

УДК 533.6.011.5

О ПРОФИЛИРОВАНИИ ПЛОСКИХ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СОПЕЛ И КАНАЛОВ, РЕАЛИЗУЮЩИХ ЗАДАННЫЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ ПОТОК В СЕЧЕНИИ ВЫХОДА

КРАЙКО А. Н., ШЕЛОМОВСКИЙ В. В.

В рамках идеального газа описываются способы профилирования сверхзвуковых частей плоских и осесимметричных сопел и каналов, реализующих в сечении выхода заданные, в общем случае — неравномерные поля параметров. Кроме постановок, приводящих к безударным течениям, рассмотрены конфигурации, в которых требуемые распределения энтропии создаются скачком, возникающим при обтекании специально спрофилированной стенки.

Профилирование сверхзвуковой части сопла, создающего заданный поток, — одна из классических задач газовой динамики. Однако до недавнего времени в основном строились сопла с равномерным потоком на выходе. В качестве примеров сошлемся на работы по профилированию осесимметричных без центрального тела [1–4], кольцевых [5–8], плоских симметричных [9–11], плоских несимметричных [12–14], и радиальных [15] конфигураций такого типа.

Постановки разных авторов для одинаковых, например кольцевых, сопел не тождественны, так как требуемый поток даже в классе только плоских или только осесимметричных конфигураций можно создать бесчисленным множеством способов. Поэтому однозначный выбор невозможен без некоторого дополнительного принципа. Применительно к соплам, в которых не возникают ударные волны, в части из перечисленных работ, а для неравномерного потока — в [16–18] в качестве такого принципа взято требование быстрейшего разгона, обеспечивающее сверхзвуковым частям минимальные габариты. Реализация принципа зависит от дополнительных ограничений постановочного характера, что ведет к отличию контуров.

1. Пусть $xuz(\varphi)$ — система декартовых (цилиндрических) координат, а параметры потока не зависят от $z(\varphi)$. Начнем с профилирования контуров нижней (ab) и верхней ($a^\circ b^\circ$) стенок сверхзвуковой части двумерного сопла или одной из них — для определенности $a^\circ b^\circ$, которые при безударном течении реализуют заданный (в общем случае неравномерный) поток на заданной кривой bb° плоскости xu . В случае симметричного сопла контур ab будем считать совпадающим с отрезком оси x . Образующие дозвуковой части слева от a и a° выбираются из фиксированного («адаптируемого», т. е. приспособляемого к профилируемой части) n -параметрического семейства. Число n параметров, определяющих это семейство, устанавливается в процессе анализа. Контур ab и $a^\circ b^\circ$ или только $a^\circ b^\circ$ профилируются так, чтобы обеспечить наибо́льший разгон потока. Так как дозвуковые обводы выбираются из фиксированного семейства, а ab и $a^\circ b^\circ$ профилируются полностью, то при отсутствии дополнительных ограничений на кривизну образующих a и a° или только a° в общем случае будут точками излома, которые в рассматриваемой постановке обтекаются с образованием пучков волн разрежения. Обтекание с образованием волн разрежения определяется тем, что aa° — сечение минимальной площади; кроме того, для изломов противоположного знака поток справа от a и a° был бы дозвуковым. Пусть далее на bb° меридиональная компонента скорости $V = \sqrt{u^2 + v^2}$, где u и v — x - и y -компоненты вектора скорости $\mathbf{q}$, не близка к скорости звука a , так что дальнейшее уве-

личение изломов не влияет на поток в трансзвуковой области. Последний поэтому определяется теми же n параметрами, что и само сопло. Это позволяет независимо рассчитать до- и трансзвуковое течение, а затем по известному расходу через bb° выделить $(n-1)$ -параметрическое подсемейство дозвуковых частей с тем же расходом. Введение ограничений на кривизну ведет к замене изломов начальными участками максимально допустимой (по модулю) кривизны aa_+ и $a^\circ a_+^\circ$ — окружностями известных радиусов r и r° , которые в a и a° плавно стыкуются с образующими адаптируемого семейства, а в a_+ и в a_+° — с контурами a_+b и $a_+^\circ b^\circ$ сверхзвуковой части. Их обтекание сопровождается течениями разрежения, которые по-прежнему будем называть пучками. Протяженности участков aa_+ и $a^\circ a_+^\circ$, как и величины изломов, находятся в процессе профилирования и предполагаются достаточно большими в принятом выше смысле.

Из функций, характеризующих поток на bb° , три: полная энтальпия $H = h + q^2/2$, удельная энтропия s и закрутка $\Gamma = y^*w$ — определяются предысторией потока. Здесь h — удельная энтальпия, h и s — известные функции давления p и плотности ρ , q — модуль q , $w = z(\psi)$ -компонента q и $v=0$ и 1 соответственно в плоском и в осесимметричном случаях. Если ψ — функция тока, то $H=H(\psi)$ и $\Gamma=\Gamma(\psi)$ всегда, а $s=S(\psi)$ — при отсутствии скачков, где $H(\psi)$, $\Gamma(\psi)$ и $S(\psi)$ связаны лишь со «способом приготовления» потока (при помощи специального подвода энергии, закручивающих аппаратов и т. п.) и не зависят от формы ab и $a^\circ b^\circ$. Функцию тока, как обычно, определим уравнением

$$(1.1) \quad d\psi = ky^* \rho (udy - vdx)$$

которое выполняется для любой кривой плоскости xy , и условием: $\psi=0$ на ab . В (1.1) k — нормирующий множитель, такой, что $\psi=1$ на $a^\circ b^\circ$. В силу (1.1) ψ постоянно на любой линии тока, в частности на ab и $a^\circ b^\circ$, а k обратно пропорционален расходу газа через сопло. Выбор одного из параметров адаптируемого семейства из условия совпадения расходов через bb° и aa° ведет к совпадению множителей k на bb° и в до- и трансзвуковых областях. Уравнения двумерного течения инвариантны относительно одинакового изменения масштабов по x и y . Поэтому если адаптируемое семейство включает дозвуковые части, получающиеся друг за друга таким изменением масштабов, то согласование по k можно (хотя и необязательно) осуществлять одновременным сжатием или растяжением по x и y одного рассчитанного варианта.

Ограничимся случаями, для которых газ на bb° течет слева направо (при направлении движения от b к b°). Тогда каждая линия тока (c° -характеристика) пересекает bb° один раз, а ψ монотонно растет от b к b° . Аналогичное предположение сделаем о пересечениях bb° характеристиками первого и второго семейств (c^+ - и c^- -характеристиками). В противном случае на bb° нельзя произвольно задавать распределения p , $\xi = v/u$ и $\zeta = u/v$, которые в отличие от H , S и Γ определяются формой профилируемых стенок.

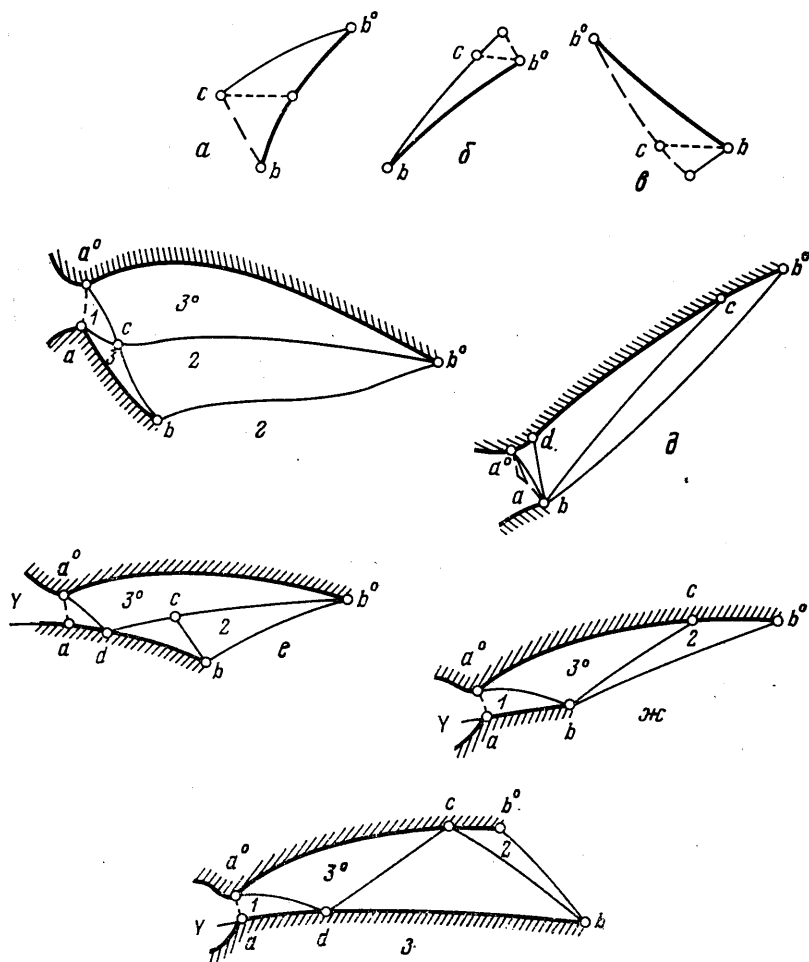
Три схемы расположения bb° и характеристик трех семейств, которые могут реализоваться при сделанных выше ограничениях, изображены на фиг. 1, а–в, где тонкими сплошными, штриховыми и пунктирными линиями даны c^+ , c^- и c° -характеристики. Данные на bb° во всех случаях определяют течение в треугольнике $bb^\circ c$. Как предельные для ситуаций, изображенных на фиг. 1, б и в, можно допустить случаи совпадения bb° с отрезком c^+ - или c^- -характеристики. Здесь треугольник $bb^\circ c$ вырождается в отрезок bb° , с сливается с b° или с b , а параметры на bb° должны удовлетворять одному из условий совместности. В переменных p и ξ последние имеют вид [19]

$$(1.2) \quad d\xi \pm \frac{\beta}{\rho u^2} dp + \frac{v}{y} \left(\xi + \frac{\xi \mp \beta}{V^2} w^2 \right) (dy - \xi dx) = 0 \quad (\beta = \sqrt{M^2 - 1})$$

где верхние (нижние) знаки отвечают c^+ (c^-)-характеристике, а $M = V/a$ — «меридиональное» число Маха.

Разные расположения bb° ведут к отличию в порядке дальнейших действий и в результирующих конфигурациях, зависящих также от того, профилируется одна или две стенки. При профилировании двух стенок получающееся сопло назовем «соплом первого типа». Если одна стенка фиксирована, то будем использовать термин «сопло второго типа». Покажем сначала, как находятся контуры ab и $a^\circ b^\circ$ сопел первого типа.

В случае фиг. 1, а быстрее разгон осуществляется при реализации схемы, изображенной на фиг. 1, г и содержащей три характерные области. Область 1 — разгонный участок, примыкающий слева к дозвуковому по-



Фиг. 1

току в сужающейся части сопла и ограниченный справа отрезками c^+ - и c^- -характеристик a_+c и $a_+^\circ c$. Последние есть граничные характеристики пучков волн разрежения и в случае изломов в a и a° , и при замене изломов окружностями радиусов r и r° . Область 2 — концевой участок (треугольник $bb^\circ c$). Области 3 и 3° — выравнивающие участки. Задача профилирования прежде всего требует согласования параметров в концевых точках с областями 1 и 2 и координат этих точек. Течение в области 2 однозначно определяется решением задачи Коши с начальными данными

на bb° . Найденные при этом x_c , y_c , ψ_c , p_c и ξ_c (нижние индексы приписываются параметрам в соответствующих точках) в общем случае не будут совпадать с аналогичными величинами в концевой точке области 1 произвольной конфигурации $(n-1)$ -параметрического адаптируемого подсемейства. Отсюда ясно, что при заданном bb° и неадаптируемой дозвуковой части (даже с тем же расходом, что и на bb°) схему сопла быстрого разгона реализовать нельзя. С другой стороны, в рамках адаптируемого семейства дозвуковых частей или выделенного из него $(n-1)$ -мерного подсемейства допускается возможность выбора обводов из столь широкого множества, какое требуется для построения сопла быстрого разгона. Вопрос о конкретизации дополнительных произволов, позволяющих строить такие конфигурации, решается сравнительно просто лишь в очень немногих случаях.

Перейдем к выбору дозвуковой части осесимметричного сопла с центральным телом. Для этого, согласовав множители k и решив задачу Коши в $bb^\circ c$, начнем расчет разгонного участка в некотором сопле $(n-1)$ -параметрического подсемейства. На разгонном участке вдоль линии тока $\psi = \psi_c$ газ непрерывно разгоняется (V растет). Расчет следует вести до тех пор, пока в некоторой точке c° этой линии тока не выполнится равенство $V_{c^\circ} = V_c$. Совпадение x_{c° и x_c можно достигнуть дополнительным переносом вдоль оси x . Оставшиеся несогласованными y и ξ требуют итераций по двум параметрам. Для осесимметричных каналов без центрального тела $y_{c^\circ} = y_c = 0$ и $\xi_{c^\circ} = \xi_c = 0$, что позволяет обойтись без итераций. При $v=0$ совпадение y и ξ в c° и c достигается смещением по y и поворотом в плоскости xy . Такие упрощения возможны благодаря тому, что при $v=1$ уравнения течения инвариантны относительно сдвига вдоль оси x , а при $v=0$ — относительно любых перемещений в плоскости xy . В общем осесимметричном случае итерации по y и ξ требуют двухпараметрических расчетов осесимметричных течений на до- и трансзвуковом и на разгонном участках. В любой ситуации адаптация в рамках схемы фиг. 1, г возможна лишь при $n=4$. Согласование в c° и c величин ψ , V и y ведет к совпадению w и термодинамических переменных. Затем отрезок a_+b ($a_+^\circ b^\circ$) образующей ab ($a^\circ b^\circ$) строится в процессе решения задачи Гурса с данными на характеристиках a_+c ($a_+^\circ c$) и bc и ($b^\circ c$) как линия тока, выходящая из a (a°).

В случае фиг. 1, б решение задачи Коши в $bb^\circ c$ однозначно определяет отрезок cb° контура $a^\circ b$ и c^+ -характеристику bc . Пусть далее дозвуковые образующие адаптируемого семейства таковы, что, как показано на фиг. 1, д, звуковая линия, изображенная штрихами, соединяет a и a° и лежит в области влияния верхнего пучка. Тогда ab вырождается в угловую точку, а профилирование участка $a^\circ c$ контура $a^\circ b^\circ$ сводится к последовательному решению двух задач Гурса. В первой из них известна c^+ -характеристика bc и c^- -характеристика ab — излом физической плоскости. Решение этой задачи определяет течение в треугольнике acd , в частности c^+ -характеристику ad и линию тока dc . Во второй задаче Гурса по данным на ad и на c^- -характеристике $a_+^\circ a$ находится поток в треугольнике ada_+° , ограниченном сверху линией тока $a_+^\circ d$. Построение $a_+^\circ d$ завершает решение задачи профилирования. При $v=0$ и постоянных параметрах на bb° решение в рамках схемы фиг. 1, д получается особенно просто. Здесь все c^+ -характеристики справа от aa_+° прямолинейны, а решение можно построить и для прямой линии перехода (звуковая линия — отрезок aa°). В таком случае излом в a° отсутствует и $a^\circ c$ совпадает с линией тока централизованной простой волны. В то же время в общем случае для прямой звуковой линии и для звуковой линии, находящейся в области влияния нижнего пучка, решение в рамках схемы фиг. 1, д невозможно.

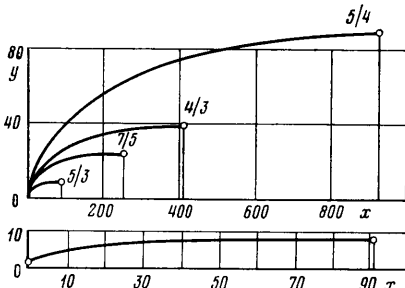
Принципиальная возможность отнюдь не гарантирует существования решения. Вопрос о существовании окончательно выясняется лишь в процессе численного построения контуров. На отсутствие решения указывает, например, пересечение одноименных характеристик. Для реализации требуемого течения на bb° в подобных случаях необходимо вводить в поток дополнительные тела, не предусмотренные постановкой задачи. Заметим, кстати, что при отсутствии в постановке запрета на ведение таких тел допускается замена сопла решеткой сопел. Увеличивая число элементов решетки, можно как угодно уменьшить ее протяженность по нормали к bb° . Ввиду бессмысленности подобной подстановки допустимое число элементов следует ограничивать заранее. В итоге профилирование решетки сводится к профилированию отдельных сопел и к решению задачи о минимуме функции нескольких переменных — длин отрезков, на которые теперь разбивается bb° .

Не останавливаясь на случае, изображенном на фиг. 1, *в*, который с точностью до перемены ролей точек a и a° и контуров ab и $a^\circ b^\circ$ аналогичен только что рассмотренному, перейдем к конфигурациям второго типа. Итак, пусть в силу технологических, компоновочных и т. п. соображений задана «кривая Y », т. е. уравнение $y=Y(x)$ нижней стенки сверхзвуковой части сопла, отрезок bb° и параметры на нем, причем $\xi=dY/dx$ в b . Примем также, что нижние стенки адаптируемых сужающихся частей в a плавно стыкуются с Y . Тогда схемы сопел, реализующих требуемое течение на bb° в случаях фиг. 1, *а—в*, будут такими, как показано на фиг. 1, *е—з*. Одним из новых элементов расчета течений в представленных соплах является решение краевых задач с данными на одной из характеристик (на bc для фиг. 1, *е*) и с условием непротекания $\xi=dY/dx$ на ab . Кроме того, гладкая стыковка в a выделяет из $(n-1)$ -параметрического подсемейства еще более узкое $(n-3)$ -параметрическое подсемейство. С другой стороны, в данной постановке из совпадения абсцисс соответствующих точек разгонного и конечного участков следует равенство в них y и ξ , что по-прежнему обеспечивает адаптацию при $n=4$. Заметим, кстати, что в этой постановке при $v=1$ итерации не требуются, если заданная стенка — отрезок прямой, параллельной оси x , а при $v=0$ — если кривая Y — окружность произвольного (в том числе бесконечного) радиуса.

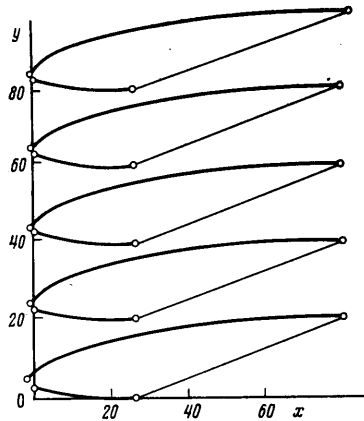
2. В дальнейших примерах, которые иллюстрируют сказанное выше, в целях упрощения расчетов вместо адаптируемого семейства дозвуковых частей задавалось аналогичное семейство линий aa° и распределений параметров на них. Именно aa° всегда брались в виде прямолинейных отрезков, длина и ориентация которых определялись четырьмя параметрами и подбирались в процессе адаптации. Поток на aa° принимался равномерным и нормальным к aa° , с $\Gamma=0$ и $M=1,002$. Расчеты велись на ЭВМ БЭСМ-6 по прямой схеме метода характеристик по программам, которые являются модификацией программ, составленных в [20] для профилирования сопел максимальной тяги. При счете разгонного участка на последовательно рассчитываемых c^+ - и c^- -характеристиках число точек N не превышало 40–50. Представление о временах счета дают такие цифры. Расчет плоского симметричного сопла, которое при течении в нем совершенного газа с показателем адиабаты $\kappa=1,25$ реализует равномерный поток с $M=30$, требует 18 мин (программа на АЛГОЛЕ-БЭСМ). Длина разгонного участка в этом случае составляет $2,7 \cdot 10^7$ полувысот входного сечения. Примерно столько же времени занимает расчет осесимметричного сопла на $M=30$, так как при $v=1$ большее время счета отдельной точки компенсируется сокращением размера рассчитываемой области (для $M=30$ и $\kappa=4/3$ длина осесимметричного сопла примерно в 10^3 раз меньше, чем плоского). Погрешности выполнения интегральных законов сохранения массы и x -компоненты импульса при этом не превышали 1%. Достаточно высокая точность результатов при умеренном числе точек достигалась, в частности, за счет замены p на $P=p^{1/\omega}$ с $\omega=4$ для $v=0$ и с $\omega=[2\kappa/(\kappa-1)]$, где $[\chi]$ — целая часть χ , для $v=1$. Целесообразность такой замены легко понять из рассмотрения (1.2). В (1.2) все коэффициенты, кроме коэффициента при dr , — слабо меняющиеся величины. Поэтому при замене дифференциалов разностями, а коэффициентов — полусуммами все слагаемые в (1.2), за исключением второго, аппроксимируются с высокой точностью. Что касается множителя $\beta/\rho u^2$, то его изменение нередко так велико, что при реальных N такая же точность оказывается недостижимой (например, при $M=30$ на оси x , $v=0$ и $\kappa=1,4$ указанный

коэффициент меняется вдоль s -характеристики пучка в 10^8 раз). Переход от p к P ведет к замене второго слагаемого в (1.2) на $\mp(\omega\beta P^{\omega-1}/\rho u^2)dP$ с медленно меняющимся множителем при dP . По точности и времени счета для всех $\kappa \leq 2$ замена p на P оказалась более эффективной, чем использование $\ln p$ или $p^{(\kappa-1)/2\kappa}$.

Возможности численного алгоритма демонстрирует фигура 2, где приведены контуры осесимметричных сопел, реализующих для разных κ равномерный поток с $M=10$. В верхней части фигуры масштабы по осям x и y разные (цифры у кривых — значения κ). В нижней части контур для $\kappa=5/3$ построен в одинаковом масштабе по обеим осям. Известно, что размеры сопел с уменьшением κ и с увеличением M на выходе растут. Для «больших M » можно установить и явные зависимости размеров кратчайших сопел от M , κ и ν . Сделаем это, одновременно уточнив смысл



Фиг. 2



Фиг. 3

термина «большие M ». Все размеры отнесем к радиусу (при $\nu=0$ — к полувысоте) минимального сечения, а плотность и скорость — к их критическим величинам. Тогда будем иметь

$$(2.1) \quad \mu = y^{1+\nu} \rho u, \quad \rho u = q(M, \kappa) = M \left(\frac{2}{\kappa+1} + \varepsilon M^2 \right)^{-1/2\varepsilon} \quad \left(\varepsilon = \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \right)$$

Здесь и ниже величины без индексов — параметры на срезе сопла, в частности y — ордината точки b° , μ — коэффициент расхода. Длина $L = x_{b^\circ} - x_c$ концевой участка 2, согласно (2.1), равна

$$(2.2) \quad L = y \sqrt{M^2 - 1} = \mu^{1/(1+\nu)} \sqrt{M^2 - 1} q^{-1/(1+\nu)} \approx \gamma M^{\omega+1} [1 + M^{-2/\varepsilon^2} (\kappa+1) (1+\nu)] \approx \gamma M^{\omega+1} \quad (\omega = 2/(\kappa-1) (1+\nu), \quad \gamma = (\mu \varepsilon^{1/2\varepsilon})^{1/(1+\nu)})$$

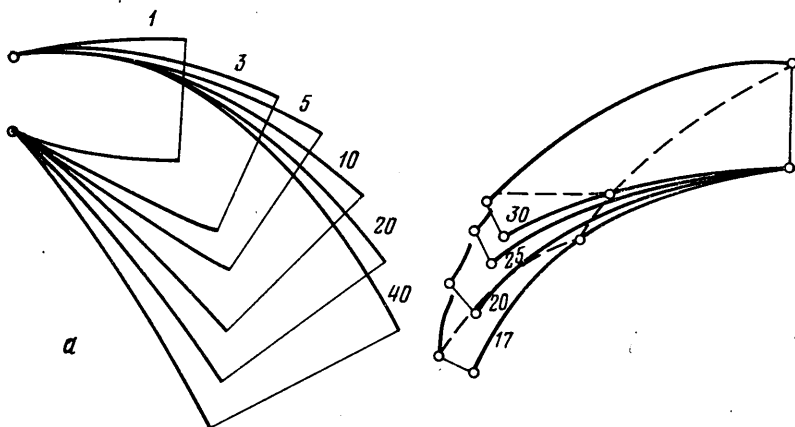
где третий переход справедлив при $M \gg 1/\varepsilon \sqrt{(\kappa+1) (1+\nu)}$. Последнее неравенство, определяющее в данном случае термин «большие M », более ограничительно, чем условие справедливости приближения сильной ударной волны. Полная длина сопла $X = x_c + L$. Согласно [21], $x_c = f(M, \kappa, \nu, r^\circ) q^{-1/(1+\nu)}$, где $0,75 < f < 2,5$ для $3,5 \leq M \leq \infty$, $1,25 \leq \kappa \leq 3$, $\nu=0$ и 1 , $0 \leq r^\circ \leq 5y_{a^\circ}$. Поэтому

$$X = [\mu^{1/(1+\nu)} \sqrt{M^2 - 1} + f(M, \kappa, \nu, r^\circ)] / [q(M, \kappa)]^{1/(1+\nu)} \approx \gamma M^{\omega+1}$$

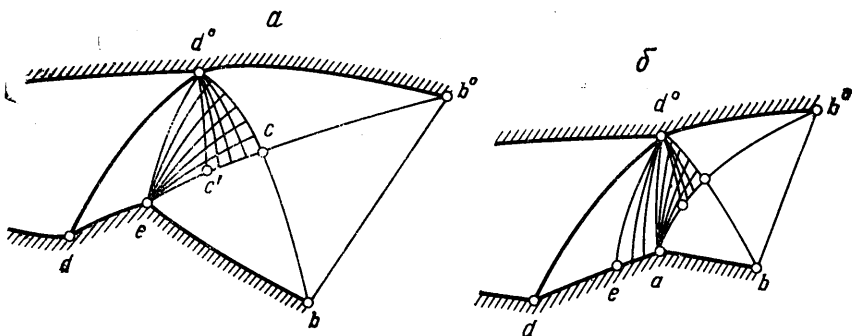
Как уже отмечалось, построение кольцевых сопел первого типа требует итераций. Пять таких сопел, дающих равномерный параллельный оси x поток с $M=4,7$, приведены на фиг. 3. Сечения bb° всех сопел — отрезки прямых одной длины и наклона. Сопоставление сопел фиг. 3 с образующими плоского сопла с теми же bb° и M демонстрирует сравнительно малое отличие. Сильнее всего различаются длина h отрезков aa° и их наклон α к оси y , где h определяется средней ординатой $\bar{y} = (y_a + y_{a^\circ})/2$ по известному расходу через bb° . Как показали расчеты, $\bar{y}$ с хорошей точностью можно определить «наложением» с совмещением на плоскость xy контуров плоского сопла. Те же $\bar{y}$ и α плоского сопла брались при расчетах в качестве начального приближения итерационной процедуры, требовавшей для каждого сопла фиг. 3 около 30 мин. За характерную длину на фиг. 3 принята величина h плоского сопла. В порядке роста $\bar{y}$ для представленных сопел $h=2,66; 1,28; 1,15; 1,10$ и $1,08$, а $\alpha=$

$=50,5^\circ; 44,8^\circ; 42,4^\circ; 41,4^\circ$ и $39,7^\circ$ соответственно ($\alpha=38,5^\circ$ для $v=0$ или, что эквивалентно, $v=1$, но $\bar{y} \rightarrow \infty$). В случае фиг. 3 и далее $\kappa=1,4$.

Из конфигураций, создающих неравномерные течения, интересны, в частности, плоские сопла, реализующие течение «свободного вихря». Линии тока этого течения — концентрические окружности, вдоль которых все параметры постоянны, а p растет от меньшей окружности к большей. Участок сверхзвукового течения данного типа можно использовать в устройствах, разделяющих среды с разным давлением [22]. Плоские сопла двух типов, реализующие распределения, отвечающие свободному вихрю на отрезках bb° прямых, проведенных из центров соответствующих вихрей, даны на фиг. 4. Каждое сопло характеризуется двумя величинами: $\bar{p}=p_0/p_\infty$



Фиг. 4



Фиг. 5

и $\pi=p_0/p_\infty$, где p_0 — давление торможения. На фиг. 4, а для $\pi=7$ и разных $\bar{p}$, указанных цифрами, нарисованы контуры и сечения bb° сопел первого типа, отвечающие фиксированным aa° и расходу. На фиг. 4, б для $\pi=7$ и $\bar{p}=40$ изображено несколько сопел второго типа с нижними стенками, заданными окружностями радиуса r с центром на продолжении bb° . Цифры — значения r . В случае фиг. 4, б введено еще ограничение на кривизну верхнего контура ($r^\circ=h$, где, как и ранее, h — длина aa°), исключившее излом в a° . Для двух сопел на фиг. 4, б штрихами показаны характеристики $b^\circ c$ и $a_+ c$. Интересно, что вне начальных участков в пределах точности построения верхние образующие более коротких сопел являются концевыми участками более длинных. При $r>30$ и прочих фиксированных условиях сопла второго типа построить не удастся из-за пересечения c^- -характеристик, идущих от $b^\circ c$ к стенке $a_+ b^\circ$, а при $r<17$ — из-за того, что характеристика $b^\circ c$ не доходит до нижней стенки.

3. Пусть нужно построить канал, реализующий на bb° заданный не-изэнтропический сверхзвуковой поток при изэнтропическом ($s=s_\infty$) течении на его входе. Предлагаемые ниже плоские конфигурации демон-

стрируют разумный, хотя и не оптимальный способ использования скачка для создания требуемого распределения $s=S(\psi) \geq s_\infty$ на отрезке bb° , ориентированном, как показано на фиг. 1, а. Прежде всего, решив, как и ранее, задачу Коши для $bb^\circ c$, найдем параметры на характеристиках bc и cb° , с которыми требуется состыковывать потоки, реализуемые на bc , cb° и в c в профилируемом канале. Возьмем затем произвольное плоское сопло с безударным и сравнительно равномерным сверхзвуковым потоком, например сопло, имеющее расширяющуюся часть с прямолинейными слегка расходящимися стенками. На его нижней стенке выберем точку d , в которой число Маха M_d таково, что требуемое приращение энтропии $\Delta s = S(0) - s_\infty$ обеспечивается в скачке, менее интенсивном, чем предельный (в последнем случае за скачком $M=1$). Вдоль скачка выполняются соотношения

$$(3.1) \quad \Delta s(\psi) = f(\sigma, V_-, p_-, \rho_-), \quad \frac{dx}{d\psi} = \frac{\cos \vartheta_- \cos(\vartheta_- + \sigma)}{k\rho_- u_- \sin \sigma},$$

$$\frac{dy}{d\psi} = \frac{\cos \vartheta_- \sin(\vartheta_- + \sigma)}{k\rho_- u_- \sin \sigma}$$

в которых индекс минус приписан параметрам перед скачком, ϑ — угол наклона вектора V к оси x , σ — угол между V и касательной к скачку, $\Delta s(\psi) = S(\psi) - s_\infty$ — заданная функция ψ , f — известная функция своих аргументов, определяемая условиями на скачке. Так как параметры до скачка — известные функции x и y , то уравнения (3.1) при выбранной точке d и достаточно гладкой функции $S(\psi)$ в принципе позволяют построить ударную волну dd° до ее пересечения с верхней стенкой (фиг. 5). Гладкость $S(\psi)$ требуется для существования решения с одним скачком, поскольку введение пересечений скачков, необходимых при разрывных $S(\psi)$, усложняет построение. Правда, может оказаться, что и в этом случае решение нельзя довести до верхней стенки, если, например, в некоторой точке требуемое $S(\psi)$ превысит максимально возможное значение, отвечающее $\sigma = 90^\circ$. В действительности в рамках рассматриваемой схемы поток должен оставаться сверхзвуковым, причем не только на dd° , но во всем треугольнике $ed^\circ d$, где ed° — c^+ -характеристика (течение в $ed^\circ d$, в том числе линия тока de , находятся из решения задачи Коши с данными на dd°). Если это условие не выполняется (или скачок не удастся довести до верхней стенки), то d следует сместить вниз по потоку и начать расчет вновь. Тем не менее из-за необходимости стыковки с известным течением на bcb° точку d следует выбирать так, чтобы поток на ed° был как можно ближе к звуковому. Если это так, то искомое решение можно реализовать в схеме, представленной на фиг. 5, а и содержащей два пучка волн разрезания ecd° и $d^\circ c's$. В противном случае, предположив по аналогии с [13, 14] разгону потока пучок волн сжатия ead° , придем к конфигурации, изображенной на фиг. 5, б. Отрезок ea ее нижней стенки профилируется так, чтобы идущие от него c^+ -характеристики либо фокусировались в d° , либо (при ограничении на скорость роста p вдоль $d^\circ b^\circ$ справа от d° [14]) приходили на участок максимально допустимого роста p . Построение верхней и нижней стенок справа от ed в случае фиг. 5, а и ad° — в случае фиг. 5, б не отличается от описанного в п. 1 для сопел первого типа. При этом предполагается, что сопло слева от dd° можно свободно перемещать в плоскости xy .

В заключение сделаем два замечания. Во-первых, для больших чисел Рейнольдса конфигурации, построенные для идеального газа, после поправки контуров на толщину вытеснения пограничного слоя реализуют в ядре потока поля параметров, близкие к идеальным. Это, естественно, справедливо лишь при отсутствии отрывов, что может достигаться либо специальными дополнительными ограничениями на

форму контуров (например, на их кривизну), либо специальными мерами по управлению пограничным слоем. Во-вторых, ограничение профилированием только сверхзвуковых частей оправдано не только желанием упростить исследование: вклад дозвуковых частей в общие габариты сопла, как правило, невелик, а меньшая свобода в выборе образующих (прежде всего из-за возможных отрывов) еще более снижает эффект их оптимизации.

Авторы признательны В. А. Вострецову за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кацкова О. Н., Крайко А. Н. Расчет осесимметричных изэнтропических течений реального газа. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 1, с. 125.
2. Landsbaum E. M. Contour nozzles. — ARS Journal, 1960, v. 30, № 3, p. 244.
3. Пирумов У. Г., Рубцов В. А., Суворова В. Н. Расчет осесимметричных сопел с учетом равновесных физико-химических превращений. — В кн.: Численные методы в газовой динамике. Вып. 2. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1963, с. 48.
4. Кацкова О. Н. Расчет равновесных течений газа в сверхзвуковых соплах. — Тр. Вычисл. центра АН СССР, 1964. 61 с.
5. Кацкова О. Н. Расчет кольцевых сверхзвуковых сопел и диффузоров. В кн.: Вычислительная математика, № 3. М.: Изд-во АН СССР. 1958, с. 111.
6. Пирумов У. Г., Рубцов В. А. Расчет осесимметричных сверхзвуковых кольцевых сопел. — Изв. АН СССР. Механика и машиностр., 1961, № 6, с. 15.
7. Денисова Н. В. Численный расчет профилированных сверхзвуковых сопел с центральным телом. — Тр. ЦАГИ, 1974. вып. 1571. 53 с.
8. Верговский В. П., Денисова Н. В., Межиров И. И. Расчет сверхзвуковой части кольцевых профилированных сопел. — Уч. зап. ЦАГИ, 1976, т. 7, № 3, с. 108.
9. Верговский В. П. Численный расчет плоских сверхзвуковых сопел с изломом контура. Таблицы координат сопел на числа $M=3-7$. — Тр. ЦАГИ, 1975, вып. 1680. 51 с.
10. Верговский В. П. Численное исследование течений в плоских соплах с угловой точкой при числах $M=3-5$ и нерасчетных показателях адиабаты. — Тр. ЦАГИ, 1976, вып. 1802, с. 3.
11. Овсянников А. М., Пирумов У. Г., Плетнева Е. М., Росляков Г. С. Атлас плоских сопел. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. 108 с.
12. Затолока В. В., Зудов В. Н., Шумский В. В. Расчетный анализ плоских несимметричных сопел при сверхзвуковой скорости на входе. — Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1972, № 13, вып. 3, с. 42.
13. Рылов А. И. Решение вариационной задачи о профилировании сопла, реализующего равномерный сверхзвуковой поток. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 4, с. 85.
14. Рылов А. И. К анализу некоторых сверхзвуковых несимметричных сопел. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 3, с. 154.
15. Овсянников А. М. Исследование смешанных течений в радиальных соплах для МГД-генераторов. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 23. М.: ВЦ МГУ, 1974, с. 103.
16. Киреев В. И. О моделировании газовых струй, истекающих из реальных сопел Лавалья. — Уч. зап. ЦАГИ, 1976, т. 7, № 2, с. 143.
17. Иванов М. Я., Крайко А. Н. Профилирование двумерных и пространственных сопел и расчет течения в них. — Газодинам. лазеры и лазерн. фотохимия. Лекции, прочитан. в Школе молод. ученых МГУ, Азау, апр. 1976. М., МГУ, 1978, с. 52.
18. Киреев В. И., Пирумов У. Г. О профилировании сопел модельных систем. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 2, с. 187.
19. Крайко А. Н. Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.
20. Тилляева Н. И. О профилировании сверхзвуковых частей осесимметричных сопел для неравномерных и закрученных течений. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 3, с. 124.
21. Крайко А. Н., Шеломовский В. В. О свободном расширении двумерных струй идеального газа. — ПММ, 1980, т. 44, вып. 2, с. 271.
22. Guile R. N., Hilding W. E. Investigation of a free-vortex aerodynamic window. — AIAA Paper, 1975, № 122, p. 9.

Москва

Поступила в редакцию
25.XII.1979