МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 · 1981

УДК 532.626.546:539.3

УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ ПОРИСТЫХ СРЕД, НАСЫЩЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ И ГАЗОМ

БОНДАРЕНКО Н. В.

При помощи подхода, предложенного в работе [1], составлена система уравнений движения насыщенных пористых сред, учитывающая взаимное влияние твердой, жидкой и газовых фаз. Коэффициенты проницаемости анизотропной пористой среды принимаются зависящими от направления. Показано, что при отсутствии газовых фаз и несжимаемости жидкости система уравнений приводится к общим уравнениям теории упругости анизотропного тела с фиктивными компонентами напряжения. Для насыщенной жидкостью пористой среды получены зависимости между коэффициентами проницаемости и константами анизотропии.

В качестве примера рассмотрена задача о движении жидкости в упругой пористой среде, представляющей собой ортотропную цилиндрическую область с полостью в виде кругового цилиндра.

1. Основная система уравнений. В ряде случаев пористая среда разбита соединяющимися макропорами и трещинами на структурные элементы-блоки. Трещины и макропоры насыщены жидкостью и свободным газом. Основная масса газа в блоках находится в адсорбированном состоянии. Считается, что в макропорах и трещинах имеет место ламинарная фильтрация жидкости и газа.

При построении основной системы уравнений воспользуемся методами механики взаимопроникающих континуумов [2], т. е. примем, что в каждой макроточке среды присутствуют все из рассматриваемых континуумов и происходит движение твердой, жидкой и газовых фаз.

Уравнения баланса массы и импульса компонентов с учетом того, что при движении смеси происходит переток газа из блоков в трещины и макропоры и свободный газ растворяется в жидкости, имеют вид

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial(\rho_1 m_1)}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho_1 m_1 \mathbf{v}^{(1)})=0, \quad \rho_1 m_1 \frac{dv_i^{(1)}}{dt}-\frac{\partial}{\partial x_j} m_1 \sigma_{ij}+F_i^{(1)}=0 \\
\frac{\partial(\rho_2 m_2)}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho_2 m_2 \mathbf{v}^{(2)})+g=0, \quad \rho_2 m_2 \frac{\partial v_i^{(2)}}{dt}+\frac{\partial(m_2 p_2)}{\partial x_i}+F_i^{(2)}=0 \\
\frac{\partial(\rho_3 m_3)}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho_3 m_3 \mathbf{v}^{(3)})-g+g_1=0, \quad \rho_3 m_3 \frac{dv_i^{(3)}}{\cdot\, dt}+\frac{\partial(m_3 p_3)}{\partial x_i}+F_i^{(3)}=0
\end{gathered} \tag{1.1}
$$

Здесь фаза 1 — твердые частицы среды, фаза 2 — жидкость, фаза 3 — свободный газ. Величины g и g_1 обозначают количество свободного газа, растворившегося в жидкости и переток газа из блоков в трещины; ρ_k, p_k, $\mathbf{v}^{(k)}$ — плотность, давление и вектор скорости k-й фазы; m_k — содержание k-й фазы в единице объема; σ_{ij} — компоненты напряжения твердой фазы; $F_i^{(k)}$ — силы межфазных взаимодействий.

Согласно [3], величины g и g_1 запишем в виде

$$
g=s(p_3-p_2), \quad g_1=\alpha(p_4^2-p_3^2) \tag{1.2}
$$

где α, s — коэффициенты газоотдачи и растворимости соответственно; p_4 — давление газа в микропорах, содержащихся в блоках. В микропорах основной формой переноса газа является диффузия. Вводя закон Фика для плотности диффузионного потока в уравнение неразрывности массы, получим уравнение движения газа в микропорах в виде [1]

$$\partial(a+c)/\partial t - \operatorname{div}[D \operatorname{grad}(a+c)] = 0 \tag{1.3}$$

где a, c — величина адсорбции и концентрация газа, отнесенные к единице объема сорбента; D — коэффициент диффузии. Величину адсорбции a представим с помощью формулы Ленгмюра [4]

$$a = a_0 b_0 c (1 + b_0 c)^{-1} \tag{1.4}$$

где a_0, b_0 — постоянные.

Будем считать, что состояние газа подчиняется закону Клапейрона, тогда для концентрации газа c имеем

$$c = p_4 / zRT \tag{1.5}$$

Здесь z — коэффициент сжимаемости газа; R — газовая постоянная; T — абсолютная температура.

Уравнения фильтрации жидкости и свободного газа в анизотропной пористой среде имеют вид [5]

$$[v_i^{(\alpha)}] = -[k_{ij}^{(\alpha)}][\partial p_\alpha / \partial x_j] \qquad (\alpha = 2; 3) \tag{1.6}$$

Здесь $[k_{ij}^{(2)}]$, $[k_{ij}^{(3)}]$ — обобщенные коэффициенты фильтрации жидкости и газа. Уравнения (1.6) совместно с (1.1) определяют силы межфазовых взаимодействий $F_i^{(2)}$, $F_i^{(3)}$.

Записав уравнение неразрывности импульса для всей среды в целом и учитывая соотношение (1.1), находим результирующую силу $F_i^{(1)}$, действующую на твердую фазу

$$F_i^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=2}^{4} m_k p_k + \sum_{k=2}^{4} \rho_k m_k \frac{d_k v_i^{(k)}}{dt}, \qquad \frac{d_k}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_j^{(k)} \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{1.7}$$

В работах [5, 6] предложен энергетический метод для определения соотношений, связывающих компоненты напряжения твердой фазы и давление жидкости с деформациями фаз. Распространив его на рассматриваемую среду, получим

$$Q_{ij} = \partial W / \partial e_{ij}, \qquad Q_{ij} = m_1 \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sum_{k=2}^{4} m_k p_k \qquad (i, j = 1; 2; 3) \tag{1.8}$$

$$p_k = \partial W / \partial \zeta_k, \qquad \zeta_k = -m_k \operatorname{div}(\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^{(1)}) \qquad (k = 2;\ 3;\ 4) \tag{1.9}$$

Здесь $\mathbf{u}^{(i)}$ — вектор смещения соответствующей фазы; Q_{ij} — фиктивные компоненты напряжения; W — энергия деформации упругой насыщенной пористой среды, являющаяся функцией компонент деформации твердой фазы E_{ij} и параметров ζ_k; δ_{ij} — единичный тензор.

Таким образом, получена замкнутая система уравнений (1.1)—(1.6), (1.8), (1.9) механики насыщенных жидкостью и газом пористых сред. Отметим, что если не учитывать наличие газа и считать, что твердая фаза находится в статическом равновесии, то соотношения (1.1)—(1.6), (1.8), (1.9) совпадают с уравнениями, полученными в работах [5, 6]; если отсутствует жидкая фаза и пористая среда изотропна по проницаемости, то построенная система идентична уравнениям, приведенным в работе [1].

Покажем, что если газовые фазы отсутствуют, жидкость несжимаема и среда находится в статическом равновесии, то система уравнений приводится к общим уравнениям теории упругости.

2. Движение несжимаемой жидкости в упругой анизотропной пористой среде. Потенциальную энергию упругих деформаций представим как квадратичную форму компонент деформаций твердой фазы и параметра ζ_2

$$2W=c_{11}e_{11}^2+2c_{12}e_{11}e_{22}+2c_{13}e_{11}e_{33}+2c_{14}e_{11}e_{23}+2c_{15}e_{11}e_{13}+ +2c_{16}e_{11}e_{12}+c_{22}e_{22}^2+2c_{23}e_{22}e_{33}+2c_{24}e_{22}e_{23}+2c_{25}e_{22}e_{13}+ +2c_{26}e_{22}e_{12}+\ldots+c_{66}e_{12}^2+M_1\zeta_2^2+2M_2e_{11}\zeta_2+2M_3e_{32}\zeta_2+2M_4e_{33}\zeta_2 \tag{2.1}$$

Так как жидкость несжимаема, то, согласно (1.9), имеем

$$\zeta_2=m(e_{11}+e_{22}+e_{33}) \tag{2.2}$$

Из уравнений (1.8), учитывая (2.1), получим

$$M_2=M_3=M_4 \tag{2.3}$$

Коэффициенты c_{ij}, входящие в (2.1), могут быть представлены в виде

$$c_{ij}=(1-m)A_{ij} \tag{2.4}$$

где A_{ij} — константы, характеризующие анизотропию твердой фазы. Учитывая соотношения (1.8), (2.1)—(2.4), систему уравнений (1.1)—(1.6), (1.8), (1.9) приведем к виду

$$\partial Q_{ij}/\partial x_j=0, \quad \operatorname{div}(\mathbf{v}^{(2)})=0 \tag{2.5}$$

$$[v_i^{(2)}]=-[k_{ij}^{(2)}][\partial p_2/\partial x_j] \tag{2.6}$$

$$\begin{Vmatrix} Q_{11}\\ Q_{22}\\ Q_{33}\\ Q_{23}\\ Q_{13}\\ Q_{12}\\ p_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & mM_2\\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & mM_2\\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} & mM_2\\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} & 0\\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} & 0\\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} e_{11}\\ e_{22}\\ e_{33}\\ e_{23}\\ e_{13}\\ e_{12}\\ e \end{Vmatrix} \tag{2.7}$$

$$H=mM_1+M_2, \qquad e=e_{11}+e_{22}+e_{33}$$

Пусть насыщенная жидкостью пористая среда представляет собой цилиндрическое тело. Область поперечного сечения может быть как конечной, так и бесконечной, односвязной или многосвязной. Считаем, что усилия, распределенные по боковой поверхности, действуют в плоскостях, нормальных к образующей, и не изменяются по длине. Объемные силы отсутствуют.

Уравнения (2.5) совместно с первыми шестью уравнениями (2.7) образуют систему уравнений теории упругости для сплошного тела с фиктивными компонентами напряжения Q_{ij}. Согласно [7], функции напряжения $F(x_1, x_2)$, $\psi(x_1, x_2)$, определяющие поле напряжений, являются решением системы уравнений

$$L_4F+L_3\psi=0, \qquad L_3F+L_2\psi=-2\theta+(Aa_{34}-Ba_{35})a_{33}^{-1} \tag{2.8}$$

Здесь a_{ij} — коэффициенты, входящие в систему уравнений (2.7), разрешенную относительно компонент деформаций e_{ij}; L_4, L_3, L_2 — известные операторы [7]; A, B, θ — постоянные, определяемые из условий на торцах. Фиктивные компоненты напряжения связаны с функциями F и ψ соотношениями [7]

$$(2.9)\qquad Q_{11}=\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2},\quad Q_{22}=\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2},\quad Q_{12}=-\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\,\partial x_2},\quad Q_{13}=\frac{\partial\psi}{\partial x_2},\quad Q_{33}=\frac{\partial\psi}{\partial x_1}$$

Давление жидкости p_2 выразим через F и ψ, подставив (2.9) в последнее уравнение системы (2.7). Вводя определение (2.6) в уравнение баланса массы жидкости и считая, что нет перетока жидкости между сечениями, перпендикулярными к образующей, для функций напряжения F и ψ получим систему уравнений в виде

$$(2.10)\qquad L_4^{(1)}F+L_3^{(1)}\psi=0,\quad L_3^{(2)}F+L_2^{(1)}\psi=-(a_{13}+a_{23}+a_{33})\,(Ak_{13}+Bk_{23})\,a_{33}^{-1}$$

Здесь $L_4^{(1)}$, $L_3^{(1)}$, $L_3^{(2)}$, $L_2^{(1)}$ — операторы того же порядка, что и L_4, L_3, L_2, но с другими коэффициентами. Выразив функцию ψ через F, систему уравнений (2.8) и (2.10) легко привести к уравнению шестого порядка относительно F. Таким образом, чтобы функция F являлась решением системы уравнений (2.5)—(2.7), достаточно потребовать равенства коэффициентов при соответствующих производных.

Если насыщенная жидкостью пористая среда имеет плоскость упругой симметрии, нормальную к образующей, то система уравнений (2.8) имеет вид

$$(2.11)\qquad \beta_{22}\frac{\partial^4 F}{\partial x_1^4}-2\beta_{26}\frac{\partial^4 F}{\partial x_1^3\,\partial x_2}+(2\beta_{12}+\beta_{66})\frac{\partial^4 F}{\partial x_1^2\,\partial x_2^2}-$$
$$-2\beta_{16}\frac{\partial^4 F}{\partial x_1\,\partial x_2^3}+\beta_{11}\frac{\partial^4 F}{\partial x_2^4}=0$$

а система уравнений (2.10) —

$$(2.12)\qquad H\Big\{k_{11}(\beta_{12}+\beta_{22})\frac{\partial^4 F}{\partial x_1^4}+[2k_{12}(\beta_{12}+\beta_{22})-k_{11}(\beta_{16}+\beta_{26})]\frac{\partial^4 F}{\partial x_1^3\,\partial x_2}+$$
$$+[k_{11}(\beta_{11}+\beta_{12})+k_{22}(\beta_{12}+\beta_{22})-2k_{12}(\beta_{16}+\beta_{26})]\frac{\partial^4 F}{\partial x_1^2\,\partial x_2^2}+[2k_{12}(\beta_{12}+\beta_{12})-$$
$$-k_{22}(\beta_{16}+\beta_{26})]\frac{\partial^4 F}{\partial x_1\,\partial x_2^3}+k_{22}(\beta_{11}+\beta_{22})\frac{\partial^4 F}{\partial x_2^4}\Big\}=0$$

Из сравнения (2.11), (2.12) найдем зависимости между коэффициентами проницаемости и константами анизотропии насыщенной среды

$$(2.13)\qquad \begin{aligned} &Hk_{11}(\beta_{12}+\beta_{22})=\beta_{22},\quad H(\beta_{11}+\beta_{12})k_{22}=\beta_{11},\\ &H[2k_{12}(\beta_{12}+\beta_{\alpha\alpha})-k_{3-\alpha,\,3-\alpha}(\beta_{16}+\beta_{26})]=-2\beta_{\alpha 6}\qquad(\alpha=1;\ 2)\\ &H[k_{11}(\beta_{11}+\beta_{12})+k_{22}(\beta_{12}+\beta_{22})-2k_{12}(\beta_{16}+\beta_{26})]=2\beta_{12}+\beta_{66}\end{aligned}$$

Отметим, что если среда изотропна, то

$$(2.14)\qquad k_{11}=\beta_{11}[(\beta_{12}+\beta_{11})H]^{-1},\qquad 2\beta_{11}=2\beta_{12}+\beta_{66}$$

и уравнение (2.11) обращается в известное уравнение теории упругости [8].

Зная распределение компонент напряжения Q_{ij} из (2.6), (2.7) и (1.8), легко определить распределение давления p_2 и поле скоростей $\mathbf{v}^{(2)}$ жидкости и истинные компоненты напряжения σ_{ij}.

Таким образом, показано, что при рассмотрении вопросов механики насыщенных жидкостью пористых сред, находящихся в статическом равновесии, достаточно построить решение уравнений теории упругости анизотропного тела для фиктивных компонент напряжений Q_{ij}.

3. Движение жидкости и ортотропной пористой среде. Для иллюстрации возможностей предложенного метода рассмотрим задачу о напряженном состоянии и фильтрации несжимаемой жидкости в ортотропной пористой среде, представляющей собой цилиндрическое тело с полостью в виде кругового цилиндра.

Пусть насыщенная пористая среда находится в статическом равновесии под действием усилий, равномерно распределенных по внешней и внутренней боковым поверхностям, нормальных к образующей и не меняющихся по длине. В этом случае задача сводится к определению напряженного состояния, распределения давления и поля скоростей жидкости в ортотропной плоскости с круговым отверстием радиуса r. Плоскость сжимается на бесконечности усилиями $-p$ и $-q$ и равномерно распределенными усилиями по контуру отверстия $-p_1$.

Фиктивные компоненты напряжения Q_{ij} ищем в виде

$$Q_{ij}=Q_{ij}{}^{\circ}+Q_{ij}{}^{1} \tag{3.1}$$

где $Q_{ij}{}^{\circ}$ — компоненты напряжения в сплошной среде; $Q_{ij}{}^{1}$ — дополнительные компоненты напряжения, обусловленные наличием кругового отверстия и равномерно распределенной по его контуру нагрузки — p_1.

Компоненты напряжения $Q_{ij}{}^{\circ}$ имеют вид

$$Q_{11}{}^{\circ}=-p,\quad Q_{22}{}^{\circ}=-q,\quad Q_{12}{}^{\circ}=0 \tag{3.2}$$

Наличие кругового отверстия и равномерно распределенной нагрузки p_1 равносильно приложению к его контуру усилий

$$X_n=(p-p_1)\,dx_2/ds,\quad Y_n=-(q-p_1)\,dx_1/ds \tag{3.3}$$

Используя методы, изложенные в [7, 9], и учитывая граничные условия (3.3), находим дополнительные компоненты ($\alpha,\beta=1;\ 2;\ \alpha\geqslant\beta$)

$$Q_{\alpha\beta}{}^{1}=2(-1)^{\alpha-\beta}\operatorname{Re}[\mu_1^{4-\alpha-\beta}\Phi_1(z_1)+\mu_2^{4-\alpha-\beta}\Phi_2(z_2)] \tag{3.4}$$

$$\Phi_j(\zeta_j)=-\frac{r[p-p_1+i\mu_{j+1}(q-p_1)]}{2i(\mu_j-\mu_{j+1})}\zeta_j^{-1};\qquad \mu_3=\mu_1$$

Функции, отображающие внешность кругового отверстия на внешность эллипсов, имеют вид

$$z_j=\omega(\zeta_j)=r[(1-i\mu_j)\zeta_j+(1+i\mu_j)\zeta_j^{-1}]/2 \tag{3.5}$$

Здесь величины μ_j являются корнями биквадратного уравнения

$$\beta_{22}\mu^4+(2\beta_{12}+\beta_{66})\mu^2+\beta_{11}=0 \tag{3.6}$$

Суммируя выражения (3.2) и (3.4), находим фиктивные компоненты напряжения Q_{ij}. Для ортотропной среды, согласно уравнению (2.8), компоненты деформаций e_{ij} определяются соотношениями вида

$$e_{11}=Q_{11}\beta_{11}+\beta_{12}Q_{22},\quad e_{22}=\beta_{12}Q_{11}+\beta_{22}Q_{22},\quad e_{12}=\beta_{66}Q_{12} \tag{3.7}$$

Подставив выражения для фиктивных компонент напряжений Q_{ij} (3.7) и учитывая последнее уравнение системы (2.7), находим распределение давления жидкости

$$p_2=2H\,\mathrm{Re}\,\{[\mu_1^2(\beta_{11}+\beta_{12})+\beta_{12}+\beta_{22}]\,\Phi_1(z_1)+[\mu_2^2(\beta_{11}+\beta_{12})+ +\beta_{22}+\beta_{12}]\,\Phi_2(z_2)\}-(\beta_{11}+\beta_{12})p-(\beta_{12}+\beta_{22})q \tag{3.8}$$

Вводя выражение (3.8) в уравнение фильтрации (2.6), определяем поле скоростей жидкости.

Истинные компоненты напряжения σ_{ij} находятся из уравнения (1.8) с учетом (3.8) и имеют вид

$$(1-m)\sigma_{11}=2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}\{\mu_j^2+mH[\mu_j^2(\beta_{11}+\beta_{12})+\beta_{12}+\beta_{22}]\}\,\Phi_j(z_j)- -p(1+m(\beta_{11}+\beta_{12}))]-m(\beta_{12}+\beta_{22})q \tag{3.9}$$

$$(1-m)\sigma_{22}=2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}\{1+mH[\mu_j^2(\beta_{11}+\beta_{12})+\beta_{12}+\beta_{22}]\}\,\Phi_j(z_j)- -q[1+m(\beta_{11}+\beta_{12})]-m(\beta_{12}+\beta_{22})p$$

$$(1-m)\sigma_{12}=-2\,\mathrm{Re}\,[\mu_1\Phi_1(z_1)+\mu_2\Phi_2(z_2)]$$

Таким образом, соотношения (3.9), (3.8), (2.6) описывают напряженное состояние твердой фазы, распределение давления и поле скоростей жидкости в насыщенной ортотропной пористой среде с круговым отверстием.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Подильчук Ю. Н.* К теории деформирования газонасыщенных пористых сред.— Прикл. мех., 1976, т. 12, № 12.
2. *Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А.* Механика насыщенных пористых сред. М., Недра, 1970.
3. Физикохимия газодинамических явлений в шахтах. М., Недра, 1973.
4. *Тимофеев Д. П.* Кинетика адсорбции. М., Изд-во АН СССР, 1962.
5. *Biot M. A.* Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid.— J. Appl. Phys., 1955, v. 26, No. 2 (рус. перев.: *Био.* Теория упругости и консолидации анизотропной пористой среды. Механика. Сб. перев. и обзоров иностр. период. лит. 1956, № 1 (35)).
6. *Biot M. A.* Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media.— J. Appl. Phys., 1962, v. 33, No. 4.
7. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
9. *Космодамианский А. С.* Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. Киев – Донецк: Вища школа, 1976.

Донецк

Поступила в редакцию
10.XII.1979