac{b}{\beta} \int \langle W^2(z) f^2(x, y) \rangle dz = \frac{b}{\beta} \int W^2(z) dz$$

$$a_h^{-2} = \frac{b}{\beta} \int k^{-4} \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 \langle f_x^2 + f_y^2 \rangle dz = \frac{b}{\beta k^2} \int \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz$$

Подсчитывая эти интегралы, найдем для разных типов граничных условий с учетом значений коэффициентов b в (2.7)–(2.9) и значений β в табл. 1 величины искомых коэффициентов. Все они сведены в табл. 2.

Можно показать (из-за громоздкости этот вывод опущен), что выражения энергий вертикальных и горизонтальных движений с учетом не-

Таблица 2

Граничные условия	a_v	a_h	a
I	9,25	8,34	8,76
II	8,02	6,59	7,20
III	6,66	4,41	5,44

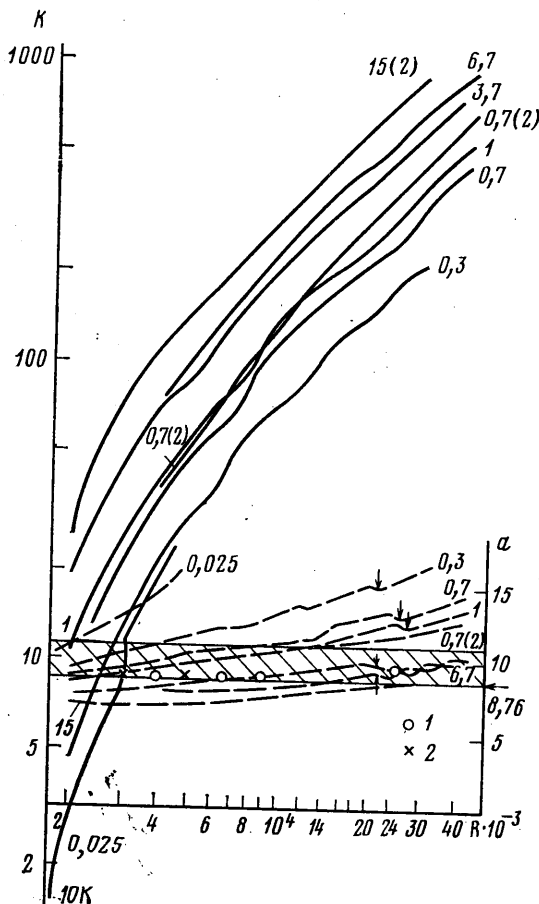
линейных поправок в смысле [3, 4] полностью совпадают с их линейными выражениями (2.12) и (2.13). Однако если в линейном приближении вид конвективной ячейки не влияет на величину β и скорости поэтому оказываются для всех ячеек одинаковыми функциями $R-R_{cr}$, в приближении слабой нелинейности от формы ячейки начинает зависеть коэффициент β , хотя и не сильно (см. табл. 1). Поэтому среднеквадратичные скорости конвекции будут различными для разных типов ячеек. Наибольшие расхождения в значениях a , вследствие зависимости $a \sim \beta^{1/2}$ достигающие 14% для I типа граничных условий и 17% — для III типа, будут для гексагонов.

Результаты расчетов можно сопоставить с данными весьма тщательных измерений профилей скорости конвекции в разных формах ячеек [12]. Эти измерения проводились в этиловом спирте ($P \approx 14$) при числах Рэлея до $6 \cdot 10^4$. Профили горизонтальной и вертикальной компонент скорости удовлетворительно согласуются с результатами линейной теории [2], если учесть, что авторы [12], выписывая выражения для $u(z)$ и $w(z)$, потеряли множитель $\sqrt{2}$. Поэтому их измеренные профили были систематически выше недооцененных ими теоретических профилей.

В этой же работе приведен график зависимости максимального значения горизонтальной компоненты скорости $u_{\max} d / \chi = Re_{\max} = P \cdot Re_{\max}$ от числа Рэлея. Теоретически эта (исправленная) зависимость в линейном приближении есть $Re_{\max} = 0,283(R-R_{cr})^{1/2}$, а кривая, удовлетворяющая всем экспериментальным данным [12], — $Re_{\max} = 0,24(R-R_{cr})^{1/2}$ с разбросом значений численного коэффициента порядка 10%. Считая отношение $u_{h \max} / \langle u_h^2 \rangle^{1/2}$ таким же в эксперименте, как и в линейной теории, находим с помощью результатов описанных здесь расчетов $a_{he} = 9,9 \pm 1$ вместо тео-

ретического значения 8,34. Измерения [12] тем самым дают несколько заниженные ($\sim 20\%$) значения горизонтальных скоростей по сравнению с результатами линейной теории.

3. Анализ результатов численных экспериментов. Небольшое количество данных расчетов конвекции в горизонтальном слое, подогреваемом снизу, уже анализировалось в [1]. Значения коэффициента a , найденные там, группировались вблизи $a=9$.



При этом отмечалась слабая зависимость значений a от чисел Рэлея и Прандтля ($da/dR > 0$, $da/dP < 0$) в диапазонах $0,2 \leq P \leq 7$ и $2000 \leq R \leq 25\,000$.

Большое количество численных расчетов конвективных движений жидкости описано в [13–15]. Эти расчеты проводились при $0,025 \leq P \leq 15$ и $1800 \leq R \leq 44\,000$. Они велись в приближении Буссинеска для двумерного и трехмерного случаев. Расчетная ячейка имела (безразмерные) размеры в высоту – 1, в длину – 4,032 (удвоенная длина волны наиболее неустойчивого возмущения в задаче Рэлея с твердыми горизонтальными стенками) и ширину – 2,34. На боковых границах ставилось условие периодичности. Расчетная сетка имела $25 \times 25 \times 9$ узлов. Счет велся на установление по числу Нуссельта. Анализ точности расчетов показывает, что она порядка нескольких процентов. Для каждого выбранного значения P расчет их велся для чисел R обычно от 2000 через 1000 (для ртути – от 1800 через 200) до 12 000, а далее через 2000 до 30–44 тыс. Авторам были предоставлены результаты около 200 численных экспериментов в виде таблиц значений K и N как функций R и P .

На фигуре сплошными линиями представлены результаты расчетов полной кинетической энергии конвекции – логарифмическая шкала значений K слева. Значения числа Прандтля помечены цифрами у каждой кривой $K(R)$. Цифра (2) после значений P означает расчет в двумерной области, остальные кривые относятся к трехмерным областям. Небольшие колебания в плавном ходе некоторых кривых $K(R)$, по-

видимому, отражают факт некоторого недостижения в процессе счета стационарного состояния. Вид кривых $K(R, P)$ показывает, что кинетическая энергия конвекции растет с P . Этот рост особенно заметен при малых P , так что кривая $K(R, P=0,025)$ нанесена даже с коэффициентом 10. Это связано с тем, что при малых P число Нуссельта при заданном R сильно падает с уменьшением P . При $P \approx 1$ рост кривых $K(R)$ с P замедляется и должна существовать асимптотическая кривая $K_a(R)$ при $P \rightarrow \infty$, поскольку при больших P теплопередача от числа Прандтля не зависит.

В нижней части фигуры штриховыми линиями отложены значения коэффициента a , вычисленные из кривых $K(R, P)$ и формулы (1.6). Линейная шкала для значений a отложена справа. Вертикальными стрелками к кривым $a(R, P)$ помечены области, начиная с которых поток становится существенно трехмерным. Область значений $a=9,9 \pm 1$, соответствующая экспериментальным значениям a_e из [12], помечена косой штриховкой. Найденное выше значение $a=8,76$ помечено горизонтальной стрелкой у правой шкалы, 1 и 2 — значения a , найденные в [1] по данным расчетов [9] для $P=0,7$ и [8] — для $P=1$, выполненных для квадратной или кубической области. Все кривые $a(R, P)$ с точностью не хуже 10% могут быть приближены формулой

$$(3.1) \quad a = 5 + 3,2P^{-0,13} + 3,5P^{-0,3} \lg \left(\frac{R}{R_{cr}} \right)$$

Для сравнения отметим, что через точки Липса [9] (1) можно провести кривую

$$(3.2) \quad a = 8,4 + 1,1 \lg \left(\frac{R}{R_{cr}} \right), \quad P = 0,7$$

При $R=R_{cr}$ и $P=0,7$ значения a отсюда и из (3.1) практически совпадают, хотя оба меньше теоретического значения $a=8,76$, однако коэффициент перед логарифмом в (3.1) втрое больше. Вероятно, это связано прежде всего с различием формы расчетных областей, хотя нельзя исключить, что при получении таких тонких эффектов, как слабая зависимость a от R или P , могут играть некоторую роль и вычислительные факторы. Другая альтернатива состоит в том, что зависимости (3.1) и (3.2) нельзя экстраполировать на $R=R_{cr}$.

4. Обсуждение результатов и их следствия. Зависимость величины $a(R, P)$ от своих аргументов хотя и слабая, так что для практических оценок средних скоростей конвекции можно принять $a \approx 10$, тем не менее сам факт ее существования ставит некоторые проблемы. Во-первых, результаты расчетов при $P < 1$ и $P > 1$ заметно (в пределах 20%) не сходятся с результатами линейной теории в области небольших сверхкритических чисел Рэлея, которая вообще не дает какой-либо зависимости от P . Представляется, что значение $a=8,76$ могло бы использоваться вместе с соответствующими значениями β для контроля точности численных схем моделирования конвекции в расчетах при небольших сверхкритических числах Рэлея. В существующей же ситуации желательно проведение дополнительных расчетов при $((R-R_{cr})/R < 1)$ и в широком диапазоне значений P . Тем не менее факт существования зависимости a от R и P типа (3.1) и (3.2) и до некоторой степени от формы ячейки, по всей видимости, реален.

Во-вторых, если рост a продолжается и в сторону значений $R > 4 \cdot 10^4$ (чего не могут полностью исключить измерения средних скоростей конвекции в воде [16] — в диапазоне $R \sim 10^6 - 10^7$ они дали $a = 12,7 \pm 1,4$), то следует признать конвекцию совершенно, хотя и слабо, неавтомоделным явлением при достаточно больших R и $P > 1$. Отметим, что вопрос об автомоделности конвекции до наступления в ней режима полностью развитой термической турбулентности обсуждался в [1]. Эта ситуация напоминает ту, которая сложилась в теории локально однородной турбулентности (см. [17], § 25), когда учет флуктуаций скорости диссипации привел к появлению слабой зависимости константы в спектре распределения по волновым числам k от величины k (на эту аналогию авторам указал Г. И. Баренблатт). Пока природа проявления зависимости $a=a(R, P)$ неясна. Можно думать, в частности, что здесь как-то проявляется и влияние конечности области интегрирования.

Если зависимость типа (3.1) или (3.2) реальна, то это помогает понять, почему в экспериментально измеряемых зависимостях $N(R, P)$, аппроксимируемых обычно при достаточно больших R степенными выражениями $N \sim R^n$, показатель n всегда несколько меньше теоретического значения $n = 1/3$. К тому же найденные из данных экспериментов значения n несколько варьируют от жидкости к жидкости, т. е. с P , и от диапазона чисел Рэлея, по которому производится аппроксимация.

Действительно, в [1] из рассмотрения термического пограничного слоя, возникающего при $R > 2R_{cr}$ можно показать, что $N \sim Re^{1/2}$, где $Re = Ud/\chi$ — число Пекле. Выражая характерную скорость U из (1.6), получаем $N \sim a^{-1/3} [R(N-1)]^{1/3} \approx a^{-1/3} (RN)^{1/3}$, если $4N \gg 1$. Отсюда находим $N \sim a^{-2/3} R^{1/3}$. Однако если величина a растет с ростом R хотя бы логарифмически, то эффективный рост N с R будет несколько медленнее, чем $R^{1/3}$. Для чисто иллюстративных целей приводится следующий пример. Для воды ($P=6$ при $t=30^\circ\text{C}$) в диапазоне $R=10^5-10^8$ зависимость $N \sim a^{-2/3} R^{1/3}$ с учетом (3.1) дает $N \sim R^{0.293}$, если аппроксимировать $\lg(R/R_{cr})$ в этом диапазоне степенной зависимостью. Заметим, что именно это значение n было получено в [18] по экспериментальным данным для конвекции в воде в диапазоне $10^7 < R < 3 \cdot 10^9$. Подобная точность совпадения теоретической и экспериментальной оценок показателя n , конечно, случайна. Однако важно то, что можно правильно указать знак и оценить малую величину поправки к значению показателя степени $n = 1/3$.

Авторы выражают благодарность Н. Ф. Вельтищеву за предоставление первичных данных численных экспериментов [13–15].

ЛИТЕРАТУРА

1. Голицын Г. С. Исследование конвекции с геофизическими приложениями и аналогиями. Л.: Гидрометеиздат, 1980. 56 с.
2. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961. 652 p.
3. Schlüter A., Lortz D., Busse F. On the stability of steady finite amplitude convection.— J. Fluid Mech., 1965, v. 23, pt 1, p. 127.
4. Malkus W. V. R., Veronis G. Finite amplitude cellular convection.— J. Fluid Mech., 1953, v. 4, pt 3, p. 225.
5. Голицын Г. С. К теории конвекции в верхней мантии.— Докл. АН СССР, 1977, т. 234, № 3, с. 552.
6. Голицын Г. С. Энергетика конвекции вязкой жидкости.— Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 5, с. 1054.
7. Busse F. H. Non-linear properties of thermal convection.— Rep. Progr. Phys., 1978, v. 41, № 12, p. 1929.
8. Clever R. M., Busse F. H. Transition to time-dependent convection.— J. Fluid Mech., 1974, v. 65, pt 4, p. 625.
9. Lipps F. B. Numerical simulation of three-dimensional Benard convection in air.— J. Fluid Mech., 1976, v. 75, pt 1, p. 119.
10. Koschmieder E. L., Pallas S. G. Heat transfer through a shallow horizontal convecting fluid layer.— Int. J. Heat and Mass Transf., 1974, v. 17, № 9, p. 991.
11. Veronis G. Large-amplitude Benard convection.— J. Fluid Mech., 1966, v. 26, pt 1, p. 49.
12. Кутателадзе С. С., Курдюшкин А. Г., Бердников В. С. Поле скорости в конвективной ячейке горизонтального слоя жидкости при тепловой гравитационной конвекции.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1974, т. 10, № 2, с. 137.
13. Вельтищев Н. Ф., Желнин А. А. Эксперименты по численному моделированию ячейковой конвекции.— Тр. Гидрометеорол. научн.-исслед. центра СССР, 1974, вып. 132, с. 58.
14. Veltischev N. F., Zelnin A. A. Numerical simulation of cellular convection in air.— J. Fluid Mech., 1975, v. 68, pt 2, p. 353.
15. Вельтищев Н. Ф., Желнин А. А. Численное моделирование ячейковой конвекции в различных жидкостях.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 6, с. 17.
16. Голицын Г. С., Грачев А. А. Измерения скоростей конвекции вязкой жидкости.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1979, т. 15, № 3, с. 330.
17. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Наука, 1967.
18. Garon A. M., Goldstein R. J. Velocity and heat transfer measurements in thermal convection.— Phys. Fluids., 1973, v. 16, № 11, с. 1818.

Москва

Поступила в редакцию
22.11.1980