МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1981

УДК 533.6.011.72

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА ВЫПУКЛОМ УГЛЕ

ДЕМЬЯНОВ А. Ю., ПАНАСЕНКО А. В.

Существует большое число работ (обзор содержится в монографиях [1, 2]), посвященных изучению дифракции ударных волн на телах простейшей формы, таких, как клин, конус, сфера и т. п. В этих работах взаимодействие ударных волн с поверхностью тела легко реализуется в эксперименте или допускает упрощающие предположения при аналитическом исследовании.

Появление мощных ЭВМ и развитие вычислительных методов позволили решить ряд новых задач дифракции [3—5], исследование которых экспериментальными и аналитическими методами связано с большими трудностями.

В настоящей работе дана постановка задачи о дифракции плоской ударной волны на выпуклом угле и с помощью метода «сквозного» счета [5] проведено систематическое исследование особенностей возникающего при этом нестационарного течения газа для широкого диапазона интенсивностей ударной волны M_S и показателей адиабаты γ. Рассмотрены случаи падения ударной волны на начальную образующую как под углом падения $\omega_1=90°$, так и при других его значениях, допускающих предварительное регулярное отражение набегающей ударной волны (что ранее не рассматривалось). Получены дифракционные картины течения газа, позволяющие проследить свойства перехода от регулярного отражения к маховскому. Впервые наблюдаются картины течения газа с заметным искривлением развитой маховской ножки, для которых распределение давления по поверхности угла напоминает двойное маховское отражение, ранее полученное на клине [1, 3]. Показано, что обнаруженная в экспериментах при $\omega_1=90°$ [1] внутренняя ударная волна, распространяющаяся вверх по потоку, наблюдается и при других ω_1.

1. Рассмотрим дифракцию плоской ударной волны на выпуклом угле величины θ_s, с вершиной которого свяжем декартову систему координат xy (фиг. 1). Предположим, что ударная волна при $t<0$ двигается по однородному покоящемуся газу с постоянной скоростью D под углом $\omega_1=90°$ или $\omega_1<\omega^*$ к образующей AO (ω^* — угол, при котором еще возможен режим регулярного отражения [2]) и в момент времени $t=0$ приходит на вершину угла. Возникающее при $t>0$ нестационарное течение газа будет автомодельным в переменных $\xi=x/Dt$, $\eta=y/Dt$ до прихода на вершину угла неоднородных областей течения газа.

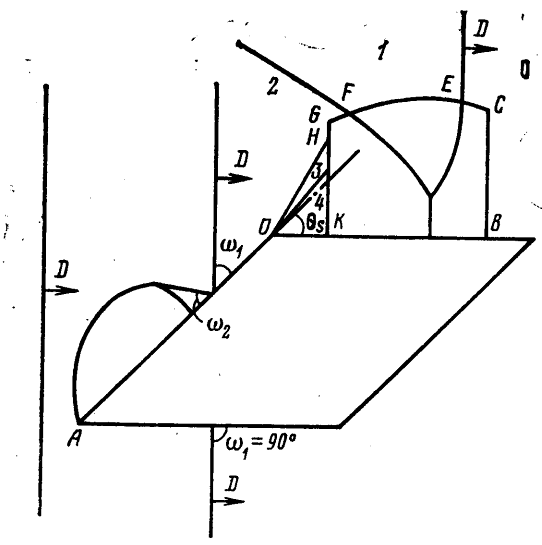
В переменных ξ, η система дифференциальных уравнений газовой динамики, описывающая рассматриваемое течение, имеет вид

$$(1.1)\qquad \frac{\partial\Omega_1}{\partial\xi}+\frac{\partial\Omega_2}{\partial\eta}+X=0$$

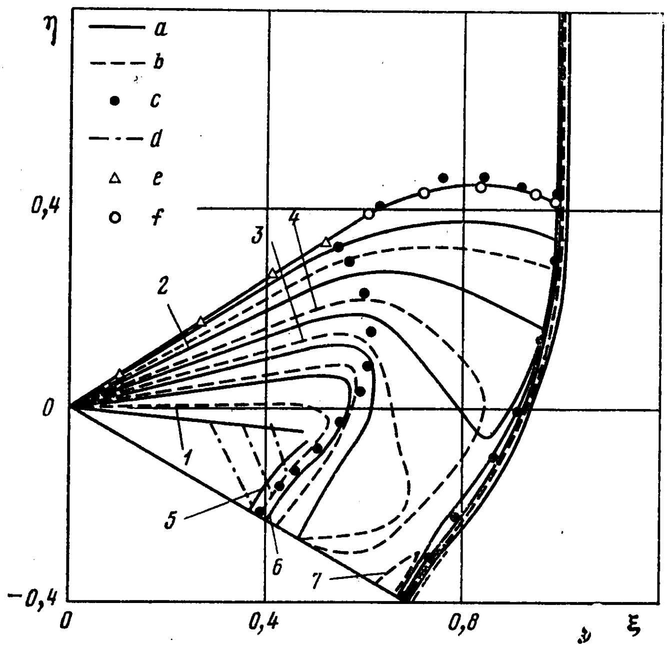
$$\Omega_1=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\rho M\\ M^2+\rho p\\ MN\\ M(E+p)\end{vmatrix},\quad \Omega_2={}^1/\rho\begin{vmatrix}\rho N\\ M\cdot N\\ N^2+\rho p\\ N(E+p)\end{vmatrix},\qquad X=\begin{vmatrix}2\rho\\ 3M\\ 3N\\ E_1\end{vmatrix}$$

$$M=\rho(u-\xi),\ N=\rho(v-\eta),\ E=\rho\varepsilon+\frac{(M^2+N^2)}{2\rho},\ E_1=2(E+P)+(M^2+N^2)/\rho$$

Здесь p, ρ, ε, u, v — соответственно функции давления, плотности, внутренней энергии единицы массы газа и компонент скорости по осям ξ и η,



Фиг. 1



Фиг. 2

обезразмеренные по плотности ρ_0 и скорости D (индекс 0 относится к параметрам невозмущенного газа перед падающей ударной волной (фиг. 1)).

Уравнения характеристик системы (1.1) имеют вид [6]

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right)_{1;2}=\frac{-(u-\xi)(v-\eta)\pm a\sqrt{(u-\xi)^2+(v-\eta)^2-a^2}}{a^2-(u-\xi)^2} \tag{1.2}$$

(1.3) $$\left(\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right)_s=\frac{v-\eta}{u-\xi}$$

где a — скорость звука в газе. Характеристики (1.2) существуют вне кривой, заданной уравнением

(1.4) $$(u-\xi)^2+(v-\eta)^2-a^2=0$$

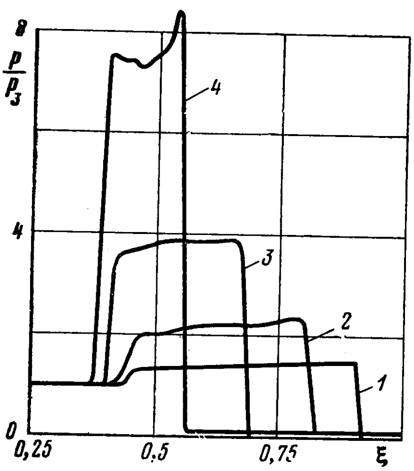
Анализ возникающего при $t>0$ нестационарного течения газа показывает, что если $M_{2f}>1$ (M_{2f} — число Маха потока в области 2, при $\omega_1=90°$ $M_{2f}=M_{1f}$), то к вершине угла будет примыкать известное течение Прандтля — Майера [7]. В этом случае возмущенная область течения ограничена искривленным участком ударной волны, частью звуковой окружности, поверхностью угла и предельной характеристикой (при возникновении вторичной ударной волны, движущейся вверх по потоку, последняя может оказаться частично или полностью за ударным фронтом; тогда граница возмущенной области пойдет по вторичной ударной волне). Если $M_{2f}<1$, то возмущенная область течения газа ограничена звуковой окружностью (1.4), лежащей левее вершины угла, искривленной ударной волной и поверхностью угла.

Граничные условия задачи следующие: на линии BCE (фиг. 1) задаются параметры покоящегося газа ($f=f_0$, где $f=|\rho, M, N, E|$ — вектор-строчка искомых функций), на кривой EF — параметры за падающей ударной волной ($f=f_1$), на линии FGH — параметры за отраженной волной ($f=f_2$) (при $\omega_1=90°$ $f_2\equiv f_1$ (фиг. 2)), на линии HK — параметры известного течения Прандтля — Майера ($f=f_3$) и параметры течения за веером волн Прандтля — Майера ($f=f_4$), на поверхности угла KB — условие непротекания.

Задача решается с помощью численного метода [5], в котором в левую часть (1.1) добавляется член $\partial f/\partial\tau$ ($\tau=\ln t$) и производится установление решения по гиперболической переменной τ с использованием криволинейных разностных сеток и оператора сглаживания [8]. Используемый метод позволяет задавать начальные условия задачи достаточно произвольным образом, так как внесенная при этом начальная погрешность локализуется в бесконечно узких областях контактных разрывов.

2. Для режимов с $\omega_1=90°$ основное внимание уделено выяснению общих свойств течения газа, справедливых для достаточно широкого диапазона определяющих параметров. На фиг. 2 представлена волновая картина численного решения задачи при $M_s=10$, $\gamma=1{,}4$, $\theta_s=30°$. О положении возникающих ударных волн здесь и ниже можно судить по совокупному характерному сгущению изобар (кривые a) и изохор (кривые b), а также частично по положению линии (1.4) (показано значками c). Номера изобар и изохор *1—7* соответствуют следующим значениям безразмерного давления и плотности: 2,1; 0,652; 3,71; 4,36; 0,157; 0,313; 5,17.

Изменение газодинамических параметров начинается в области за предельной характеристикой, берущей начало в точке касания первой характеристики течения Прандтля —Майера (теоретическое положение отмечено значками e) с окружностью (1.4) (теоретическое положение отмечено значками f), ограничивающей сверху область возмущенного течения газа. При выходе предельной характеристики из веера волн Прандтля — Майера около поверхности угла формируется вторичная ударная волна. Это также видно из фиг. 3, где для различных θ_s и тех же $\gamma=1{,}4$ и $M_s=10$ приведено распределение давления $p(\xi)$ вдоль поверхности угла (кривые *1—4* соответствуют значениям θ_s, равным 10, 20, 30, 40°). При $\theta_s=10°$ ударную волну еще трудно различить, а при $\theta_s=30$ и $40°$ она уже хорошо видна. Отождествить изобары с ударной волной позволяет рассмотрение поведения характеристик (1.2) (линии d). Видно, что характеристика (1.2) второго семейства встречается с полученной в расчете линией (1.4) под конечным углом, а это значит [6], что (1.4) проходит около поверхности угла по ударной волне.



Фиг. 3

Изохоры 3 и 4 (фиг. 2) показывают, что зона неизэнтропического течения газа, обусловленная искривлением падающей ударной волны, является достаточно узкой и непосредственно примыкает к ударному фронту.

Распределение $p(\xi)$ (фиг. 3) по поверхности угла слабо отличается от постоянной величины (между ударными волнами), что дает основание [9] применить приближенный способ определения $p(\xi)$ на поверхности угла с помощью формул распада произвольного разрыва [7].

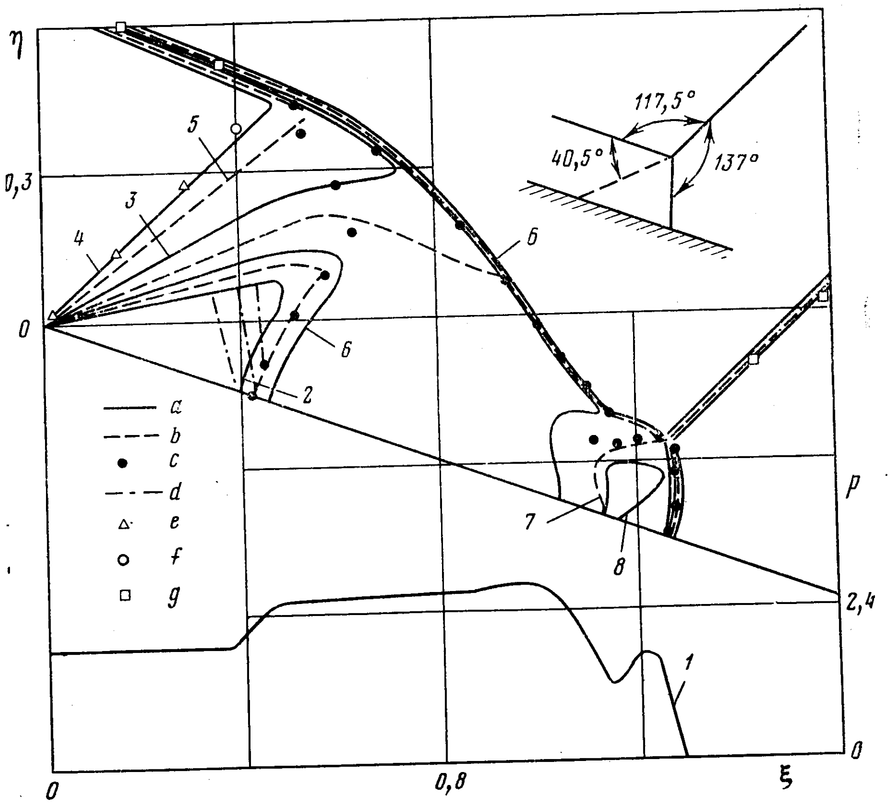
Сравнение результатов численных расчетов по интенсивностям вторичной (I) и возмущенной падающей (II) ударных волн по поверхности угла с данными [9] при $M_s=10$ дано в таблице (M_w – число Маха ударной волны (II), M_{w1} – число Маха ударной волны (I)). Видно, что расхождение данных [9] с численным решением по M_w не превышает 6%, а по M_{w1} имеет около 11%. Там же приведены значения M_w, полученные по аппроксимационной формуле из [1] для ударной волны II. Видно хорошее совпадение с результатами численных расчетов.

γ	θ_s^0	Численное решение		Данные [9]		Данные [1]
		M_w	M_{w1}	M_w	M_{w1}	M_w
1,4	10	9,33	1,11	9,41	1,21	9,22
1,4	20	8,67	1,36	8,7	1,52	8,43
1,4	30	7,85	1,76	7,84	1,96	7,67
1,4	40	7,25	2,59	6,82	2,6	6,93
1,3	30	7,7	1,79	7,66	1,99	7,67
1,2	30	7,6	1,89	7,39	2,1	7,67

Точность определения M_w и M_{w1} при численном решении достаточно высока. Так, проведенные расчеты при $M_s=10$, $\gamma=1,4$ и $\theta_s=30°$ на различных разностных сетках (по ξ в возмущенной области бралось 15 узлов разностной сетки, по η – 30 узлов с последующим увеличением их числа в 1.5 раза) и при различной ориентации системы координат $\xi\eta$ (сначала ось ξ направлялась, как на фиг. 1, а затем по продолжению образующей AO, что приводит к разной геометрии ячеек разностной сетки и позволяет тем самым проверить достоверность полученных результатов) дали $\min M_{w1}=1,55$, $\max M_{w1}=1,76$ и $\min M_w=7,74$, $\max M_w=7,85$. Причем более высокие значения M_w и M_{w1} соответствуют более мелкой разностной сетке, т. е. более точному расчету.

Как показывают проведенные расчеты, сказанное выше относительно характера нестационарного течения газа остается справедливым и при уменьшении γ. С уменьшением γ расстояние между ударной волной I и II уменьшается (что видно из приведенной выше таблицы) при сохранении особенностей дифракционной картины течения газа.

3. Случай $\omega_1<\omega^*$ отличается от $\omega_1=90°$ тем, что при $t<0$ происходит регулярное отражение падающей ударной волны от поверхности AO



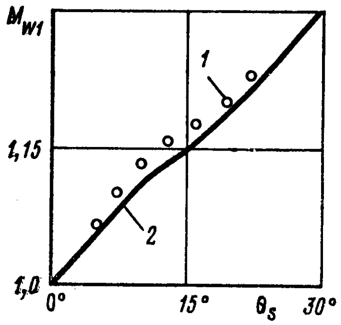
Фиг. 4

(фиг. 1). Это приводит к дифракции на выпуклом угле V-образной ударной волны. Возникающая при этом краевая задача отличается от аналогичной задачи для клина наличием разрежения у вершины угла и фиксированным положением отраженной ударной волны. Интерес представляет исследование волновой картины течения газа и выяснение отличий от дифракции на клине.

Как и следовало ожидать, на характер перехода от регулярного отражения к маховскому краевая задача определяющего влияния не оказывает. При $\gamma=1{,}25$, $M_S=10$, $\omega_1=30°$ и углах $\omega_3=35$ и $40°$ углы отражения, полученные в расчете, соответственно равны $\omega_4=10-17°$ и $14-21°$ ($\omega_3=\omega_1+\theta_S$, $\omega_4=\omega_2+\theta_S$). Соответствующие теоретические значения углов ω_4 по [2] равны 12,27 и 14,14°. Зависимость максимального давления на поверхности угла p_{max} от ω_3 (при данных γ и M_S) удовлетворительно согласуется с теоретическими представлениями. Ниже для сравнения приведены значения p_{max}, полученные численно в окрестности точки перехода от регулярного отражения к маховскому ($\omega_3 \approx \omega^* = 44{,}09°$) и данные [2]:

ω_3	35°	40°	44,09°
p_{max}	6,96	6,2	5,7
p_{max} [2]	6,84	6,39	6,67

Использование метода «сквозного» счета приводит к трудности проработки решения задачи в окрестности критического угла падения $\omega_3 \approx \omega^*$, где имеет место волновая картина взаимодействия, соответствующая теории коротких волн [10]. Так, в настоящих расчетах, несмотря на специальное мельчение разностной сетки при $\omega_3 \approx \omega^*$, ярко выраженный переход к маховскому отражению был зафиксирован при $\omega_3 \approx 48°$, что, возможно, является следствием краевой задачи.



Фиг. 5

При $\omega_3 > \omega^*$ волновая картина течения газа имеет качественно новый характер. На фиг. 4 при $\gamma = 1{,}3$, $M_S = 5$, $\theta_S = 20°$, $\omega_1 = 40°$, ($\omega^* = 41{,}95°$) представлена типичная дифракционная картина, полученная в численном расчете (обозначения аналогичны фиг. 2). Ее отличительной особенностью является наличие двух тройных точек пересечения ударных волн и заметное искривление преломленной ударной волны. Характер распределения давления $p(\xi)$ по поверхности угла (кривая *1*) напоминает двойное маховское отражение, полученное ранее при дифракции на клине [1, 3]. Однако вместо второй ударной волны здесь на поверхность угла приходит область сжатия.

Следует отметить также наличие внутренней ударной волны, распространяющейся вверх по потоку. Так же как и на фиг. 2, ее положение определяется по совокупной картине изобар, изохор и линий (1.4), а положение характеристик (1.2) свидетельствует об ослаблении интенсивности ударной волны при удалении от поверхности угла. На фиг. 5 представлен характер зависимости интенсивности вторичной ударной волны от угла θ_S (*1* – $M_S = 10$, $\gamma = 1{,}25$, $\omega_1 = 30°$, *2* – $M_S = 5$, $\gamma = 1{,}3$, $\omega_1 = 40°$). Видно, что M_{W1} можно аппроксимировать линейным образом.

Для иллюстрации местоположения известных элементов волновой картины течения газа на фиг. 4 нанесены: набегающая V-образная ударная волна (значки *g*). Видно их хорошее соответствие численному решению. Номера изобар и изохор *2–8* соответствуют следующим значениям безразмерного давления и плотности: 2,1; 3,5; 4,8; 18,2; 2,58; 7,7; 1,29.

В случае режима, представленного на фиг. 4, были проведены специальные расчеты на различных разностных сетках (по ξ в возмущенной области бралось 35 узлов, по η – 30 узлов с последующим увеличением их числа в 2 раза). При этом было получено $\min M_W = 6{,}65$ и $\max M_W = 6{,}85$, причем более низкое значение M_W соответствует и более мелкой сетке.

В окрестности двух тройных точек (фиг. 4) возникают трудности в проработке решения задачи, связанные с недостаточным числом узлов разностной сетки в возмущенной области течения газа. Тем не менее из численного расчета можно получить надежную информацию о газодинамических характеристиках течения с помощью привлечения дополнительных соображений физического порядка. Так, например, в рассматриваемом случае из численного расчета берем траекторию движения тройной точки (точность ее определения составляет $\approx 2°$) и проводим расчет трехволнового пересечения ударных волн в предположении кусочной однородности параметров течения газа в некоторой окрестности тройной точки. Результаты такого расчета внешней тройной точки схематично приведены в правом углу фиг. 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баженова Т. В., Гвоздева Л. Г.* Нестационарные взаимодействия ударных волн. М.: Наука, 1977.
2. *Арутюнян Г. М., Карчевский Л. В.* Отраженные ударные волны. М.: Машиностроение, 1973.
3. *Липницкий Ю. М., Ляхов В. Н.* Численное решение задачи дифракции ударной волны на клине.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 6.
4. *Белошицкий А. В., Крикунов В. В., Липницкий Ю. М., Ляхов В. Н.* Исследование различных газодинамических течений с помощью явных разностных схем сквозного счета.— Науч. тр. Ин-та механ. МГУ, 1973, № 30.
5. *Липницкий Ю. М., Панасенко А. В.* Исследование взаимодействия ударной волны с острым конусом.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1980, № 3.
6. *Панасенко А. В.* Общий анализ картины дифракции плоской акустической волны на клине, движущемся со сверхзвуковой скоростью.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 2.
7. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970.
8. *Ляхов В. Н.* Сглаживание и искусственная вязкость при расчетах двумерных нестационарных течений с разрывами.— В кн.: Численные методы механики сплошной среды, т. 5, № 3. Новосибирск, 1974.
9. *Ляхов В. Н.* К вопросу о выходе ударной волны в расширяющуюся часть канала.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 6.
10. *Рыжов О. С., Христианович С. А.* О нелинейном отражении слабых ударных волн.— ПММ, 1958, т. 22, вып. 5.

Москва

Поступила в редакцию
23.I.1980