

УДК 532.517.4

**О МОДЕЛИРОВАНИИ УПОРЯДОЧЕННЫХ СТРУКТУР  
В ОТКРЫТЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКАХ**

**ЛАТЫШЕВ А. В., ОРДАНОВИЧ А. Е.**

В настоящее время имеется обширный экспериментальный материал, свидетельствующий о том, что в формировании характера течения, порождении рейнольдсовых напряжений и энергии турбулентности, процессах переноса тепла, импульса и пассивных примесей в турбулентном потоке существенную роль играют упорядоченные (когерентные) структуры [1—4]. В работе построена модель для описания когерентных структур, позволяющая по виду профиля средней скорости определить характерные размеры, скорости распространения, а также частотные и амплитудные характеристики этих движений. Модель основана на аналогии между упорядоченными образованиями и вторичными течениями во вспомогательном ламинарном потоке, профиль скорости которого совпадает с турбулентным профилем средней скорости. Влияние мелкомасштабных пульсаций описывается путем введения коэффициента турбулентной вязкости. В рамках модели проведены численные расчеты для плоских турбулентных течений в слое смешения, струе и следе за цилиндром. Результаты расчетов сопоставлены с экспериментальными данными.

1. Введение в рассмотрение когерентных структур подразумевает разбиение пульсационной составляющей потока на две части с целью выделения в ней компоненты, порожденной собственно упорядоченным движением. Все величины поэтому представляются в виде [5—8]:

$$(1.1) \quad f(x, t) = [f(x, t)] + f^\circ(x, t) + f'(x, t), \quad f^\circ(x, t) = \langle f(x, t) \rangle - [f(x, t)]$$

где  $x$  — вектор пространственных координат,  $t$  — время,  $[f(x, t)]$  — среднее по времени значение  $f$ ,  $f^\circ(x, t)$ ,  $f'(x, t)$  — упорядоченная и случайная составляющие пульсационного движения. Угловыми скобками обозначено условное или фазовое осреднение, используемое для выделения составляющей  $f^\circ$ .

Далее будем рассматривать течения несжимаемой жидкости. Системы уравнений, описывающих поведение каждой из компонент потока, могут быть получены из уравнений Навье — Стокса и уравнения неразрывности после представления всех величин в виде (1.1) и применения соответствующих операторов осреднения [5—8]:

$$(1.2) \quad [u_j] \frac{\partial [u_i]}{\partial x_j} = - \frac{\partial [p]}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 [u_i]}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} ([u_i^\circ u_j^\circ + u_i' u_j'])$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial u_i^\circ}{\partial t} + [u_j] \frac{\partial u_i^\circ}{\partial x_j} + u_i^\circ \frac{\partial [u_i]}{\partial x_j} = - \frac{\partial p^\circ}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i^\circ}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_j} ([u_i^\circ u_j^\circ] - u_i^\circ u_j^\circ) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle u_i' u_j' \rangle - [u_i' u_j'])$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial u_i'}{\partial t} + [u_j] \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + u_i^\circ \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial [u_i]}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial u_i^\circ}{\partial x_j} =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle u_i' u_j' \rangle - u_i' u_j') \\
 (1.5) \quad &\frac{\partial [u_i]}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i^\circ}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0
 \end{aligned}$$

Здесь  $u_i(x, t)$ ,  $i=1, 2, 3$ , — компоненты вектора скорости,  $p(x, t)$  — кинематическое давление,  $\nu$  — молекулярная вязкость жидкости. К (1.2) — (1.5) должны быть добавлены соответствующие граничные и начальные условия.

Каждая из приведенных выше систем незамкнута и в общем случае они должны решаться совместно. В настоящей работе рассматривается приближенный подход, при котором уравнения (1.4) отбрасываются, а полученные соотношения замыкаются путем выражения величин, содержащих  $u'(x, t)$ , через компоненты скорости  $[u(x, t)]$  и  $u^\circ(x, t)$ .

2. В уравнения (1.2), (1.3) члены, содержащие пульсационную составляющую  $u'(x, t)$ , входят в виде напряжений Рейнольдса

$$[r_{ij}] = -[u_i' u_j'], \quad r_{ij}^\circ = [u_i' u_j'] - \langle u_i' u_j' \rangle$$

Следуя гипотезе Буссинеска [9, 10], введем вместо величин  $r_{ij}$  коэффициенты турбулентной вязкости  $\nu_T g(x)$  и  $\nu_T g^\circ(x, t)$  с помощью соотношений [5—8]

$$\begin{aligned}
 (2.1) \quad [r_{ij}] &= \nu_T g(x) \left( \frac{\partial [u_i]}{\partial x_j} + \frac{\partial [u_j]}{\partial x_i} \right) \\
 r_{ij}^\circ &= \nu_T g^\circ(x, t) \left( \frac{\partial u_i^\circ}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\circ}{\partial x_i} \right)
 \end{aligned}$$

где  $\nu_T$  — некоторое масштабное значение вязкости, характеризующее процессы перемешивания в потоке. При этом считается, что характерный масштаб упорядоченных образований сравним с масштабом среднего течения и много больше масштаба турбулентных пульсаций  $u'(x, t)$  [5]. В случае открытых турбулентных течений такое допущение справедливо [1—4].

В предположении об изотропности мелкомасштабной турбулентности величина  $\nu_T$  может быть определена по формуле Ричардсона [9, 11]

$$(2.2) \quad \nu_T = C \epsilon^{1/3} h^{2/3}$$

где  $C$  — эмпирическая константа,  $h$  — характерный линейный размер потока,  $\epsilon$  — удельная скорость диссипации энергии в мелкомасштабной компоненте течения. Соотношение (2.2) следует также из гипотезы Гейзенберга о переносе энергии по спектру или непосредственно из соображений размерности [9]. Для определения величины  $\epsilon$  предположим, что скорость диссипации энергии мелкомасштабной составляющей потока равна скорости ее генерации в эту составляющую из среднего течения и упорядоченного движения (равновесный режим). В этом случае из уравнений баланса энергии [6—8] следует, что

$$(2.3) \quad \epsilon = \frac{1}{V} \int_V \left( [r_{ij}] \frac{\partial [u_i]}{\partial x_j} + [r_{ij}^\circ] \frac{\partial u_i^\circ}{\partial x_j} \right) d\tau$$

где  $V$  — некоторый характерный объем.

3. Полученная система уравнений (1.2) — (2.3) для описания турбулентного потока при наличии крупномасштабных упорядоченных структур замыкается заданием константы  $c$  и вида функций  $g(x)$  и  $g^\circ(x, t)$ . Ниже рассматривается упрощенная постановка, в которой дополнительно счи-

тается заданным профилем средней скорости [5—7, 12, 13]. Исходная задача в этом случае оказывается полностью аналогичной задачам, возникающим при исследовании распространения конечных возмущений в ламинарных потоках. Это позволяет использовать для ее решения методы классической теории гидродинамической устойчивости.

Подход к изучению когерентных структур на основе методов теории устойчивости применялся различными авторами [5—7, 12, 13] и оказался достаточно эффективным. Целый ряд вопросов, однако, требует более детального рассмотрения. В первую очередь это вопрос об амплитудных характеристиках исследуемых движений. Действительно, в большинстве работ рассматривалась линейная постановка задачи об устойчивости, в рамках которой амплитудные характеристики получены быть не могут. Интегральный энергетический метод, использованный в [6, 7], позволяет оценить амплитуды, но не дает распределения искомых характеристик по нормальной направлению среднего течения координате. Наконец, в турбулентном потоке наряду с нелинейными эффектами, изучаемыми в теории устойчивости ламинарных течений, возникает новый механизм вязкостной стабилизации амплитуды упорядоченного движения. Этот механизм обусловлен наличием обратной связи между искомой амплитудой и значением коэффициента турбулентного обмена. Действительно, как видно из уравнений баланса энергии, рост амплитуды регулярных колебаний приводит к усилению притока энергии в мелкомасштабную турбулентность и, следовательно, к увеличению интенсивности перемешивания, т. е. фактической турбулентной вязкости в потоке. Это в свою очередь ограничивает процесс нарастания амплитуды. Наличие вязкостного механизма стабилизации отмечалось в ряде работ [7, 12, 13], однако до сих пор не было предложено способа его математического описания.

4. При моделировании упорядоченных структур в плоских открытых турбулентных потоках — слое смещения, струе и следе за цилиндром — принимается ряд упрощений. Средний градиент давления полагается равным нулю. Рассматривается автомодельная область течения [9, 10] и плоскопараллельное приближение, в котором изменение потока по продольной координате не учитывается. Упорядоченное движение считается неслучайным, двумерным, рассматривается на фоне полностью развитого турбулентного течения и представляется в виде волны конечной амплитуды с некоторым волновым числом  $\alpha$  [5—7, 12, 13]. Отметим, что предположение о двумерности структур согласуется с экспериментальными данными [1—3]. Коэффициент молекулярной вязкости считается пренебрежимо малым по сравнению с коэффициентом турбулентной вязкости. Такое допущение общепринято для свободных течений [9, 10, 14] и подтверждается экспериментальными наблюдениями, свидетельствующими о том, что характеристики когерентных структур не зависят от эффектов, связанных с действием молекулярной вязкости [1—4]. Коэффициент турбулентного обмена считается постоянным по всей ширине потока и равным  $\nu_T$ , так что в (2.1)  $g(x) = g^\circ(x, t) = 1$ . Для открытых течений это предположение также общепринято [5—7, 12—14] и согласуется с интегральным подходом к определению коэффициента вязкости в рамках второй гипотезы Прандтля [10]. Подчеркнем, что условие  $g = g^\circ = 1$  вместе с требованием автомодельности полностью определяет вид профиля средней скорости [10].

Рассмотрим при указанных предположениях течение в плоском турбулентном слое смещения. Ось  $X$  направим параллельно, ось  $Y$  — перпендикулярно направлению среднего течения, проекции вектора скорости на оси обозначим соответственно  $u$  и  $v$ . Система уравнений и граничных условий принимает в этом случае вид

$$(4.1) \quad \mu_T \left( \frac{d^2 u}{dy^2} + 2y \frac{du}{dy} \right) = \frac{d}{dy} [u^\circ v^\circ]$$

$$(4.2) \quad \frac{\partial u^\circ}{\partial x} + \frac{\partial v^\circ}{\partial y} = 0$$

$$(4.3) \quad \frac{\partial u^\circ}{\partial t} + L(u^\circ) = -\frac{\partial p^\circ}{\partial x} - u \frac{\partial u^\circ}{\partial x} - v^\circ \frac{du}{dy} + \mu_T \Delta u^\circ$$

$$(4.4) \quad \frac{\partial v^\circ}{\partial t} + L(v^\circ) = -\frac{\partial p^\circ}{\partial y} - u \frac{\partial v^\circ}{\partial x} + \mu_T \Delta v^\circ$$

$$(4.5) \quad \mu_T^2 = \frac{1}{2} c^3 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left( \frac{du}{dy} \right)^2 + \left[ 2 \left( \frac{\partial u^\circ}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v^\circ}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^\circ}{\partial y} + \frac{\partial v^\circ}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} dy$$

$$(4.6) \quad u \rightarrow \pm 1, \quad u^\circ, v^\circ \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \pm \infty$$

$$L(f^\circ) = u^\circ \frac{\partial f^\circ}{\partial x} + v^\circ \frac{\partial f^\circ}{\partial y} - \left[ u^\circ \frac{\partial f^\circ}{\partial x} + v^\circ \frac{\partial f^\circ}{\partial y} \right]$$

$$u(y) = \frac{U(y) - U_x}{U_\Delta}, \quad \mu_T = \frac{v_T}{U_\Delta h}$$

Здесь  $y = Y/h(X_0)$  — автомодельная переменная, в которой течение простирается от  $y = -\infty$  до  $y = +\infty$ ,  $x = X/h(X_0)$ ,  $U(y)$  — размерный профиль средней скорости,  $U_x$ ,  $U_\Delta$  — полусумма и полуразность скоростей смешивающихся жидкостей. Все переменные в (4.1)–(4.6) приведены к безразмерному виду. В качестве характерного масштаба скорости выбрана величина  $U_\Delta$ , масштаба длины — автомодельный масштаб  $h(X_0) = X_0/\sigma$ , где  $X_0$  — некоторое фиксированное значение  $X$ ,  $\sigma$  — эмпирическая константа, характеризующая скорость расширения слоя. Подчеркнем, что уравнения (4.1)–(4.5) записаны в рамках плоскопараллельного приближения, но в автомодельных переменных. Этим объясняется вид левой части (4.1) [10, 15].

Задача о моделировании упорядоченного движения сводится к поиску устойчивых автоколебательных решений системы (4.1)–(4.6), содержащей единственную эмпирическую константу  $C$ .

5. Рассмотрим систему уравнений, получающуюся из (4.1)–(4.6) при отключенной обратной связи (4.5). Для любого наперед заданного значения  $\mu_T = \mu_1$  автоколебательные решения этой системы могут быть найдены с помощью обычного метода Стюарта — Ватсона [15, 16].

Представим компоненты скорости и давление в виде

$$(5.1) \quad u = u_{00} + |A|^2 u_{02} + |A|^4 u_{04} + \dots$$

$$(5.2) \quad \{u^\circ, v^\circ, p^\circ\} = 2 \operatorname{Real} (A (\{u_{11}, v_{11}, p_{11}\} + |A|^2 \{u_{13}, v_{13}, p_{13}\} + \dots) \exp(i\alpha x) + A^2 (\{u_{22}, v_{22}, p_{22}\} + |A|^2 \{u_{24}, v_{24}, p_{24}\} + \dots) \exp(2i\alpha x) + \dots)$$

$$(5.3) \quad \frac{dA}{dt} = \gamma_0 A + \gamma_2 A |A|^2 + \gamma_4 A |A|^4 + \dots$$

где  $A(t) = |A(t)| \exp(i\varphi(t))$  — комплексная амплитуда, удовлетворяющая уравнению Ландау (5.3),  $\alpha$  — волновое число, а функции  $u_{nm}$ ,  $v_{nm}$ ,  $p_{nm}$  зависят только от  $y$ . Под оператором  $[f]$  в этом случае следует понимать осреднение по волновой переменной  $\alpha x + \varphi(t)$ . Подставив (5.1)–(5.3) в

(4.1) – (4.4), (4.6), приравняв коэффициенты при одноименных гармониках и одинаковых степенях амплитуды и исключив давление, можно получить последовательность краевых задач для функций  $v_{nm}$ ,  $n \neq 0$  и  $u_{0m}$ . Неизвестные коэффициенты  $\gamma_m$  в (5.3) определяются из условий разрешимости этих задач [15, 16].

Определив при заданном  $\mu_T = \mu_1$  коэффициенты  $\gamma_m$ , можно найти равновесную амплитуду  $A$  и компоненты скорости  $u_{nm}$ ,  $v_{nm}$  в (5.1), (5.2), а подставив найденные величины в (4.5), – значение коэффициента турбулентной вязкости  $\mu_T = \mu_2$ . В общем случае  $\mu_2 \neq \mu_1$ . Для решения полной задачи (4.1) – (4.6) достаточно найти такое значение  $\mu_T = \mu_*$ , при котором  $\mu_2 = \mu_1 = \mu_*$ .

Проиллюстрируем описанную процедуру на примере рассматриваемых открытых течений. Расчеты показывают, что в этом случае действительная часть коэффициента  $\gamma_2$  в (5.3) отрицательна, поэтому при получении устойчивых автоколебательных режимов в разложениях (5.1), (5.2) можно ограничиться членами третьего порядка малости по амплитуде [16]. Характерная качественная картина решения изображена на фиг. 1. По оси абсцисс на фигуре отложена амплитуда упорядоченного движения  $|A|$ , по оси ординат – безразмерный коэффициент турбулентной вязкости  $\mu_T$ . Величины  $C$  и  $\alpha$  считаются заданными. Точкой  $\mu_0$  отмечено значение  $\mu_T$ , получающееся по формуле (4.5) при  $A=0$ , т.е. в отсутствие упорядоченной составляющей течения, точкой  $\mu_k$  – критическое по линейной теории значение коэффициента вязкости для профиля  $u_{00}(y)$ . Кривая 1 –  $A(\mu_1)$  – изображает решение системы (4.1)–(4.4), (4.6) при различных значениях  $\mu_T = \mu_1$  и описывает чисто нелинейный механизм стабилизации амплитуды. Кривая 2 –  $\mu_2(A(\mu_1))$  – является результатом подстановки зависимости  $A(\mu_1)$  и соответствующих форм в (4.5) и дает представление о вязкостном механизме стабилизации. Решение полной задачи –  $\mu_*$ ,  $A_*$  – находится на пересечении указанных кривых. Отметим, что это решение может быть получено также непосредственным разложением коэффициента вязкости в ряд по степеням амплитуды:

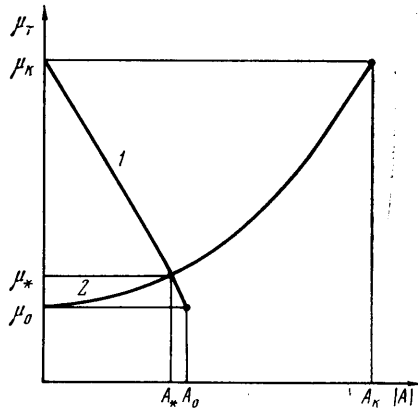
$$(5.4) \quad \mu_T = \mu_0 + |A|^2 \mu_{02} + \dots$$

с последующей подстановкой (5.1)–(5.4) в (4.1)–(4.6). Неизвестные коэффициенты в (5.4) определяются в этом случае из условия (4.5).

Рассмотрим вопрос об относительной роли двух механизмов стабилизации амплитуды упорядоченного движения. Обратимся вновь к фиг. 1. Продлим кривую 1 до пересечения ее с линией  $\mu_T = \mu_0$ . Координаты точки пересечения  $\mu_0$ ,  $A_0$  дают решение исходной задачи при учете только нелинейного механизма стабилизации амплитуды. Это решение может быть получено методом Стюарта – Ватсона после подстановки в систему (4.1)–(4.4), (4.6) значения  $\mu_T = \mu_0$ . Для выделения чисто вязкостного механизма исключим в уравнениях движения нелинейные по компонентам  $u^\circ$ ,  $v^\circ$  члены. Автоколебательное решение системы (4.1) – (4.6) в этом случае возможно только при  $\mu_T = \mu_k$ , а соответствующее значение амплитуды  $A_k$  определяется из условия (4.5)

$$\frac{1}{A_k^2} = \frac{c^3}{2(\mu_k^2 - \mu_0^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 2 \left( \frac{\partial u^\circ}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v^\circ}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^\circ}{\partial y} + \frac{\partial v^\circ}{\partial x} \right)^2 \right] dy$$

где  $u^\circ$ ,  $v^\circ$  – решения линейной задачи для профиля  $u_{00}(y)$  при  $\mu_T = \mu_k$ . Наличие обратной связи (4.5) между компонентами скорости упорядочен-

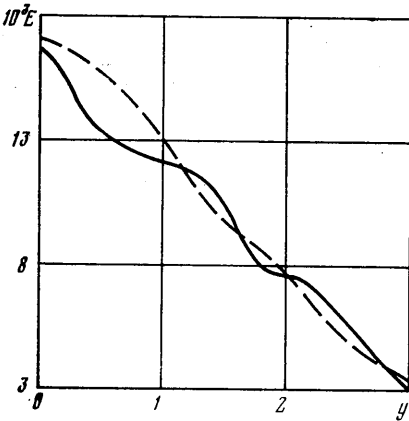


Фиг. 1

ных структур и коэффициентом турбулентного обмена позволяет ввести понятие амплитуды даже при сохранении в уравнениях движения только линейных членов (что невозможно в рамках теории устойчивости ламинарных течений).

Таким образом, точки с координатами  $(\mu_0, A_0)$ ,  $(\mu_k, A_k)$  и  $(\mu_*, A_*)$  на фиг. 1 изображают решение исходной задачи с учетом только нелинейного, только вязкостного и двух механизмов стабилизации соответственно. Относительная роль каждого из механизмов определяется взаимным расположением этих точек. Расчеты, проведенные для течений в слое смешения, струе и следе за цилиндром, показали, что оба механизма стремятся уменьшить амплитуду упорядоченного движения, так что  $A_* < A_0$  и  $A_* < A_k$ . Было обнаружено также, что полное решение  $A_*$  определяется в основном нелинейными эффектами и незначительно отличается от  $A_0$ , в то время как значение  $A_k$  оказывается сильно завышенным.

6. Антисимметрия профиля скорости  $u_{00}(y)$  в слое смешения [10] позволяет проводить решение исходной задачи в полупространстве  $0 \leq y \leq \infty$  [17]. Фазовая скорость волны оказывается в этом случае равной полусумме скоростей смешивающихся потоков, что в точности соответствует наблюдаемой в экспериментах скорости распространения упорядоченных структур [4].



Фиг. 2

тролировалась путем уменьшения  $S$ , увеличения  $k$  и  $y$ . Заметного расхождения результатов при этом обнаружено не было.

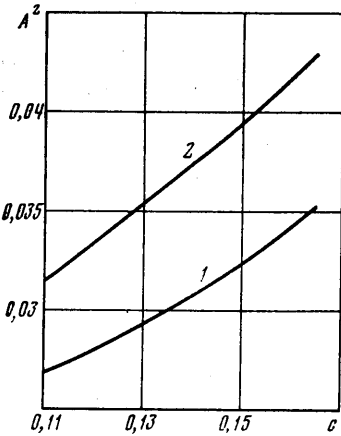
Волновое число  $\alpha$  в (5.2) определялось из условия максимального роста компонент скорости  $u^\circ$ ,  $v^\circ$  по линейной теории, т. е. в результате решения уравнения Орра — Зоммерфельда для профиля  $u_{00}(y)$  с  $\mu_T = \mu_0$ . Такой выбор  $\alpha$  основан на аналогии с постановкой задач в теории устойчивости ламинарных течений. Критерием выбора константы  $C$  в законе Ричардсона служило условие совпадения значений коэффициента турбулентного обмена, построенных по формуле (2.2) и второй гипотезе Прандтля [10]. Расчеты показали, что это условие выполняется при  $0,121 \leq C \leq 0,157$  (указанный диапазон позволяет охватить в рамках формулы Прандтля различные экспериментальные данные). Волновое число  $\alpha$  изменяется в этом случае от  $\alpha = 0,427$  до  $\alpha = 0,405$ , а число Струхала, построенное по полуширине слоя и полусумме скоростей смешивающихся потоков — от  $St = 1,25$  до  $St = 1,15$ , что хорошо согласуется с экспериментом [2].

Представление о характерных амплитудах исследуемых движений дает фиг. 2, где приведены расчетное (сплошная линия) и экспериментальное (штриховая линия) распределения турбулентной энергии крупномасштабной компоненты течения. Начало координат на фигуре помещено в точку перегиба профиля средней скорости, по оси абсцисс отложена автомодельная переменная  $y$ , по оси ординат — величина  $E = 0,5[(u^\circ)^2 + (v^\circ)^2]$ , нормированная на квадрат разности скоростей смешивающихся потоков. Экспериментальные значения взяты из работы [3], расчет выполнен при

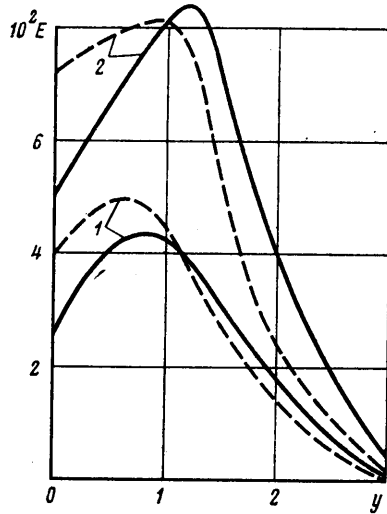
Численные расчеты проводились методом Рунге — Кутты с использованием процедуры ортогонализации для подавления быстрорастущего решения. В разложениях (5.1), (5.2) сохранялись члены третьего порядка малости по амплитуде. Условия затухания компонент скорости при  $y \rightarrow \infty$  заменялись условиями склейки с аналитическим решением во внешнем течении:  $u_{00} = 1$ ,  $d^2 u_{00}/dy^2 = 0$ ,  $y \geq y$ . Коэффициенты уравнения (5.3) определялись с помощью «алгебраического» метода [16]. В расчетах величина  $y$  принималась равной 3,4, шаг интегрирования  $S = 0,0125$ , количество ортогонализаций  $k = 136$ . Точность вычисления искомых величин кон-

$C=0,152, \alpha=0,408$ . (Константа  $C$  была определена по данным, приведенным в [3]).

Анализ фиг. 2 показывает, что построенная модель достаточно адекватно описывает амплитудные характеристики упорядоченного движения. Качественная картина распределения пульсаций в расчетах и эксперименте имеет сходный характер: максимальная интенсивность достигается в точке перегиба профиля средней скорости, уровень пульсаций спадает к границе течения и т. д. Количественное совпадение также оказывается удовлетворительным (наличие всплесков в расчетном распределении мо-



Фиг. 3



Фиг. 4

жет быть обусловлено тем, что в (5.2) учтено недостаточное количество членов разложения).

Влияние различных механизмов стабилизации амплитуды упорядоченных структур иллюстрирует фиг. 3, где построены графики функций  $A_*^2(C)$  (кривая 1) и  $A_0^2(C)$  (кривая 2). Разность  $A_0(C) - A_*(C)$  не превышает 10% от значения  $A_*$ , что свидетельствует о решающей роли нелинейного механизма стабилизации.

7. Для течений в плоской турбулентной струе и дальнем следе за цилиндром уравнение (4.1) и граничные условия (4.6) принимают соответственно вид [10, 15]:

$$(7.1) \quad \mu_T \left( \frac{d^3 \psi}{dy^3} + 2\psi \frac{d^2 \psi}{dy^2} + \left( \frac{d\psi}{dy} \right)^2 \right) = \frac{d}{dy} [u^0 v^0], \quad u_1 = \frac{d\psi}{dy}$$

$$(7.2) \quad u_1(0) = 1, \quad u_1 \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \pm \infty$$

$$(7.3) \quad \mu_T \left( \frac{d^2 u_2}{dy^2} + 2y \frac{du_2}{dy} + 2u_2 \right) = \frac{d}{dy} [u^0 v^0]$$

$$(7.4) \quad u_2 \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \pm \infty, \quad u_1(y) = \frac{U_1(y)}{U_1(0)}, \quad u_2(y) = \frac{U_\infty - U_2(y)}{U_\infty - U_2(0)}$$

Здесь  $y$  — автомодельная переменная,  $u_1, u_2$  — безразмерные,  $U_1, U_2$  — размерные профили средней скорости,  $U_\infty$  — скорость набегающего на цилиндр потока.

Система (4.1) — (4.6) с учетом (7.1) — (7.4) была решена по изложенной в предыдущих пунктах схеме. В качестве характерного масштаба скорости для течения в струе было выбрано значение  $U_1(0)$ , для течения в следе —  $U_\infty - U_2(0)$ . Волновое число  $\alpha$  и константа  $C$  в (2.2) определялись из тех же условий, что в слое смешения. Соответствующие интервалы изменения этих величин оказались равными  $0,104 \leq C \leq 0,122$ ;  $0,765 \geq \alpha \geq 0,736$  и  $0,162 \leq C \leq 0,169$ ;  $0,735 \geq \alpha \geq 0,723$ .

Характерные результаты расчетов для течений в струе (кривые 1) и следе (кривые 2) представлены на последней фигуре. Сплошными линиями построены расчетные распределения осредненной энергии турбулентных пульсаций при  $C=0,118$ ,  $\alpha=0,743$  и  $C=0,162$ ,  $\alpha=0,735$  соответственно, штриховыми — экспериментальные данные [18, 14]. В качестве нормировки по оси ординат для каждого из течений использован квадрат характерной скорости. Анализ фиг. 4 показывает, что полученные в расчетах величины удовлетворительно описывают уровень и качественный характер распределения пульсаций по нормальной направлению среднего течения координате. Количественное совпадение оказывается несколько худшим, чем в слое смешения. Отчасти это может быть обусловлено тем, что в экспериментах проводились стандартные измерения без выделения крупномасштабной компоненты потока, в то время как результаты численного решения относятся только к упорядоченным структурам.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Roshko A. Structure of turbulent shear flows: a new look.— AIAA Journal, 1976, v. 14, № 10, p. 1349.
2. Winant C. D., Browand F. K. Vortex pairing: the mechanism of turbulent mixing-layer growth at moderate Reynolds number.— J. Fluid Mech., 1974, v. 63, № 2, p. 237.
3. Browand F. K., Weidman P. D. Large scales in the developing mixing layer.— J. Fluid Mech., 1976, v. 76, № 1, p. 127.
4. Davies P. O. A. L., Yule A. I. Coherent structures in turbulence.— J. Fluid Mech., 1975, v. 69, № 3, p. 513.
5. Reynolds W. C. Large-scale instabilities of turbulent wakes.— J. Fluid Mech., 1972, v. 54, № 3, p. 481.
6. Chan Y. Y. Wavelike eddies in a turbulent jet.— AIAA Journal, 1977, v. 15, № 7, p. 992.
7. Liu J. T. C. Nonlinear development of an instability wave in a turbulent wake.— Phys. Fluids, 1971, v. 14, № 11, p. 2251.
8. Reynolds W. C., Hussain A. K. M. F. The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow. Pt 3. Theoretical models and comparison with experiments.— J. Fluid Mech., 1972, v. 54, № 2, p. 263.
9. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1965. 639 с.
10. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 742 с.
11. Иванов В. Н., Орданович А. Е. Мезомасштабный коэффициент обмена и его оценка по вихревым дорожкам Кармана в атмосфере.— Изв. АН СССР. Физ. атмосферы и океана, 1974, т. 10, № 5, с. 475.
12. Lessen M., Singh P. J. Stability of turbulent jets and wakes.— Phys. Fluids, 1974, v. 17, № 6, p. 1329.
13. Lessen M., Paillett F. Marginal instability of turbulent shearing layers and the break point of a jet.— Phys. Fluids, 1976, v. 19, № 7, p. 943.
14. Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М.: Изд-во иностр. лит., 1956. 399 с.
15. Герценштейн С. Я., Штемлер Ю. М. О возмущениях конечной амплитуды в пограничном слое.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 1, с. 150.
16. Герценштейн С. Я., Штемлер Ю. М. Нелинейное развитие возмущений в пограничных слоях и их устойчивость.— Докл. АН СССР, 1977, т. 234, № 6, с. 1277.
17. Maslowe S. A. Weakly nonlinear stability of a viscous free shear layer.— J. Fluid Mech., 1977, v. 79, № 4, p. 689.
18. Bradbury L. J. S. The structure of a self-preserving turbulent plane jet.— J. Fluid Mech., 1965, v. 23, № 1, p. 31.

Москва

Поступила в редакцию  
18.XII.1979