

УДК 532.546

**РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНОГО ВЛАГОПЕРЕНОСА  
ПРИ КАПЕЛЬНОМ И ВНУТРИПОЧВЕННОМ ОРОШЕНИИ**

НОВОСЕЛЬСКИЙ С. Н., ШУЛЬГИН Д. Ф.

Рассматривается нестационарный влагоперенос при капельном и внутрипочвенном орошении. Капельницы моделируются точечными, а трубы-увлажнители — линейными источниками переменной интенсивности. Используется трехмерная модель влагопереноса в ненасыщенных однородно-анизотропных средах с учетом внутрипочвенных источников влагопоглощения (корней растений) и наличия источников увлажнения, моделируемых импульсивными дельта-функциями Дирака. Исходное уравнение линеаризуется с помощью подстановки типа Кирхгофа. Получены формулы, позволяющие по известным решениям для точечных, линейных или плоских увлажнителей различных геометрических конфигураций в неограниченной области строить решения при произвольном их расположении в полубесконечной области с горизонтальной границей, совпадающей с поверхностью почвы.

На современном этапе развития сельского хозяйства все шире начинают применять эти новые способы орошения, обладающие рядом преимуществ по сравнению с традиционными поверхностными способами орошения. Актуальными в настоящее время являются вопросы теоретического исследования движения влаги в ненасыщенных почвогрунтах при работе капельниц и труб-увлажнителей с учетом агроклиматических условий и гидрофизических характеристик почв орошаемых площадей.

Вопросы, связанные с движением влаги при подпочвенном увлажнении, рассматривались в [1–5].

**1. Капельное орошение.** Рассматриваемый процесс описывается решением следующей краевой задачи в области  $\Omega = \{-\infty < x, y < \infty, z \geq z_0, t > 0\}$ :

$$(1.1) \quad \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial H}{\partial z} \right) -$$

$$- J(W, t) + \sum_{j=1}^N Q_j(t) \delta(x-x_j) \delta(y-y_j) \delta(z-z_j)$$

$$(1.2) \quad z=z_0, K_z(W) \frac{\partial H}{\partial z} = \varepsilon(x, y, t); \quad t=0, W = \varphi_0(x, y, z)$$

$$x, y = \pm \infty, z = \infty, K_z(W) \frac{\partial H}{\partial z} = 0$$

Здесь  $H(x, y, z, t) = \psi(W) - z -$  напор,  $\psi(W) = P/\gamma < 0$  — капиллярный потенциал,  $W$  — объемная влажность грунта,  $K_x(W) = K_1 K(W)$ ,  $K_y(W) = K_2 K(W)$ ,  $K_z(W) = K_3 K(W)$  — коэффициенты влагопроводности вдоль главных осей анизотропии, совпадающие с осями координат  $x, y, z$ ;  $K_1, K_2, K_3$  — постоянные коэффициенты фильтрации грунта вдоль главных осей анизотропии,  $K(W)$  — некоторая функция влажности грунта,  $Q_j(t)$  — интенсивность  $j$ -го источника с координатами  $x_j, y_j, z_j$ ;  $z_j \geq z_0$ ,  $N$  — число источников,  $z = z_0 \leq 0$  — плоскость, совпадающая с поверхностью почвы,  $\varepsilon$  — интенсивность испарения (инфильтрации),  $J(W, t)$  — член, учитывающий интенсивность транспирации влаги корнями растений,  $\varphi_0$  — начальное влагосодержание грунта,  $t$  — время.

Рассмотрим случай постоянной начальной влажности грунта  $\varphi_0 = W_0 = \text{const}$ . Введем новую функцию типа Кирхгофа

$$(1.3) \quad \theta = \theta(W) = \frac{4\pi\sqrt{K_1 K_2}}{Q \cdot \beta_3 K_3} \int_{w_0}^W D_z(W) dW, \quad D_z(W) = K_z(W) \frac{d\psi}{dW}$$

где  $D_z$  — коэффициент диффузивности почвенной влаги в направлении оси  $z$ .

Осредняя в полученном уравнении  $D_z(W)$  согласно [3] и введя безразмерные переменные от (1.1) — (1.2), можно перейти к следующей краевой задаче:

$$(1.4) \quad L\theta = \frac{\partial\theta}{\partial\tau} - \Delta\theta + 2 \frac{\partial\theta}{\partial\xi} = -g(\tau)\theta + 4\pi \sum_{j=1}^N q_j(\tau) \times \\ \times \delta(\xi - \xi_j) \delta(\eta - \eta_j) \delta(\zeta - \zeta_j)$$

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \zeta = \zeta_0 = \beta_3 z_0, \quad \theta^{-1/2} \partial\theta / \partial\zeta = \varepsilon_1(\xi, \eta, \tau) \\ \xi, \eta = \pm\infty, \quad \zeta = \infty, \quad \theta^{-1/2} \partial\theta / \partial\zeta = 0; \quad \tau = 0, \quad \theta = 0 \\ \varepsilon_1 = 2\pi\sqrt{K_1 K_2} \varepsilon(x, y, t) / (K_3 \beta_3^2 Q_*), \quad \xi = \beta_1 x, \quad \eta = \beta_2 y \\ \zeta = \beta_3 z, \quad \tau = \alpha t, \quad \beta_3 = \kappa / 2, \quad \beta_2 = \sqrt{K_3 / K_2} \beta_3 \\ \beta_1 = \sqrt{K_3 / K_1} \beta_3, \quad \alpha = \beta_3^2 \langle D \rangle, \quad q_j(\tau) = Q_j(t) / Q_* \end{aligned}$$

Здесь  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $Q_*$  — характерный масштабный множитель,  $\langle D \rangle$  — осредненное значение  $D_z(W)$ . При переходе от (1.1) — (1.2) к (1.4) — (1.5) использовалось предположение о линейной связи между  $\theta(W)$  и  $K_z(W)$  и  $\theta(W)$  и  $J(W, t)$ , что эквивалентно условиям

$$(1.6) \quad D_z^{-1} dK_z / dW = \kappa = \text{const}, \quad D_z^{-1} dJ_z / dW = g(t) \\ J_1(W, t) = 4\pi\sqrt{K_1 K_2} J(W, t) (K_3 \beta_3^2 Q_*)^{-1}$$

О выборе параметра  $\kappa$  и функции  $g(t)$  будет сказано ниже.

Условием (1.6) удовлетворяет довольно широкий класс зависимостей гидрофизических параметров почвы от влажности, а также некоторые нелинейные зависимости  $J(W, t)$ . Для следующих часто принимаемых в расчетах зависимостей гидрофизических параметров от объемной влажности грунта:

$$(1.7) \quad K = \left( \frac{W - W_c}{m - W_c} \right)^n = \bar{W}^n, \quad \psi = \frac{1}{\gamma} \ln \bar{W}, \quad J = E(t) (\bar{W}^n - \bar{W}_*^n)$$

имеем  $\kappa = n\gamma$  и  $g(t) = 4E(t) / K_3 \kappa$ , где  $W_c$  — связанная влага,  $m$  — общая пористость грунта,  $n = 3-5$ ,  $\gamma = 0,02-0,1 \text{ см}^{-1}$ ,  $W_* = W_0$  — влажность завядания,  $E(t)$  — некоторая известная функция времени.

Для почв типа Гарднера

$$D_z = a \exp(bW), \quad K_z = c \exp(bW), \quad J = E(t) [\exp(bW) - \exp(bW_*)]$$

имеем  $\kappa = cb/a$ ,  $g = 8bE(t) / a\kappa^3$ ,  $W_* = W_0$ , ( $a, b, c = \text{const}$ ).

Принятый способ линеаризации уравнения (1.1) анализировался в [3] для ранних стадий увлажнения грунта, когда возможны максимальные отклонения линеаризованных решений от точных, а влиянием силы тяжести на рассматриваемый процесс можно пренебречь. При этом решение оказалось близким к численному решению нелинейного уравнения (1.1), полученному с помощью ЭВМ. При учете влияния силы тяжести  $\partial\theta/\partial\tau \rightarrow 0$  для больших  $t$  и решение линеаризованного уравнения (1.4) совпадает с точным при выполнении условий (1.6). Это дает основание

считать принятую линеаризацию хорошим приближением для решения нелинейных задач влагопереноса.

Введение переменной

$$(1.8) \quad V(\xi, \eta, \zeta, \tau) = \theta(\xi, \eta, \zeta, \tau) g(\tau), \quad g_1(\tau) = \exp \left[ \int_0^\tau g(\rho) d\rho \right]$$

позволяет задачу (1.4) – (1.5) записать в виде

$$(1.9) \quad LV = 4\pi \sum_{j=1}^N q_{j1}(\tau) \delta(\xi - \xi_j) \delta(\eta - \eta_j) \delta(\zeta - \zeta_j)$$

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \zeta &= \zeta_0, \quad V^{-1/2} \partial V / \partial \zeta = \varepsilon_2(\xi, \eta, \tau) \\ \xi, \eta &= \pm \infty, \quad \zeta = \infty, \quad V^{-1/2} \partial V / \partial \xi = 0; \quad \tau = 0, \quad V = 0 \\ q_{j1}(\tau) &= q_j(\tau) g_1(\tau), \quad \varepsilon_2 = g_1(\tau) \varepsilon_1(\xi, \eta, \tau) \end{aligned}$$

Функция  $V$  ищется в виде

$$(1.11) \quad V_j(\xi, \eta, \zeta, \tau) = V_{1j}(\xi, \eta, \zeta, \tau) + V_{2j}(\xi, \eta, \zeta, \tau)$$

где  $V_{1j}$  удовлетворяет (1.9) – (1.10) при  $\varepsilon_2 = 0$ , а  $V_{2j}$  – уравнению (1.9) при  $q_{j1} = 0$  ( $j = 1, \dots, N$ ) и условиям (1.10). В силу линейности (1.9) достаточно ограничиться рассмотрением случая одного  $j$ -го источника.

Применяя интегральное преобразование Лапласа по  $\tau$  и комплексные преобразования Фурье по  $\xi$  и  $\eta$ , введем преобразованту

$$(1.12) \quad V_{vj}^*(p, \sigma, s, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-p\tau} \iint_{-\infty}^\infty e^{-i(\sigma\xi + s\eta)} V_{vj}(\xi, \eta, \zeta, \tau) d\xi d\eta d\tau$$

$$(v=1, 2), \quad V_{2j} \equiv V_2$$

Решение в области изображения запишется в виде

$$(1.13) \quad V_{1j}^*(p, \sigma, s, \zeta) = \sum_{k=1}^3 V_{1k}^*(p, \sigma, s, \zeta)$$

$$(1.14) \quad \begin{aligned} V_2^*(p, \sigma, s, \zeta) &= 2\varepsilon_2^* \exp[(1-A)(\zeta - \zeta_0)] (1+A)^{-1} \\ A(p, \sigma, s) &= \sqrt{1+p+\sigma^2+s^2}, \quad \zeta_0 = \beta_3 z_0 \end{aligned}$$

Здесь  $\varepsilon_2(p, \sigma, s)$  – преобразованная функции  $\varepsilon_2(\xi, \eta, \tau)$ ,  $\sigma, s$  – параметры преобразований Фурье, а функции  $V_{1k}^*(p, \sigma, s, \zeta)$  имеют вид

$$(1.15) \quad \begin{aligned} V_{11}^* &= A^{-1} \psi_j \exp(-|\zeta - \zeta_j| A), \quad V_{12}^* = 2\psi_j \exp[-(\zeta + \zeta_j - 2\zeta_0) A] \\ V_{13}^* &= {}^1/2 V_{12}^* (1+A), \quad \psi_j(p, \sigma, s, \zeta) = q_{j1}^*(p) [\zeta - \zeta_j - i(\sigma\xi_j + s\eta_j)] \end{aligned}$$

Здесь  $i$  – мнимая единица,  $q_{j1}^*(p)$  – изображение Лапласа функции  $q_{j1}(\tau)$ . При  $\zeta_0 \rightarrow -\infty$   $V_{12}^* = V_{13}^* = 0$ , а оригинал  $V_{11}^*$  является решением (1.9) для точечного источника интенсивности  $q_{j1}(\tau)$  в неограниченной во всех направлениях области  $\Omega_\infty = \{-\infty < \xi, \eta, \zeta < \infty, \tau > 0\}$ , которое обозначим как  $V_{\infty j}(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ . Тогда соответствующее решение (1.4) в  $\Omega_\infty$ , которое в дальнейшем обозначено как  $\theta_{\infty j}(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ , с учетом (1.8) запишется в виде

$$(1.16) \quad \theta_{\infty j} = \frac{e^{i-\zeta_0}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\tau q_j(\tau - \mu) [g_2(\tau, \mu)]^{-1} \mu^{-3/2} \exp \left[ -\mu - \frac{r_j^2}{4\mu} \right] d\mu$$

$$r_j^2 = (\xi - \xi_j)^2 + (\eta - \eta_j)^2 + (\zeta - \zeta_j)^2, \quad g_2(\tau, \mu) = \exp \left[ \int_{\tau-\mu}^{\tau} g(\rho) d\rho \right]$$

Оригиналом  $V_{12}^*$  является функция  $V_{\infty j}(\xi, \eta, \zeta - 2(\xi - \xi_j), \tau) \times \exp[2(\zeta_0 - \zeta_j)]$ , а изображения  $V_{11}^*$  и  $V_{12}^*$  связаны соотношением

$$(1.17) \quad V_{12}^*(p, \sigma, s, \zeta) = \frac{1}{2} \exp[2(\zeta + \zeta_j - \zeta_0)] \int_{\zeta+2(\zeta_j-\zeta_0)}^{\infty} e^{-2\mu} V_{11}^*(p, \sigma, s, \mu) d\mu$$

Тогда с учетом (1.16), (1.17), (1.8) решение задачи (1.4)–(1.5) при отсутствии испарения (инфильтрации)  $\varepsilon_1 = 0$ , обозначенное  $\theta_{1j}$ , имеет вид

$$(1.18) \quad \theta_{1j}(\xi, \eta, \zeta, \tau) = \theta_{\infty j}(\xi, \eta, \zeta, \tau) + 2 \exp[2(\zeta + \zeta_j - \zeta_0)] \times \\ \times \int_{\zeta+2(\zeta_j-\zeta_0)}^{\infty} e^{-2\mu} \theta_{\infty j}(\xi, \eta, \mu, \tau) d\mu + \exp[2(\zeta_0 - \zeta_j)] \theta_{\infty j}[\xi, \eta, \zeta - 2(\zeta_0 - \zeta_j), \tau]$$

Для случая источника на поверхности почвы ( $\zeta_j = \zeta_0$ ) решение (1.20) упрощается и примет вид

$$(1.19) \quad \theta_{1j} = 2 \left[ \theta_{\infty j}(\xi, \eta, \zeta, \tau) + e^{2\zeta} \int_{\zeta}^{\infty} e^{-2\mu} \theta_{\infty j}(\xi, \eta, \mu, \tau) d\mu \right]$$

Этот результат для стационарного случая при  $g(\tau) = 0$  ( $g_1(\tau) = 1$ ) был получен в работе [5]. Функция  $\theta_{\infty j}(\xi, \eta, \zeta)$ , приведенная в [5], легко получается из (1.16) при  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $g_1(\tau) = q_1 = \text{const}$ .

Применяя теоремы о свертке преобразований Лапласа и Фурье, при обращении (1.14), выражение для функции  $\theta_2(\xi, \eta, \zeta, \tau) = V_2(\xi, \eta, \zeta, \tau) \times [g_1(\tau)]^{-1}$ , характеризующей наличие испарения (инфильтрации) на поверхности почвы, можно получить в виде

$$(1.20) \quad \theta_2 = \frac{e^{\zeta - \zeta_0}}{2\pi} \int_0^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_1(\xi - u, \eta - v, \tau) [g_2(\tau, \mu)]^{-1} f(\mu, \zeta) \times \\ \times \exp \left[ -\mu - \frac{u^2 + v^2}{4\mu} \right] \mu^{-1} du dv d\mu \\ f(\mu, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu}} \exp \left[ -\frac{(\zeta - \zeta_0)^2}{4\mu} \right] - \exp[-(\zeta - \zeta_0)] \times \\ \times \operatorname{erfc} \left( \frac{\zeta - \zeta_0}{2\sqrt{\mu}} + \sqrt{\mu} \right)$$

и принято предположение

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon_1(x, y, t)| dx dy < \infty$$

Из соотношений (1.18), (1.20) следует, что решение задачи (1.4), (1.5)  $\theta(\xi, \eta, \zeta, \tau)$  имеет вид

$$(1.21) \quad \theta = \sum_{j=1}^N \theta_j, \quad \theta_j = \theta_{\infty j} - 2 \exp[2(\zeta + \zeta_j - \zeta_0)] \times$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{\xi+2(\xi_j-\xi_0)}^{\tau} e^{-2\mu} \theta_{\infty j}(\xi, \eta, \mu, \tau) d\mu + \exp[2(\xi_0 - \xi_j)] \times \\ & \times \theta_{\infty j}(\xi, \eta, \xi - 2(\xi_0 - \xi_j), \tau) + \frac{1}{2\pi} \exp(\xi - \xi_0) \times \\ & \times \int_0^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\xi - u, \eta - v, \tau - \mu) [g_2(\tau, \mu)]^{-1} \exp\left[-\mu - \frac{u^2 + v^2}{4\mu}\right] f(\mu, \xi) \mu^{-1} du dv d\mu \end{aligned}$$

Здесь функции  $f$ ,  $\theta_{\infty j}$ ,  $g_2$  определяются в формулах (1.20), (1.16) и (1.8). Решению (1.18) с помощью (1.16) можно придать другой вид. Например, для случая работы источника постоянной интенсивности  $Q_*$  и  $g(\tau) = a_1 = \text{const}$  формула (1.18) запишется в виде

$$\begin{aligned} (1.22) \quad \theta_{ij} &= \exp(\xi - \xi_j) \sum_{k=1}^2 \Phi(r_k, \tau) - \exp[2(\xi - \xi_0)] \times \\ & \times \int_0^{\tau} \exp\left[-\frac{R_j^2}{4\mu} + a_1 \mu\right] \text{erfc}\left(\frac{\xi - \xi_j - 2\xi_0}{2\sqrt{\mu}} + \sqrt{\mu}\right) \mu^{-1} d\mu \\ \Phi(r_k, \tau) &= \frac{1}{2r_k} \left[ e^{-r_{k1}} \text{erfc}\left(\frac{r_k}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau}\right) + e^{r_{k1}} \text{erfc}\left(\frac{r_{k1}}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau}\right) \right] \\ r_1 &= r_j, \quad r_2 = [(\xi - \xi_j)^2 + (\eta - \eta_j)^2 + [\xi - (2\xi_0 - \xi_j)]^2]^{1/2} \\ R_j^2 &= r_j^2 - (\xi - \xi_j)^2, \quad r_{k1} = r_k(1 + a_1)^{1/2}, \quad \tau_1 = \tau(1 + a_1) \end{aligned}$$

При учете испарения (инфильтрации) для получения решения  $\theta_j$  к выражениям (1.18) и (1.22) следует прибавить функцию (1.20).

Остановимся на двух простейших случаях задания испарения.

1. Переменное испарение задано на прямоугольном массиве длиной  $2M$  и шириной  $2B$

$$\varepsilon(x, y, t) = \begin{cases} \varepsilon_0(t) & (|x| < 2M, |y| < 2B) \\ 0 & (|x| > 2M, |y| > 2B) \end{cases}$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} (1.23) \quad \theta_2 &= \frac{1}{2} \int_0^{\tau} e^{-\mu} [g_2(\tau, \mu)]^{-1} \varepsilon_1(\tau - \mu) \left[ \text{erf} \frac{M_1 - \xi}{2\sqrt{\mu}} + \right. \\ & \left. + \text{erf} \frac{M_1 + \xi}{2\sqrt{\mu}} \right] \left[ \text{erf} \frac{B_1 - \eta}{2\sqrt{\mu}} + \text{erf} \frac{B_1 + \eta}{2\sqrt{\mu}} \right] f(\mu, \xi) d\mu \end{aligned}$$

$$M_1 = M\beta_1, \quad B_1 = B\beta_2, \quad \varepsilon_1(\rho) = \varepsilon_1(\rho) 2\pi \sqrt{K_1 K_2} / (K_3 \beta_3^2 Q_*)$$

2. Переменное во времени испарение задано на всем орошаемом массиве:  $\varepsilon(x, y, t) = \varepsilon_0(t)$  ( $-\infty < x, y < \infty, z = z_0$ ).

Из формулы (1.23) при  $M_1, B_1 \rightarrow \infty$  получаем

$$(1.24) \quad \theta_2 = 2 \exp(\xi - \xi_0) \int_0^{\tau} \varepsilon_1(\tau - \mu) [g_2(\tau, \mu)]^{-1} e^{-\mu} f(\mu, \xi) d\mu$$

Если реальную непрерывную функцию  $\varepsilon_0(t)$  аппроксимировать кусочно-постоянной функцией, что всегда можно выполнить с достаточной для

практики точностью, то выражение (1.20) примет вид

$$(1.25) \quad \theta_2 = 2 \exp(\zeta - \zeta_0) \sum_{k=1}^n (\varepsilon_{1,k} - \varepsilon_{1,k-1}) \int_0^{\tau - \tau_k} e^{-\mu} [g_2(\tau, \mu)]^{-1} f(\mu, \zeta) d\mu$$

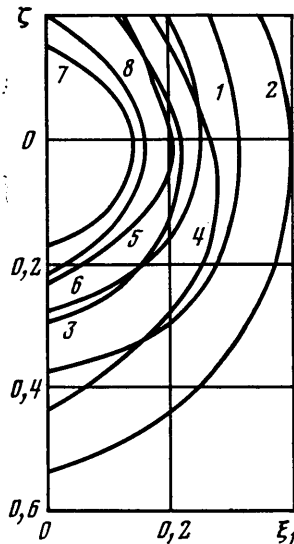
где  $n$  — число ступеней изменения  $\varepsilon_1(\tau)$  в интервале  $[0, T]$ ,  $T$  — рассматриваемый период изменения функции  $\varepsilon_1(\tau)$ ;  $\varepsilon_{1,0} = 0, \tau_0 = 0$ .

На фиг. 1 и 2 представлены результаты численных расчетов приведенного решения (1.22) для случаев точечного источника, расположенного в плоскости  $\eta = 0$  на поверхности почвы ( $\zeta = \zeta_0$ ) и на расстоянии  $\zeta = 0, 2$  от поверхности почвы ( $\zeta_0 = -0, 2, \zeta_j = 0$ ) соответственно при учете испарения, определяемого функцией (1.23).

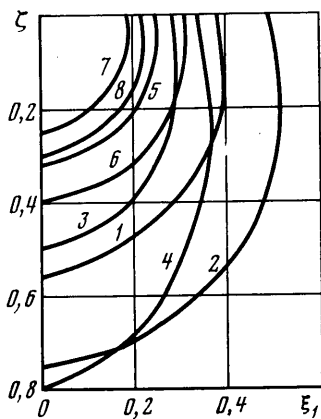
При этом принималось  $M_1 = 10, B_1 = 10, \varepsilon_1(\tau) = -2, \tau = 0, 5, \xi_1 = \beta_3 x$ . Кривые 1 и 2 соответствуют изолиниям  $\theta = 3$  и 2 соответственно при отсутствии испарения и транспирации ( $\varepsilon_1(\tau) = 0, a_1 = 0$ ); кривые 3 и 4 — те же изолинии при учете только испарения ( $\varepsilon_1(\tau) = -2, a_1 = 0$ ), 5 и 6 — соответствующие изолинии при учете транспирации при отсутствии испарения с поверхности почвы, 7 и 8 — изолинии  $\theta$  при учете обоих факторов ( $\varepsilon_1(\tau) = -2, a_1 = -10$ ).

Проделанные расчеты позволяют сделать вывод как о количественной, так и о качественной оценке влияния каждого из учитываемых факторов на рассматриваемый процесс.

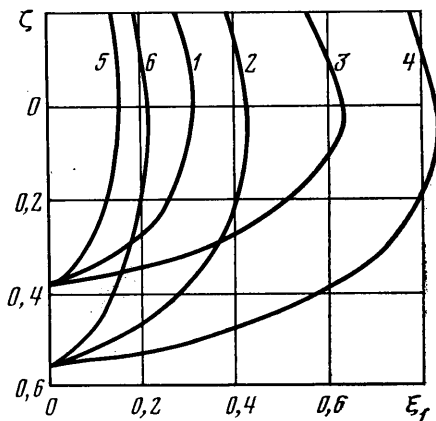
На фиг. 3 представлены изолинии  $\theta = 3$  и 2 (соответственно кривые 1, 3, 5 и 2, 4, 6) при  $\tau = 0, 5$  для источника на глубине  $\zeta = 0, 2$  от поверхности почвы с учетом ее анизотропных свойств. Кривые 1 и 2 соответствуют изотропному случаю ( $K_1 = K_2 = K_3$ ), 3 и 4 — случаю



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

анизотропии  $K_1 : K_2 : K_3 = 9 : 9 : 1$ , 5 и 6 — случаю  $K_1 : K_2 : K_3 = 1 : 1 : 9$ . Как видно из фиг. 3, характер анизотропии существенно влияет на рассматриваемый процесс. Заметим также, что изолинии, соответствующие второму случаю, более адекватны наблюдаемым экспериментально.

**2. Случай переменной начальной влажности грунта.** Переменность начальной влажности грунта можно учесть, дополнив правую часть уравнения (1.1) источниковым членом

$$[\varphi_0(x', y', z') - \langle \varphi_0 \rangle] \delta(x-x') \delta(y-y') \delta(z-z') \delta(t)$$

характеризующим выделение в начальный момент в единичном элементарном объеме почвы количества влаги  $\varphi_0(x', y', z') - \langle \varphi_0 \rangle$ , а затем проинтегрировав полученное решение по области  $\Omega$ . Здесь  $\langle \varphi_0 \rangle = W_0 = \text{const}$  — осредненное значение начальной влажности.

Уравнение (1.4) при этом примет вид

$$(2.1) \quad L\theta = -g(\tau)\theta + 4\pi \sum_{j=1}^N q_j(\tau) \delta(\xi - \xi_j) \delta(\eta - \eta_j) \delta(\zeta - \zeta_j) + \\ + [\varphi_{01}(\xi', \eta', \zeta') - \langle \varphi_{01} \rangle] \delta(\xi - \xi') \delta(\eta - \eta') \delta(\zeta - \zeta') \delta(\tau) \\ \varphi_{01} = \beta \varphi_0, \quad \langle \varphi_{01} \rangle = \beta W_0, \quad \beta = 4\pi \alpha Q_*^{-1}$$

Искомое решение можно получить, воспользовавшись формулой (1.21) и производя интегрирование по объему  $\Omega$ . В этом случае решение задачи (2.1), (1.5) при условии  $\theta(\xi, \eta, \zeta, 0) = \theta[W(\xi, \eta, \zeta, 0)] = \theta[\varphi_0(\xi, \eta, \zeta)]$  задается формулой

$$(2.2) \quad \theta_{2j} = \theta_j + \tau^{-3/2} e^{-\tau} \int_{\xi-\xi_0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \varphi_{01}(\rho, \nu, [\chi - \xi + 2\xi_0]) - W_{01} \} [g_1(\tau)]^{-1} \times \\ \times F(\xi, \eta, \rho, \nu, \tau) R(\chi, \zeta, \zeta_0, \tau) \exp[\omega(\chi, \zeta, \zeta_0)] d\rho d\nu d\chi \\ \omega = 2(\zeta - \zeta_0) - \chi, \quad F = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(\xi - \rho)^2 + (\eta - \nu)^2}{4\tau}\right] \\ R = \exp\left[-\frac{\omega^2}{4\pi}\right] - 2\sqrt{\frac{\pi}{\tau}} e^{\tau + \chi} \operatorname{erfc}\left(\frac{\chi}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau}\right) + e^{-\chi^2/4\pi}$$

Здесь функция  $\theta_j$  определена в (1.21).

Для определения поля влажности  $W(x, y, z, t)$  из вышеприведенных решений следует обратить формулу (1.3). Так, для почв с гидрофизическими параметрами вида (1.7) связь между  $\theta$  и  $W$  имеет вид

$$(2.3) \quad \bar{W}(\xi, \eta, \zeta, \tau) = \left[ \left( \frac{W_0 - W_c}{m - W_c} \right)^n + \frac{n^2 \gamma^2}{8\pi} Q \cdot \theta(\xi, \eta, \zeta, \tau) (K_1 K_2)^{-1/2} \right]^{1/2}$$

**3. Внутрипочвенное орошение.** Рассмотрим случай внутрипочвенных увлажнителей, моделируемых источниками различной протяженности. Для этого в соотношениях (1.18), (1.19), (1.21) вместо  $\theta_{\infty j}$  следует использовать функцию  $C_{\infty j}$ , являющуюся решением (1.4) для соответствующего линейного источника в неограниченной области  $\Omega_{\infty}$ , которое можно получить из (1.16), используя метод распределенных источников [6]. Ниже приведены выражения для  $C_{\infty j}$  для горизонтальных линейных увлажнителей конечной и неограниченной протяженности.

1. Горизонтальный линейный увлажнитель длины  $e = y_2 - y_1$

$$(3.1) \quad C_{\infty j}(\xi, \eta, \zeta, \tau) = \frac{\exp(\zeta - \zeta_j)}{2\beta_2} \int_0^{\tau} q_j(\tau - \mu) [g_2(\tau, \mu)]^{-1} \times$$

$$\times \mu^{-1} \exp \left[ -\mu - \frac{R_j^2}{4\mu} \right] (\operatorname{erf} \rho_2 - \operatorname{erf} \rho_1) d\mu$$

$$R_j^2 = (\xi - \xi_j)^2 + (\zeta - \zeta_j)^2, \quad \rho_{1,2} = (\eta_{1,2} - \eta) / 2\sqrt{\mu}, \quad e = (\eta_2 - \eta_1) / \beta_2$$

## 2. Горизонтальный линейный увлажнитель неограниченной протяженности:

$$(3.2) \quad C_{\infty j}(\xi, \eta, \zeta, \tau) = \frac{\exp(\zeta - \zeta_j)}{\beta_2} \int_0^{\tau} q_j(\tau - \mu) [g_2(\tau, \mu)]^{-1} \times \\ \times \exp \left( -\mu - \frac{R_j^2}{4\mu} \right) \mu^{-1} d\mu$$

В формулах (3.1) и (3.2)  $\xi_j, \zeta_j$  — координаты источника.

Полученные соотношения (1.21) и (2.2) также распространяются на случай линейных и плоских увлажнителей различных геометрических конфигураций при произвольном их расположении в почвогрунтовой толще и различных режимах водопада при наличии переменного во времени и по площади испарения — инфильтрации.

Полученные формулы позволяют на основе теории влагопереноса рассматривать фильтрацию из совершенных и несовершенных каналов, бассейнов, канав, а также процессы инфильтрации.

При подпочвенном и капельном орошении в окрестности увлажнителя может возникнуть зона полного насыщения грунта, для которой исходное уравнение (1), вообще говоря, теряет смысл. Течение здесь описывается уравнениями фильтрации. Однако с помощью полученных решений можно ориентировочно определить размеры этой зоны как области, где  $W > m$  [4] и, следовательно,  $\theta(W) > \theta(m)$ . Исследования [1] в рамках строгой теории указывают на возможность применимости этого подхода при небольших расходах увлажнителей и для почв со слабо выраженными капиллярными свойствами.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Крамаровская И. И. О внутрипочвенном орошении. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 2, с. 144.
2. Королева О. А., Королев А. В. Распределение влаги вокруг перфорированной трубы при подпочвенном орошении. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1979 № 4, с. 162.
3. Крамаровская И. И., Новосельский С. Н. Некоторые автомодельные задачи теории фильтрации при неполном насыщении грунта. — Изв. АН УзССР. Сер. техн. н., 1980, № 1, с. 68.
4. Крамаровская И. И., Новосельский С. Н. Две задачи внутрипочвенного орошения. — Докл. АН УзССР, 1977, № 6, с. 28.
5. Philip J. R. General theory on steady infiltration from surface sources with application to point and line sources. — Soil Sci. Soc. Amer. Proc., 1971, v. 35, № 6, p. 867.
6. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.

Калинин

Поступила в редакцию  
1.X.1980