

УДК 532.529.5

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В НЕСТАЦИОНАРНОМ СЛОИСТОМ ТЕЧЕНИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

ЖИЖИН Г. В., ОНАЦКИЙ П. А.

Рассматриваются закономерности движения частиц сферической формы в нестационарном слоистом течении жидкости. Считается, что жидкость несжимаема, частицы не взаимодействуют друг с другом и не оказывают влияния на параметры жидкости. Учитывается влияние градиента давления, присоединенной массы, силы Магнуса и вязкости жидкости на движение частиц. Постановка задачи соответствует условиям движения двухфазной смеси в каналах роторно-пульсационного аппарата (РПА) [1], широко используемого для интенсивного осуществления различных технологических процессов; растворения, эмульгирования, диспергирования и т.п. Процессы в этих аппаратах характеризуются резкой нестационарностью и в настоящее время практически не исследованы.

1. Течение жидкости в канале роторно-пульсационного аппарата. Основными элементами РПА являются роторные 1 и статорные 2 решетки (см. фиг. 1), выполненные в виде полых коаксиальных цилиндров с прорезями-каналами для прохождения жидкости. При полном закрытии прорези статорной решетки жидкость в прорези покоится. Части роторной решетки, закрывающие входное и выходное сечения прорези, двигаются синхронно. В момент начала открытия прорези жидкость под действием разности давлений приходит в движение. Область прорези разделяется на две изменяющие свой объем зоны *A* и *B*. Зона *A* — зона практически неподвижной жидкости, зона *B* — область нестационарного слоистого течения жидкости. Можно считать, что течение в зоне *B* плоское, так как отношение ширины зоны *B* к ее глубине при максимальном раскрытии прорези и к диаметру решетки достаточно малы [1].

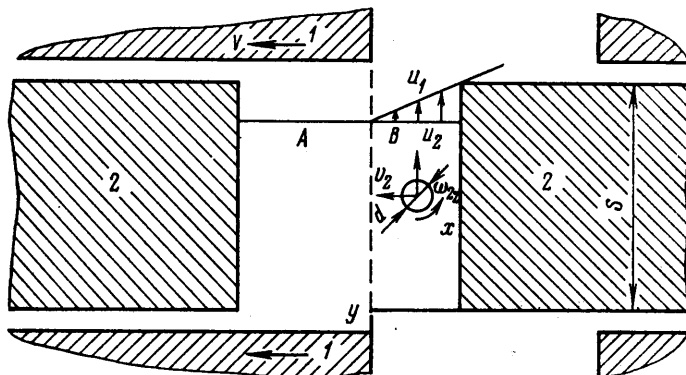
Вязкость жидкости для многих обрабатываемых в РПА сред достаточно мала, что позволяет при рассмотрении течения жидкости в прорези в качестве первого приближения вязкость жидкости не учитывать.

Принимается, что давление на входе в прорезь постоянно и равно среднему значению давления за период открытия прорези. Давление на выходе из прорези также считается постоянным, оно может быть рассчитано, исходя из необходимых расходных характеристик аппарата.

Для описания нестационарного слоистого течения жидкости в зоне *B* (о стационарном слоистом течении жидкости см. [2]) используются уравнения неразрывности и движения

$$(1.1) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \rho_1 \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) = -\operatorname{grad} p, \quad \mathbf{v} = \{u_1, v_1\}$$

При условии равенства нулю проекции скорости жидкости на ось *y*: $v_1 = 0$ (фиг. 1), из уравнений (1.1), (1.3) следует, что $u_1 = u_1(y, t)$, $p = p(x, t)$. Интегрируя уравнение движения (1.1) для u_1 сначала по переменной *x* от входа x_1 до выхода из прорези x_2 , а потом по времени, с учетом граничного условия $u_1 = 0$ при $t = yV^{-1}$ (V — скорость ротора),



Фиг. 1

получаем

$$(1.2) \quad u_1 = \frac{\Delta p}{\rho_1 S} \left(t - \frac{y}{V} \right), \quad \Delta p = p_1 - p_2, \quad S = x_2 - x_1$$

Характер изменения скорости жидкости в прорези показан на фиг. 1.

2. Система уравнений движения частиц в поле нестационарного слоистого течения жидкости. Уравнение нестационарного движения частицы в потоке жидкости с учетом влияния градиента давления, присоединенной массы и силы Магнуса имеет вид [3, 4]

$$(2.1) \quad \frac{\rho_2}{6} \frac{dv_2}{dt} = \frac{3\mu}{d^2} (v_1 - v_2) + \\ + \frac{\rho_1}{6} \frac{dv_1}{dt} + \frac{\rho_1}{12} \left(\frac{dv_1}{dt} - \frac{dv_2}{dt} \right) + \frac{\rho_1}{8} [(v_1 - v_2) \times \omega_2]$$

где v_1, v_2 — векторы скорости жидкости и частицы; d — диаметр частицы; μ — коэффициент динамической вязкости жидкости; ω_2 — вектор угловой скорости вращения частицы.

Количественная оценка показала, что для условий рассматриваемого процесса, характеризуемого малым временем открытого состояния прорези, влиянием члена Бассэ в уравнении (2.1), учитывающего память среды, можно пренебречь.

Уравнение (2.1) справедливо для малых чисел Рейнольдса, определенных по диаметру частицы $Re_p = |v_1 - v_2| d \rho_1 \mu^{-1}$. Если $Re_p \geq 0,2$, вид уравнения (2.1) сохраняется, изменяются лишь коэффициенты перед слагаемыми в правой части [4, 5].

Зависимость угловой скорости частицы от градиента скорости жидкости и от времени определяется уравнением [3, 6]

$$(2.2) \quad \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{t_0}, \quad \omega_1 = \frac{1}{2} \text{rot } v_1 = \frac{\Delta p}{2\rho_1 S V} \bar{z} z^{-1}$$

где ω_1 — угловая скорость вращения жидкости, $t_0 = \rho_2 d^2 / (60\mu)$ — время релаксации вращательного движения частицы.

Дифференцируя уравнение (1.2) по времени в координатах, связанных с частицей (переменные Лагранжа), получим

$$(2.3) \quad \frac{du_1}{dt} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\Delta p}{\rho_1 S} - v_2 \frac{\Delta p}{\rho_1 S V}$$

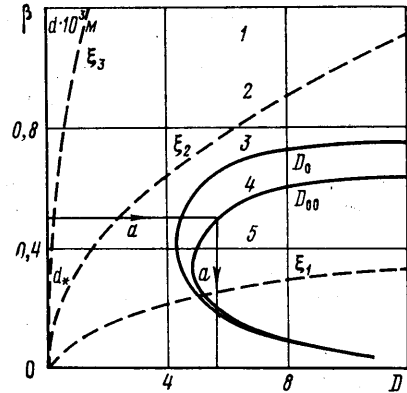
Записав уравнения (2.1), (2.2) в проекциях на оси координат (ось z направлена перпендикулярно плоскости xy), используя соотношение (1.2),

(2.3) и вводя безразмерные переменные

$$U = \frac{u_1 - u_2}{V}, \quad W = \frac{v_2}{V}, \quad \Omega = 2t_* \omega_{2z}, \quad \tau = \frac{t}{t_*}; \quad t_* = (2\rho_2 - \rho_1) \frac{d^2}{36\mu}$$

получим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую движение вращающихся частиц в нестационарном слое течения несжимаемой жидкости

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \frac{dU}{d\tau} &= D(1-\beta) + WD(\beta-1) - \\ &- U + W \frac{\Omega\beta}{4} = F_1 \\ \frac{dW}{d\tau} &= -W - \frac{U\Omega\beta}{4} = F_2 \\ \frac{d\Omega}{d\tau} &= \frac{t_*}{t_0} (D - \Omega) = F_3, \\ D &= \frac{Eu}{Sh}, \quad Eu = \frac{\Delta p}{\rho_1 V^2}, \\ Sh &= \frac{S}{Vt_*} \end{aligned}$$



Фиг. 2

Здесь t_* — время релаксации поступательных степеней свободы частицы, Eu и Sh — число Эйлера и Струхала соответственно.

Решения системы (2.4) можно представить траекториями в трехмерном фазовом пространстве (Ω, U, W) .

3. Фазовое пространство течений. Система (2.6) имеет единственное стационарное состояние с координатами

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \Omega_s &= D, \quad U_s = \frac{8D(1-\beta)}{D^2\beta(\beta-1)2+8+D^2\beta^2}, \\ W_s &= \frac{2D^2\beta(\beta-1)}{D^2\beta(\beta-1)2+D^2\beta^2+8} \end{aligned}$$

Линеаризуя систему уравнений (2.6) в окрестности стационарного состояния (3.1), для собственных чисел получаем равенство

$$(3.2) \quad \lambda_1 = -\gamma/\alpha, \quad \lambda_{2,3} = -1 \pm 0.5D(\beta^{-5/4}\beta^2)^{1/2}$$

Подкоренное выражение в (3.2) положительно, если $\beta < 4/5$, т. е. $\rho_1 < 8/11\rho_2$, и отрицательно, если $\beta > 4/5$, т. е. $\rho_1 > 8/11\rho_2$; собственное число $\lambda_2 = 0$ при $D = D_0 = 2(\beta^{-4/5}\beta^2)^{-1/2}$. Тип стационарного состояния однозначно определяется значениями двух параметров D и β , которые являются заданными величинами. Этими же параметрами определяются координаты стационарного состояния (3.1), в частности $U_s = W_s = \infty$ при $D = D_{00} = 2(\beta^{-3/2}\beta^2)^{-1/2}$.

Представляет интерес выделить те области значений параметров D и β , которые соответствуют различным типам стационарного состояния и расположению их в различных квадрантах фазового пространства. В плоскости (β, D) можно выделить пять областей, ограниченных на фиг. 2 сплошными жирными линиями, отвечающих этим условиям (бифуркационная диаграмма).

В областях 1, 2 стационарные состояния имеют тип устойчивого узла-фокуса, в области 3 — устойчивого узла, в областях 4, 5 — стационарные

состояния неустойчивы и имеют тип устойчивого седла (используется классификация [7, 8]). В областях 2, 3, 4 стационарное состояние расположено в квадранте с отрицательным значением W и положительным значением U , что соответствует движению частиц к стенке статора против оси y и отставанию частиц от жидкости в направлении оси x . В областях 1, 5 стационарное состояние расположено в квадранте с положительным значением W и отрицательным значением U , что соответствует движению частиц от стенки статора по оси y и отставанию жидкости от частиц в направлении оси x .

Из построения трехмерных фазовых портретов, последовательно отвечающих областям 1–5 фиг. 2, методами, развитыми в работах [9–11], следует, что в первых четырех фазовых пространствах в принципе возможно достижение стационарного состояния из начального, характеризующего равенством нулю всех скоростей, — начала координат. Следует отметить, что в четвертом фазовом пространстве стационарное состояние практически недостижимо ввиду его неустойчивости, а в пятом фазовом пространстве стационарное состояние не может быть достигнуто из начального состояния системы ни при каких условиях.

Рассмотренные течения смеси жидкости и частиц дают пример своеобразной самоорганизации неравновесной системы [12], при которой частицы, перемещаясь в поле нестационарного плоского течения жидкости, находят такой путь в жидкости, который приводит к стационарному состоянию, т. е. к постоянной разности между изменяющимися скоростью частицы вдоль потока жидкости и скоростью жидкости в точках расположения частицы в каждый момент времени и постоянными значениями скорости частиц поперек потока жидкости и угловой скорости вращения частиц.

После перекрытия роторной решеткой входного и выходного сечений прорези жидкость в прорези останавливается, а частицы продолжают заметно двигаться. Уравнения (2.4) будут описывать инерционное движение частиц в покоящейся жидкости, если положить параметр $D=0$ (т. е. $\Delta p=0$). Фазовая диаграмма инерционного движения частиц имеет единственное стационарное состояние $\Omega=W=U=0$ — равенство нулю всех скоростей — типа устойчивый узел. При движении роторной решетки прорезь периодически открывается и закрывается, происходит смена движений смеси по траектории одной из фазовых диаграмм, отвечающих областям 1–5 фиг. 2 инерционного движения, на движение смеси по траектории фазовой диаграммы.

Переход с траекторий движения под влиянием градиента давления на траектории инерционного движения скачкообразный, он определяется разрывом значений величины U , равной до скачка $(u_1 - u_2) V^{-1}$, а после скачка — $u_2 V^{-1}$.

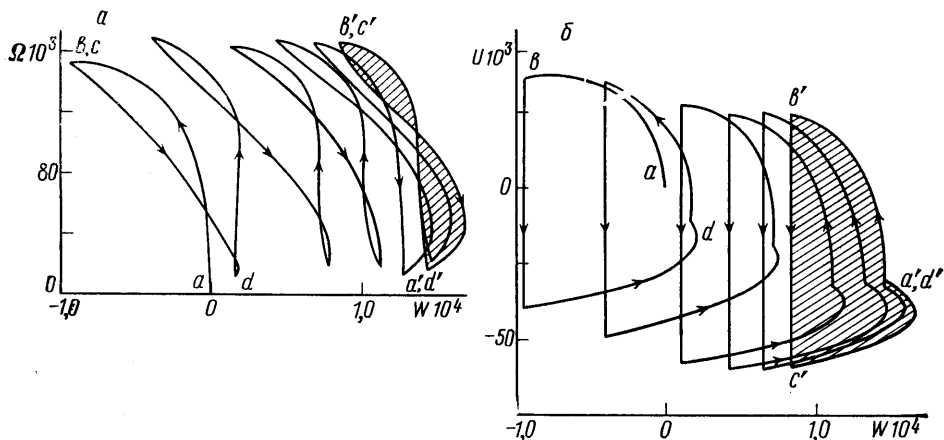
Характерным в этом периодическом процессе является стремление системы к некоторому стационарному циклу, составленному из отрезков траектории одной из фазовой диаграммы движения под влиянием градиента давления и фазовой диаграммы инерционного движения, а также прямой, отвечающей разрыву.

Осуществляются так называемые разрывные автоколебания [13].

Следует отметить, что возникающий в исследуемых двухфазных течениях разрывной предельный цикл имеет только один разрыв в отличие от известных предельных циклов с двумя разрывами [13, 14].

4. Расчет двухфазного течения при периодическом открытии канала. Численное решение на ЭВМ системы уравнений (2.4) производилось для РПА с диаметром роторной решетки 0,264 м. Остальные параметры варьировались в широком диапазоне значений.

На фиг. 3, 4 приведены результаты расчета движения двухфазной среды в прорези РПА с 60 прорезями шириной $5,5 \cdot 10^{-3}$ м при окружной скорости ротора $V = 14$ м/с с плотностью и вязкостью жидкости соответственно $\rho = 1000$ кг/м³, $\mu = 0,1$ Па·с. На фиг. 3 изображены проекции фазовой траектории на координатные



Фиг. 3

плоскости при движении частицы с диаметром $d = 0,6 \cdot 10^{-3}$ м и плотностью $\rho_2 = 4 \cdot 10^3$ кг/м³, что соответствует области 3 на фиг. 2 в период движения жидкости под влиянием градиента давления ($\beta = 0,333$; $D = 0,208$).

В период открытия прорези система изменяет свое состояние по траектории $a-b$. В момент закрытия прорези параметр U скачком изменяет свое значение от точки b к точке c . Инерционное движение частиц происходит по траектории $c-d$. При последующих чередованиях открытия и закрытия прорезей система асимптотически приближается к разрывному предельному циклу (a', b', c', d'). Область, ограниченная этим циклом на фиг. 3, для наглядности заштрихована.

На фиг. 4 изображены проекции разрывного предельного цикла на координатные плоскости при движении частицы с $d = 0,3 \cdot 10^{-3}$ м и плотностью $\rho_2 = 1,08 \cdot 10^3$ кг/м³, что соответствует области 2 на фиг. 2 в период движения жидкости ($\beta = 0,949$; $D = 0,01822$).

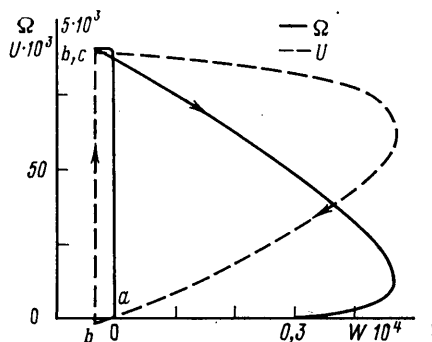
Существенной особенностью движения смеси при этих условиях является то, что практически уже при первом чередовании открытия и закрытия прорезей система выходит за предельный цикл (a, b, c).

Это связано с тем, что за время инерционного движения частиц скорости их движения достигают нуля, т.е. времена релаксации поступательных и вращательной степеней свободы t_* , t_0 меньше времени закрытого состояния прорези T' (в данном случае $t_* = 0,79 \cdot 10^{-4}$ с, $t_0 = 0,0162 \cdot 10^{-4}$ с, $T' = 0,593 \cdot 10^{-3}$ с).

Характерным также является и то, что за период открытия прорези система достигает стационарного состояния, соответствующего точке b с координатами (Ω_s, U_s, W_s) , так как времена релаксации t_* , t_0 оказываются также меньше времени открытия прорези $T = 0,3925 \cdot 10^{-3}$ с.

Оценку влияния полидисперсности на динамику течения смеси в прорези можно произвести с помощью штриховых линий фиг. 2, изображающих зависимость параметра D от диаметра частицы при различных значениях параметра $\xi = \Delta p (2\rho_2 + \rho_1) (VS36\mu\rho_1)^{-1}$, ($\xi_1 = 10^8$ м⁻², $\xi_2 = 10^7$ м⁻², $\xi_3 = 10^6$ м⁻²).

Этот параметр определяет условия проведения процесса, не зависящие от размера частицы. При заданных значениях параметров ξ и β с помощью фиг. 2 можно указать диапазоны диаметров частиц, движение которых подчиняется различным закономерностям, соответствующим областям 1-5 фиг. 2. В частности, можно указать



Фиг. 4

критический диаметр частиц d_c (путь по стрелке a), такой, что частицы с диаметром $>d_c$ удаляются в прорези от стенки статора по оси y , а частицы с диаметром $<d_c$ приближаются к стенке статора против оси y , т. е. происходит расслоение частиц различного диаметра в прорези.

Результаты работы позволяют определить закономерности изменения поступательных и вращательных скоростей движения частиц в нестационарном слоистом течении жидкости при различных значениях параметров. Знание этих закономерностей может быть использовано при анализе процессов диспергирования и растворения частиц.

Авторы выражают благодарность А. Р. Гурвичу за проведение расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Свищар Л. И., Онацкий П. А., Гарбузова Г. Л.* Роторно-пульсационные смесители для жидких сред.— Экспресс-информация Цинтихимнефтемаш. Серия ХМ-1. М., 1979, № 4.
2. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970.
3. *Нигматуллин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
4. *Бусройд Р.* Течение газа со взвешенными частицами. М.: Мир, 1975.
5. *Odar F.* Verification of the proposed equation for calculation of the forces on a sphere accelerating in a viscous fluid.— J. Fluid Mech., 1966, v. 25, No. 3.
6. *Rubnow S. I., Keller J. B.* The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid.— J. Fluid Mech., 1961, v. 11, No. 3.
7. *Sideriades L.* Méthodes topologiques et applications.— Ann. télécommun., 1959, v. 14, No. 7/8.
8. *Блакьер О.* Анализ нелинейных систем. М.: Мир, 1969.
9. *Вулис Л. А., Гусика П. Л., Жижин Г. В.* Качественное исследование одномерного стационарного МГД-течения проводящего газа.— Магнитная гидродинамика, 1971, № 4.
10. *Вулис Л. А., Гусика П. Л., Жижин Г. В.* Двухфазное течение в канале постоянного сечения.— ПМТФ, 1977, № 1.
11. *Жижин Г. В.* Двухфазные течения с трением.— Инж.-физ. ж., 1977, № 1.
12. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979.
13. *Теодорчик К. Ф.* Автоколебательные системы. М.—Л.: Гостехиздат, 1948.
14. *Вибрации в технике. Справочник в 6 т. Колебания нелинейных механических систем, т. 2.* М.: Машиностроение, 1979.

Ленинград

Поступила в редакцию
3.XII.1979